Διαφορικές Εξισώσεις
14/2/2005
Σημειώσεις (καθηγητής: Στρατής)

Ορισμοί:

📖 Μία εξίσωση στην οποία εμφανίζεται μία άγνωστη συνάρτηση και οι παραγωγές της κάποιας τάξης ονομάζεται **διαφορική εξίσωση**.

📖 Η παράγωγος με την μεγαλύτερη τάξη που εμφανίζεται λέγεται τάξη της διαφορικής εξίσωσης.

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

Έστω μια συνάρτηση y= y(x) μίας μεταβλητής με x ή με t .
x: πραγματικός αριθμός, x ανήκει I:διάστημα του R.

Βολική μορφή διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης : $y'(x) = f(x, y(x))$

Αυτή δεν είναι η γενικότερη μορφή της εξίσωσης γιατί θα έπρεπε να περιέχει και την y' η f συνάρτηση. Προφανώς η y είναι παραγωγίσιμη με $y' = \frac{dy}{dx}$.
Η f είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών με την y(x) άγνωστη , επομένως και η y'(x) είναι άγνωστη.
Η σχέση γράφεται συνηθέστερα: $y' = f(x, y)$

Παράδειγμα 1:
Y'=0 Δηλαδή ψάχνω μία συνάρτηση f(x,y) : η παράγωγός της να κάνει **μηδέν**. Μία λύση είναι η (f(x,y)=0) . Μία διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις. Η y έχει τις εξής άπειρες λύσεις: y(x)=C.

!!! Προϋποθέσεις ορισμού διαφορικής εξίσωσης:
Η y πρέπει να είναι $C^1(I)$, δηλαδή να υπάρχει η πρώτη παραγωγός της και να είναι συνεχής στο διάστημα I.

Προσοχή:
1. Το ζεύγος των x,y(x) πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.
2. Λύση της εξίσωσης είναι μία συνάρτηση y(x) και ικανοποιεί την $y' = f(x, y)$.

Παράδειγμα 2:
y'=g(x) , τότε η λύση αυτής της εξίσωσης είναι το: $y(x) = \int g(x)dx + c$
Η παραπάνω εξίσωση λύνεται απλά γιατί τη g εξαρτάται από τη y. Δηλαδή με απλή ολοκλήρωση βρίσκουμε την λύση.

!!! Για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε συναρτήσεις που έχουν παράγωγο ίση με το μηδέν(y'=0) και ικανοποιούν την συνθήκη y(0)=1.
*Η παραπάνω διατύπωση είναι ένα παράδειγμα **αρχικού προβλήματος**: εύρεση ειδικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης με την χρήση της αρχικής συνθήκης.*

Για το παραπάνω παράδειγμα:
$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y(0)=c \end{array}\right\} \Rightarrow C=1$ Άρα η λύση της εξίσωσης είναι μία η y(x)=1.

*!!! Το Πλήθος των αρχικών συνθηκών **πρέπει** να είναι τέτοιο όσο και η <u>τάξη</u> της εξίσωσης.*

Παράδειγμα 3: Βρείτε τις λύσεις της y'=y
Δηλαδή θέλουμε εκείνες τις συναρτήσεις που η παράγωγός τους να είναι ίση με τις ίδιες.
Π.χ είναι όλες οι: λe^x . Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $y(x)=ce^x$ για κάθε c , δηλαδή ,είναι άπειρες.

Τώρα για το ίδιο παράδειγμα έχουμε και την αρχική συνθήκη y(0)=1.
Θα την επιβάλουμε στις λύσεις που βρήκαμε παραπάνω , δηλαδή:
$\left.\begin{array}{l} y(0)=ce^0=c \\ y(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1$ Άρα η μοναδική λύση του αρχικού προβλήματος είναι : $y(x)=e^x$.

Γενικότερος τρόπος σκέψης:

- Η y'=y γράφεται $y=\dfrac{dy}{dx}$
- Μπορούμε θεωρώντας ότι $y(x)\neq 0$ ότι $\dfrac{dy}{y}=dx$ (πετύχαμε χωρισμό των μεταβλητών)
- Μετά με ολοκλήρωση θα έχουμε την λύση: $\int\dfrac{dy}{y}=\int dx \Rightarrow \ln y = x+c \Rightarrow y=e^{x+c}$
- Η παραπάνω διαδικασία λέγεται μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών.

Παράδειγμα 4: Βρείτε τις λύσεις της $y'=y^2$.
Θέλουμε να βρούμε συναρτήσεις που οι παράγωγοί τους θα είναι ίσες με το τετράγωνο τους.

$$y'=\frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx, \mu\varepsilon\, y=0$$
$$\frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2}=\int dx \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+c \Rightarrow y=-\frac{1}{x+c}, \forall c$$

Και εδώ η y=0 είναι λύση , όμως για καμία τιμή της c δεν μπορώ να την πάρω από τον τύπο. Αυτή η λύση λέγεται **ιδιάζουσα** για την δεν μπορούμε να την πάρουμε από τον τύπο για καμιά τιμή της c.

Θεωρούμε αρχική συνθήκη την y(0)=0. Με αυτήν την αρχική συνθήκη δεν μπορούμε να βρούμε λύση από τον τύπο. Όμως η αρχική συνθήκη ικανοποιείται.
Η έννοια της αρχικής συνθήκης είναι στενά συνηφασμένη με το πεδίο ορισμού των λύσεων.
Αν αρχική συνθήκη είναι η: y(0)=-1 τότε c=1 και η λύση της εξίσωσης: $y=-\frac{1}{x+1}$, $x\in(-1,\infty)$ στο οποίο διάστημα ανήκει και το μηδέν.

Παρατήρηση:
Η διαφορική εξίσωση έχει λύσεις άπειρες. Όμως αν δοθεί αρχική τιμή ,υπάρχει λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης η οποία εξαρτάται από την αρχική τιμή.

Παράδειγμα 5: Να βρείτε τις λύσεις της $y'=y^{\frac{1}{3}}$ με αρχική συνθήκη y(0)=0.
Πρώτα θα εξετάσω αν y=0 είναι λύση της εξίσωσης (κάτι που ισχύει). Άρα $y_0(x)=0$, με x πραγματικό είναι μία λύση του προβλήματος.

$$y_a(x)=\begin{cases}0, 0\le x<a, a\ge 0\\ \pm(\frac{2}{3}(x-a))^{\frac{3}{2}}, x\ge a\end{cases}$$ Άρα το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις(όχι μόνο η εξίσωση).

Δηλαδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αρχική συνθήκη δεν μας εξασφάλισε την μοναδικότητα των λύσεων αλλά υπάρχουν πολλές λύσεις.
Αν y'=f(x,y) & $y(x_0)=y_0$ δηλαδή αν η f είναι παραγωγίσιμη και ως προς τις δύο μεταβλητές τότε το πρόβλημα για κάθε αρχικό δεδομένο έχει ακριβώς μία λύση.
Αν όμως η f δεν είναι «αρκετά καλή» δηλαδή κάτι λιγότερο από παραγωγίσιμη τότε έχουμε πολλές λύσεις.
Το πόσο καλή είναι η f κάθε φορά δείχνει αν υπάρχει μία λύση ή περισσότερες.

Αν έχουμε εξισώσεις της μορφής: M(x)+N(y)$\frac{dy}{dx}$=0

- Μπορεί να γραφεί ως: $M(x)dx=-N(y)dy\Rightarrow\int M(x)dx=-\int N(y)dy$

Παράδειγμα 6: Να βρείτε τις λύσεις του προβλήματος με εξίσωση $y'=y(y^2-1)$ και αρχική τιμή y(0)=1/2.

Επόμενη Σελίδα

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dy}{dx} = y(y^2-1) \Rightarrow \frac{dy}{y(y^2-1)} = dx, y \neq 0,-1,1$$

$$\int \frac{dy}{y(y^2-1)} = \int dx$$

$$\frac{1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} = \ldots = \frac{y^2(A+B+C)+y(B-C)-A}{y(y-1)(y+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A=-1 \\ B=C \\ A+B+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow B=C=\frac{1}{2}$$

Πρέπει να δούμε πάντως αν κάποια από αυτές τις συναρτήσεις ικανοποιούν την αρχική συνθήκη. Παρατηρούμε ότι είναι λύσεις της δ.ε. αλλά δεν είναι λύσεις και του προβλήματος των αρχικών τιμών.

$$\int -\frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{2}\frac{1}{y-1}dy + \int \frac{1}{2}\frac{1}{y+1}dy = \int 0dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln y^{-2} + \frac{1}{2}\ln(y-1) + \frac{1}{2}\ln(y+1) = x+c \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{1-ce^{2x}}}$$

Αμέσως μπορώ και απαλείφω τον κλάδο με το **πλην** αφού θετική για κάθε χ από την αρχική συνθήκη y(0)=1/2 και πρέπει να ικανοποιείται και από τον θετικό κλάδο (η y(0)=1/2).

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=\sqrt{\frac{1}{1-c}} \\ y(0)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c=-3.$$

Άρα η $y(x)=\sqrt{\frac{1}{1-3e^{2x}}}$ είναι λύση του προβλήματος , χ$\in$R.

Παράδειγμα 7: Να βρείτε τις (ή την) λύσεις(η) της δ.ε. $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$ με αρχική συνθήκη y(0)=-1.

Προφανώς η δ.ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών , έτσι έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \Rightarrow 2(Y-1)dy = 3x^2+4x+2dx$$

Και ολοκληρώνοντας την πάνω σχέση έχουμε: $y^2+2y = x^3+2x^2+2x+c$ (1).

Αυτή εδώ είναι η λύση της δ.ε. σε πεπλεγμένη μορφή.

Όμως επιβάλλοντας και την αρχική συνθήκη y(0)=-1 έχουμε ότι c=3.

Άρα η (1) θα γίνει: $y^2+2y = x^3+2x^2+2x+3$, θεωρώντας την σχέση αυτή δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς y ,το λύνουμε και έχουμε: $y = 1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$.

Εδώ προσέχουμε αν εξαιρείται κάποια λύση. Τελικά αυτή με τον **συν** απορρίπτεται αφού y(0)=-1. Οπότε $y = 1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$.

Πρέπει επίσης να μελετήσουμε αν το υπόρριζο είναι θετικό. Πρέπει το Π.Ο. της παραπάνω συνάρτησης να είναι $-2 < x < \infty$ προκειμένου να έχει σημασία ύπαρξης η συνάρτηση.

<u>Γραμμικές εξισώσεις 1ης τάξης</u>:

Έστω y'=f(x,y) . Θα λέμε ότι αυτή η δ.ε. είναι γραμμική όταν η f είναι γραμμική ως προς y.
Άρα: y'(t) + p(t)y(t) = q(t) (*) . Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in I$ οι p,q είναι συνεχείς.

Παρατήρηση:
Όταν το δεξί μέλος της (*) είναι μηδέν , δηλαδή, q(t)=0(ταυτοτικά μηδέν στο I) ,τότε η δ.ε. λέγεται ομογενής. Η ομογενής δ.ε. y'(t) + p(t)y(t)=0 είναι χωριζομένων μεταβλητών.
Δηλαδή: $\frac{dy}{dt} = -p(t)dy, y \neq 0$. *Η συνάρτηση y=0(μηδενική συνάρτηση) είναι πάντα λύση της ομογενής δ.ε.*
Οπότε: $\frac{dy}{dy} = -p(t)dt$ *και ολοκληρώνοντας έχουμε:* $y(t) = ce^{-\int p(t)dt}$ *(γενική λύση).*
Επίσης βλέπουμε ότι για c=0 η μηδενική συνάρτηση ενσωματώνεται στην γενική λύση.
*Αν υπάρχει και κάποιος συντελεστής **a** μπροστά από το y' ,τότε για να εφαρμόσουμε τον τύπο πρέπει προηγουμένως να έχουμε διαιρέσει με το **a**.*

Αν $q(t) \neq 0$ (όχι ταυτοτικά μηδέν στο I) έχουμε:

<u>1ος τρόπος</u>: *Μέθοδος μεταβολής σταθερών ή μεταβολή των παραμέτρων (πολύ χρήσιμη για την επίλυση για δ.ε. ανώτερων τάξεων).*

<u>Μέθοδος</u>:
Μπορούμε να βρούμε την γενική λύση της ομογενούς και προσθέσουμε μία οποιαδήποτε λύση της μη ομογενούς στην ομογενή δ.ε. Δηλαδή , για να βρω την γενική λύση της μη ομογενούς (γραμμικής) αρκεί να βρω τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συν μία οποιαδήποτε λύση της μη ομογενούς. !!! Η λύση αυτή ισχύει **μόνο** για <u>γραμμικές</u> μη ομογενής δ.ε.
Η γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε. είναι της μορφής: $y(t) = y_{ομ}(t) + y^*(t)$.
y(t): γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε.
$y_{ομ}(t)$: γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε.
y*(t): ειδική λύση της μη ομογενούς δ.ε.

Αναζητώ ειδική λύση της y*(t) της μη ομογενούς δ.ε. στη μορφή: $y^*(t) = c(t)e^{-\int p(t)dt}$, δηλαδή, θα επιτρέψουμε στη σταθερά c(t) να μεταβάλλεται ως προς το t και θα πρέπει να προσδιοριστεί.
Αντικαθιστώ στην δ.ε. και υπολογίζω την c(t), οπότε: $c(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)dt}dt$.

Παρατήρηση: Για να βρω τη γενική λύση της μη ομογενούς πρέπει να κάνω 2 υλοποιήσεις.

2ος τρόπος:

y'(t) + p(t)y(t) = q(t) , $\frac{d}{dt}(y'(t)+p(t)y(t))=q(t)$

πρέπει να βρω μία συνάρτηση που να εξαρτάται από το y(t) και το t , έτσι ώστε αν παραγωγίσω να ισούται με την q(t). Τότε μετά από ολοκλήρωση θα έχουμε: $y'(t)+p(t)y(t)=\int q(t)dt+c$.

Κίνητρο για το πώς να σκεφτούμε:

Αν είχαμε p(t)=α(σταθερό)

$$e^{at}(y'+ay)=\frac{d}{dt}(ye^{at})=y'e^{at}+aye^{at}=e^{at}(y'+ay)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή: $\frac{d}{dt}(ye^{at})=e^{at}(y'+p(t)y)=e^{at}q(t),\ p(t)=a$

Και έπειτα ολοκληρώνοντας έχουμε: $ye^{at}=\int e^{at}q(t)dt \Rightarrow y(t)=ce^{-at}+e^{-at}\int e^{at}q(t)dt$.

Δηλαδή αν p(t)=σταθερή τότε προκύπτει: $y'+ay=0 \Rightarrow y(t)=ce^{-at} \Rightarrow y(t)e^{at}=c$

Δηλαδή παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή , τη λύνουμε και παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε e^{at} με τότε θα ισούται με c.

Οπότε η παράγωγος της $\frac{d}{dt}(ye^{at})$=0

$$y'+p(t)y=0$$

$$y(t)=ce^{-\int p(t)dt}$$

$$y(t)ce^{\int p(t)dt}=c$$

Παράδειγμα 1: Να βρείτε τις λύσεις της $y'+2y=e^{-t}$ (*).

Πολλαπλασιάζουμε με e^{2t} την (*), οπότε: $e^{2t}y'+2e^{2t}y=e^{t} \Rightarrow (ye^{2t})'=e^{t}$

και ολοκληρώνοντας έχουμε: $ye^{2t}=\int e^{t}dt+c=e^{t}+c$

και τελικά: $y=e^{-t}+ce^{-2t}$ που είναι ζητούμενη λύση της δ.ε.

Συνέχεια:

$y'+2y=0 \Rightarrow y_{o\mu}(t)=ce^{-2t}$ & $y^*(t)=c(t)e^{-2t}, (y(t)=y_{o\mu}(t)+y^*(t))$

αντικαθιστώ στη ομογενή:

$y'+p(t)y=q(t) \Rightarrow y(t)=e^{-\int p(t)dt}\left\{c+\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt\right\} \Rightarrow M(t)=e^{\int p(t)dt}$ με p,q συνεχείς.

Παράδειγμα 2: Να βρείτε τις λύσεις του προβλήματος: δ.ε: $ty'+2y=4t^2$ (*) με αρχική συνθήκη y(1)=2.

Αρχικά διαιρώ δια του 4 , έτσι η (*) γίνεται: y'+(2/t)y=4t,t>0

$$\mu(t)=e^{\int \frac{2}{t}dt}=t^2$$

Έπειτα $t^2y'+2ty=4t^3, t>0$

$$(t^2y)'=4t^3 \Rightarrow t^2y=\int 4t^3dt+c=t^4+c \Rightarrow y(t)=t^2+\frac{c}{t^2}$$

Όμως: $\left.\begin{array}{l} y(1)=2 \\ y(1)=1+c \end{array}\right\} \Rightarrow c=1$, Άρα η λύση είναι: $y_1(t)=t^2+(1/t^2), t>0$

Παρατήρηση: αν θεωρήσω το όριο $\lim_{t\to 0} y(t)=\infty$, δηλαδή, καθώς το t τείνει στο σημείο ασυνέχειας των συντελεστών , η y τείνει στο ∞.

Έστω ότι στο ίδιο πρόβλημα μας δίνεται αρχική συνθήκη y(1)=1 , τότε c=0 ,Άρα η λύση του προβλήματος είναι: $y_2(t)=t^2, t>0$

Όμως εδώ το $\lim_{t\to 0} y_2=0$,άρα η συμπεριφορά κοντά στο σημείο ασυνέχειας είναι φυσιολογική.

Παράδειγμα 3: Έστω η δ.ε. y'(t) + ky(t)=f(t),t>0 & k=σταθ και f συνεχής στο [0, ∞) με $\lim_{t\to\infty} f(t)=m, m\in R$

- Αν k>0 τότε για κάθε λύση της δ.ε. ισχύει $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=\frac{m}{k}$.
- Αν k<0 τότε υπάρχει **ακριβώς** μία λύση ψ(t) της δ.ε. για την οποία ισχύει: $\lim_{y\to\infty}\psi(t)=\frac{m}{k}$

Παράδειγμα 4: Να βρείτε της λύσης του προβλήματος με δ.ε: $y'+2y=\begin{cases}1, 0\le t\le 1\\ 0, t>1\end{cases}$

και y(0)=0. (Το σημείο t=1 είναι το σημείο ασυνέχειας των συντελεστών)

y' = -p(t)y + q(t) . Αν οι p,q είναι συνεχείς ,τότε και η y' είναι συνεχής.

Στο πρόβλημα που έχουμε η συνάρτηση θα είναι συνεχής αλλά δεν θα έχει συνεχή παράγωγο.

Y'+2y=1 ,t$\in$[0,1] και y(0)=0 (δ.ε στο πρώτο διάστημα)
Και
y'+2y=0,t>1 δεν έχω σε αυτό το διάστημα αρχική συνθήκη (δ.ε στο δεύτερο διάστημα)

Η αρχική συνθήκη θα ανήκει σε ένα από τα δύο διαστήματα.

Η λύση είναι:

$y_1(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}, t\in[0,1]$

Εδώ έχω μία λύση λόγω της αρχικής συνθήκης

$y_2(t)=ce^{-2t}$

Εδώ έχω άπειρες λύσεις

Τώρα θα συγκολλήσω τους δύο κλάδους. Αριστερά έχω μία μόνο συνάρτηση και δεξιά έχω άπειρες συναρτήσεις. Θα δω με ποια από αυτές τις άπειρες συγκολλά το αριστερό μέρος. Δηλαδή, θα βρω το $y_1(1)$ και θα απαιτήσω να ισούται με το $y_2(1)$.

Έχουμε: $y_1(1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^2})$, $y_2(1) = ce^{-2}$ από εδώ η c είναι: $c = \frac{e^2 - 1}{2}$

Οπότε η λύση του προβλήματος είναι η εξής: $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}, 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t}, t > 1 \end{cases}$

Αυτή είναι συνεχής συνάρτηση. Η παραγωγός της όμως δεν είναι συνεχής και ούτε μπορώ να την κάνω συνεχή , λόγω της ύπαρξης του σημείου ασυνέχειας.

<u>Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli</u>:

$y' + p(t)y = q(t)y^{\sigma}, \sigma \in R, p \,\&\, q$ συνεχείς.

Αυτή η εξίσωση δεν είναι γραμμική.
Περιπτώσεις:
1) Αν σ=1 τότε y' + [P(t)-q(t)]y=0 που είναι γραμμική ομογενής δ.ε.
2) Αν σ=0 τότε y' + p(t)y = q(t) γραμμική μη ομογενής δ.ε.

Οπότε $\sigma \in$ R-[0,1]
Χρησιμοποιώ τον μετασχηματισμό $U=y^{1-\sigma}$, δηλαδή, ορίζω μία να συνάρτηση. Τελικά η εξίσωση στην οποία καταλήγω (από κανόνα αλυσίδας) είναι: **U' +(1-σ)p(t)U = (1-σ)q(t)**
Αυτή είναι γραμμική μη ομογενής δ.ε. ως προς U. Άρα βρίσκω πρώτα την U και μετά την y.
Δηλαδή, οι εξισώσεις Bernoulli σε κάθε περίπτωση ανάγονται σε γραμμικές.

Παράδειγμα 1: Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης: $ty' - y = y^2 \ln t$,$t>0$

Αρχικά διαιρούμε με το t , έτσι η εξίσωση θα γίνει: $y' - \frac{1}{t}y = \frac{\ln t}{t}y^2$ (1).

Προφανώς η δ.ε. είναι της μορφής Bernoulli.

Έστω ο μετασχηματισμός $U=y^{1-2}=y^{-1}$, τότε $U' = \frac{dU}{dt} = -\frac{y'}{y^2}, y \neq 0$.

Η y=0 είναι λύση της αρχικής εξίσωσης.

$y'=-y^2U'$, οπότε η (1) γίνεται: $-y^2(U' + \frac{1}{t}\frac{1}{y} - \frac{\ln t}{t}) = 0$,θέλω να γράψω την εξίσωση αυτή ως προς U: $U' + \frac{1}{t}U = -\frac{\ln t}{t}, t > 0$. Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική ως προς U.

Οπότε η γενική λύση της είναι: $U = 1 - \ln t + \frac{c}{t}, t > 0$.

Εμείς όμως θέλουμε την λύση ως προς y. Άρα: $y = \frac{1}{1 - \ln t + \frac{c}{t}}, t > 0$.

<u>Προσοχή</u>: Για να έχει νόημα η λύση πρέπει ο παρανομαστής να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Άρα πρέπει: $1 - \ln t + \frac{c}{t} \neq 0$. Όπως βλέπουμε η μηδενική λύση δεν προκύπτει από αυτό για καμία τιμή του. Άρα η μηδενική λύση είναι επιπλέον λύση.

<u>Άλλη κατηγορία</u>:

Εξισώσεις της μορφής: $\frac{dy}{dt} = F(\frac{y}{t}), t \neq 0$. Η F είναι συνάρτηση της μεταβλητής $\frac{y}{t}$.

Αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται **ομογενής** *(!!! Μην γίνεται σύγχυση με τις ομογενείς γραμμικές)*

Για την εύρεση λύσης σε αυτές τις εξισώσεις χρησιμοποιείται ο εξής μετασχηματισμός:

$$y = tu \Rightarrow u = \frac{y}{t} \Rightarrow y' = F(u)$$

$$y' = u + tu' \Rightarrow F(u) = u + tu' \Rightarrow u' = \frac{f(u) - u}{t} \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t}, F(u) \neq 0$$

Η εξίσωση που προέκυψε είναι δ.ε χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται με την διαδικασία.

Παρατήρηση:
Αν έχουμε την εξίσωση $y'=g(t,y)$ (2) και η συνάρτηση g έχει την ιδιότητα: $g(t,\lambda t)=g(1,\lambda), \lambda \in R$, τότε η εξίσωση είναι **ομογενής** που σημαίνει ότι η (2) μπορεί να γραφεί στη μορφή: $\frac{dy}{dt} = F(\frac{y}{t})$

Παράδειγμα 2: Να βρεθούν οι λύσεις της $y' = \frac{y^2 + 2ty}{t^2}, t \neq 0$

Αυτή η εξίσωση προφανώς είναι μη γραμμική. $y' = \frac{y^2}{t^2} + 2\frac{y}{t}$. Άρα είναι ομογενής γιατί είναι συνάρτηση της $\frac{y}{t} \Rightarrow y' = (\frac{y}{t})^2 + 2\frac{y}{t}$.

Ο μετασχηματισμός που θα χρησιμοποιηθεί είναι:

$$\frac{y}{t} = u \Rightarrow y = ut \Rightarrow y' = u + tu'$$

$$u + tu' = u^2 + 2u \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{du}{u(u+1)} \Rightarrow \frac{dt}{t} = (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du \Rightarrow \ln|t| + \ln|c| = \ln|u| - \ln|u+1| \Rightarrow ct = \frac{u}{u+1} \Rightarrow ct = \frac{\frac{y}{t}}{\frac{y}{t}+1} \Rightarrow y = \frac{ct^2}{1-ct}$$

Αφού το αναλύσουμε σε απλά κλάσματα

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

Βάζοντας όπου το u το ίσον του.

Το c μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν και μάλιστα για c=0 παίρνουμε μηδενική λύση.

<u>Σχόλια</u>:

1) *Ο χώρος των λύσεων μιας ομογενούς γραμμικά δ,ε **1**ης τάξης έχει διάσταση **1** (δηλαδή παράγεται από κάποια συνάρτηση με πολλαπλασιασμό με σταθερές).*
2) *Αν είχα γραμμική ομογενή δ.ε **n**ης τάξης ο χώρος των λύσεων θα έχει διάσταση **n** (δηλαδή μπορούμε να παράγουμε οποιαδήποτε λύση αν έχουμε **n** εξισώσεις.)*

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Να βρείτε τις λύσεις της δ,ε $y' + ay = \int_0^b y(t)dt, y(0) = c$ με $a, b, c \in R$.

(υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα είναι ορισμένο , δηλαδή, στην ουσία είναι ένας σταθερός αριθμός , για τον οποίο αν γνωρίζω το y(t) μπορώ να τον υπολογίσω. Αφού το ολοκλήρωμα είναι σταθερός αριθμός μπορώ να το ονομάσω **κ** και συνεχίζω κανονικά.)

<u>Ακριβείς /Πλήρεις δ.ε</u>:

Για την F(x,y(x)) ορίζεται η παράγωγος: $\frac{dF(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

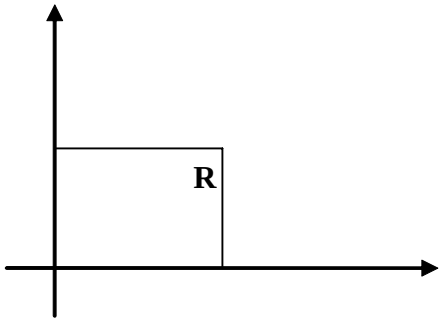
(3) γενική μορφή . M ,N γνωστές συναρτήσεις.

$$\frac{1}{N}\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right\}$$

Μια τέτοια εξίσωση θα λέγεται **ακριβής ή πλήρης** αν υπάρχει μία συνάρτηση G(t,y): η δ.ε να γράφεται: $\frac{d}{dx}G(t, y(t)) = 0$. Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση τότε θα ισχύει ότι αφού η

παράγωγος είναι μηδέν , τότε η κανονική συνάρτηση θα είναι μία σταθερή, δηλαδή, $G(t,y)=c$,c=σταθερά.

<u>Θεώρημα</u>:
Θεωρούμε ένα ορθογώνιο (στο t-y επίπεδο)



Αλλιώς θα μπορούσαμε να ορίσουμε οποιοδήποτε άλλο συνεκτικό σύνολο.

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις : M,N,$\frac{\partial M}{\partial y}$,$\frac{\partial N}{\partial t}$ είναι συνεχείς στο R. Τότε η εξίσωση (3) είναι συνεχής **<u>τότε και μόνον τότε αν</u>** $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$ στο R. Τότε η G σχετίζεται με τις M,N ως εξής: $\frac{\partial G}{\partial t}=M$ και $\frac{\partial N}{\partial y}=N$

<u>Εφαρμογή</u>: Να λυθεί η εξίσωση $y\cos t+2te^{y}+(\sin t+t^{2}e^{y}-1)y'=0$

Ορίζω τις συναρτήσεις: $\begin{matrix} M(t,y)=y\cos t+2te^{y} \\ N(t,y)=\sin t+t^{2}e^{y}-1 \end{matrix}$.Θα ελέγξω αν είναι πλήρης η εξίσωση.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos t+2te^{2}=\frac{\partial N}{\partial t}=\cos t+2te^{2}$, όποτε η δ.ε είναι ακριβής. Υπολογίζω τις:
$\frac{\partial G}{\partial t}=y\cos t+2te^{2}$ και $\frac{\partial N}{\partial y}=\sin t+t^{2}e^{2}-1$ και ολοκληρώνω την $\frac{\partial G}{\partial t}$ ως προς t . Όποτε έχουμε: $G(t,y)=y\sin t+t^{2}e^{2}+h(y)$, όπου h(y) «σταθερά ολοκλήρωσης ως προς t». Έπειτα παραγωγίζω την παραπάνω σχέση ως προς y για να εκμεταλλευτώ και την άλλη σχέση που έχω. Οπότε: $\frac{\partial G}{\partial y}=\sin t+t^{2}e^{y}+\frac{dh}{dy}$ και θα απαιτήσω να είναι και οι δύο εκφράσεις της $\frac{\partial G}{\partial y}$ που έχω να είναι ίσες. Δηλαδή εξισώνω και έχω ότι : h'(y)=1 ,τότε h(y)=y.
Οπότε η γενική λύση της δ.ε σε πεπλεγμένη μορφή είναι:
$y\sin t + t^{2}e^{y} + y = c$

$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$ Θεωρούμε ότι δεν είναι πλήρης.
Τότε θεωρούμε μία συνάρτηση **μ:** μ(M+Ny')=0. Τότε πρέπει για να την κάνω πλήρη να ισχύει για την συνάρτηση αυτή: $\frac{\partial(\mathrm{M})}{\partial y}=\frac{\partial(\mathrm{N})}{\partial t}$. Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται **ολοκληρωτικοί παράγοντες** ή **πολλαπλασιαστές Euler**.

Παίρνω τη διαφορά που κάνει την εξίσωση πλήρη και την διαιρώ με την συνάρτηση N , δηλαδή, $\frac{1}{N}\left\{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right\}$ που σίγουρα δεν είναι μηδέν γιατί αλλιώς θα ήταν πλήρης.

1) Αν $\frac{1}{N}\left\{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right\}$=p(t) δηλαδή είναι συνάρτηση μόνο του t . Τότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας μ=μ(t): μ'(t)=p(t)μ(t).
2) Αν $\frac{1}{M}\left\{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}\right\}$=q(y) δηλαδή είναι συνάρτηση μόνο του y. Τότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας μ=μ(y): μ'(y)=q(y)μ(y).

Ολοκληρωτικός παράγοντας σημαίνει ότι αν πολλαπλασιάσω τη συνάρτηση αυτή με την αρχική εξίσωση τότε θα γίνει πλήρης ή ακριβής η εξίσωση.

Πάραδειγμα 1: Να λυθεί η δ.ε: $(t^2e^y y^4 - t^2y^2 - 3t)\frac{dy}{dt} + 2te^y y^4 + 2ty^3 + y = 0$ (1)

Η παραπάνω μορφή δ.ε μας παραπέμπει σε ακριβή ή πλήρης δ.ε . Όμως θα πρέπει να το ελέγξουμε.

Προκείμενου να είναι η (1) ακριβής πρέπει να ισχύει: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

Ορίζω τις: $N(t,y) = t^2e^y y^4 - t^2y^2 - 3t \;\&\; M(t,y) = 2te^y y^4 + 2ty^3 + y$.

Όμως: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2te^y y^4 - 2ty^2 - 3 \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 8ty^3e^y + 2te^y y^4 + 6ty^2 + 1$. Άρα η (1) είναι μη ακριβής.

Επομένως παίρνω την διαφορά: $\frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}) = ... = -\frac{4}{y}, y \neq 0$ και $q(y) = -\frac{4}{y}$ (2)

Άρα από γνωστό θεώρημα , αφού η (2) είναι συνάρτηση μόνο του y , μπορούμε να βρούμε έναν πολλαπλασιαστή Euler **μ** τέτοιος ώστε πολλαπλασιάζοντας τον με την (1) να μας προκύψει μία νέα δ.ε η οποία θα είναι ακριβής.

Άρα ισχύει: $\frac{d\mu}{dt} = q(t)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = -\frac{4}{y}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{4}{y}dt$ και ολοκληρώνοντας έχουμε: $\mu(y) = ... = e^{\int -\frac{4}{y}dy} = ... = \frac{1}{y^4}, y \neq 0$ και πολλαπλασιάζουμε το **μ** με την (1):

$\frac{1}{y^4}(t^2e^y y^4 - t^2y^2 - 3t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{y^4}(2te^y y^4 + 2ty^3 + y) = 0$ (3).

Η εξίσωση (3) που προέκυψε είναι ακριβής και θα υπολογιστεί με την γνωστή διαδικασία επίλυσης των ακριβών δ.ε.

Άρα πρέπει να υπάρχει μία G(t,y): η λύση της (3) να δίνεται από τον τύπο: G(t,y)=c.

Ορίζω τις: $\frac{\partial G}{\partial t} = M^* + 2te^y + \frac{2t}{y} + \frac{1}{y^3}$ (4) & $\frac{\partial G}{\partial y} = N^* = t^2e^y - \frac{t^2}{y^2} - \frac{3t}{y^4}$ (5)

Ολοκληρώνουμε την (4) ως προς t και έχουμε: $G(t,y) = t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3} + h(y)$ (6).

Παραγωγίζω την (6): $\frac{\partial G}{\partial y} = t^2e^y - \frac{t^2}{y^2} - \frac{3t}{y^4}$ (7) και εξισώνω τις (5) και (7) και προκύπτει ότι:

h'(y)=0. Άρα h(y)=c_1. Οπότε η (6) γίνεται $G(t,y) = t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3} + c_1$ και τελικά η γενική λύση της εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή είναι: $t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3} = c$ και η y=0.

(Αν δεν βρω πολλαπλασιαστή Euler , τότε δεν γνωρίζω να συνεχίσω την διαδικασία επίλυσης της δ.ε.)

Σχόλιο:

Χαμιλτονιανά Συστήματα:

Έστω δύο μεταβλητές x=x(t) και y=y(t) συναρτήσεις του t.

Θεωρώ ότι έχω ένα σύστημα της μορφής: $\begin{cases} x' = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ y' = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$

Η H(x,y) ονομάζεται και χαμιλτονιανή συνάρτηση

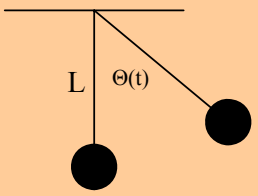
Άρα: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{-\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y}} \Rightarrow \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} = 0$ (*).

Όμως η (*) είναι της μορφής: $N(x,y)\dfrac{dy}{dx} + M(x,y) = 0$ με $N(x.y) = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y}$ & $M(x,y) = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x}$.

Υπολογίζοντας βρίσκουμε ότι: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y \partial x}$.

Άρα η (*) είναι ακριβής και λύνεται με την γνωστή διαδικασία. Δηλαδή από όλα τα Χαμιλτονιανά συστήματα μπορεί να προκύψει ακριβής εξίσωση , την όποια και γνωρίζω να λύνω. (Εύκολος τρόπος υπολογισμού τέτοιων συστημάτων).

Εφαρμογή:



Γενική εξίσωση απλού εκκρεμούς:

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin\theta(t) = 0, \begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = u_0 \end{cases}$$

και αρχικές συνθήκες οι παραπάνω.

Τότε η χαμιλτονιανή συνάρτηση αυτού του συστήματος είναι: $H(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{g}{L}\cos x$.

(*Χρησιμοποιείται πολύ στη φυσική για τον υπολογισμό της ενέργειας , αλλά και στην αρχή διατήρησης της ενέργειας.*)

Επόμενη Σελίδα

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης:

Έστω η: $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=f(t), t\in I(I\in R)$, μία εξίσωση αυτής της μορφής είναι δ.ε 2ης τάξης.

- Αν f(t)=0 τότε η εξίσωση είναι ομογενής.
- Επίσης αν δίνονται και αρχικές συνθήκες $y(t_0)=a$ & $y'(t_0)=b$, $t_0\in I$. Τότε τα παραπάνω αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών*(Προσοχή: στις αρχικές συνθήκες τις παίρνουμε πάντα στο ίδιο σημείο . [κοίτα πάνω].)*

!!! Αν οι p,q,f είναι συνεχείς στο I , τότε το πρόβλημα έχει μία ακριβώς λύση . ***Αυτό ισχύει μόνο στα προβλήματα γραμμικών δ.ε.***

Παρατήρηση:
Αν μας δοθεί μία δ.ε ανώτερης τάξης , τότε μπορώ να την γράψω σαν δ.ε 1ης τάξης μόνο που η συνάρτηση θα είναι διανυσματική (Ισχύει για γραμμικές και μη).

Παράδειγμα 2:

$\vec{u}'(t)=A(t)\vec{u}(t)+\vec{F}(t)$ (1) , όπου A: 2*2 πίνακας και $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\vec{F}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix},\vec{u}'=\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}$

Έστω: $\begin{cases}\vec{u}'(t)=A(t)\vec{u}(t)+\vec{F}(t)\\ \vec{u}(t_0)=\vec{u_0}\end{cases}$ και ορίζω τα εξής:

$$\vec{u}(t)=\begin{bmatrix}y(t)\\y'(t)\end{bmatrix},A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-q(t)&-p(t)\end{pmatrix},\vec{F}(t)=\begin{bmatrix}0\\f(t)\end{bmatrix},\vec{u_0}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Τότε η (1) γίνεται:

$$\begin{pmatrix}y'\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-q(t)&-p(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\kappa\alpha\iota\begin{pmatrix}y(t_0)\\y'(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:
Έστω φ_1 και φ_2 : οι λύσεις της ομογενούς δ.ε. $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$ και c_1 και c_2 : σταθερές.
Αν δοθούν δύο λύσεις , τότε ο αντίστοιχος συνδυασμός τους θα είναι λύση **επίσης** της ομογενούς δ.ε.
Για παράδειγμα: μία λύση μπορεί να είναι: $\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ (λύση λόγω γραμμικότητας)

Ορισμός:
Δύο συναρτήσεις **φ,ψ** λέγονται γραμμικώς εξαρτημένες , αν υπάρχει σταθερά $c\neq 0$:
$\varphi_1(t)=c\varphi_2(t)$ (ή $\varphi_2(t)=c'\varphi_1(t)$)
Οι **φ,ψ** λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητες ,αν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Ορισμός:
Έστω δύο συναρτήσεις που ορίζονται στο ίδιο διάστημα (I) και είναι παραγωγίσιμες εξίσου σε αυτό φ,ψ.

Τότε ισχύει: $W(\phi,\psi) \neq 0, \forall t \in I(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t)$

Η ορίζουσα αυτή καλείται ορίζουσα **Wronski.**

Γραμμικές ομογενείς δ.ε. 2ης τάξης:

Ιδιότητες:

Θεώρημα 1: φ_1, φ_2 γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνον αν $W(\phi_1,\phi_2) \neq 0, \forall t \in I$

Θεώρημα 2: Για φ_1, φ_2 ισχύει: $W'(t) + p(t)W(t) = 0,\ \text{οπου}\ W(\phi_1,\phi_2)(t)$

Από το Θεώρημα 2 προκύπτουν δύο πορίσματα:
Πόρισμα 1: Ισχύει $W(t) = ce^{-\int p(t)dt}, \forall t \in I$.
Πόρισμα 2: Η W είτε μηδενίζεται στο I , είτε δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I (αυτό εξαρτάται από την c).

Θεώρημα 3: φ_1, φ_2 γραμμικώς ανεξάρτητες στο I τότε και μόνον τότε αν υπάρχει κάποιο $t_0 \in I$: $W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$.

[Σχόλιο: αν έχω ένα πρόβλημα αρχικών τιμών ,τότε το t_0 που θα διαλέξω θα είναι εκείνο των αρχικών τιμών (δεν είναι απαραίτητο αυτό , αλλά θα μας βολεύει στους υπολογισμούς.)]

Έστω η γραμμική ομογενής δ.ε $2^{ης}$ τάξης: $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ (1)
Έστω ότι γνωρίζω **μία λύση $\Phi_1(t)$** της δ.ε . Στόχος είναι να βρούμε μία δεύτερη λύση , η οποία να είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την πρώτη.
Υπάρχουν δύο τρόποι για να βρίσκουμε την δεύτερη λύση μιας γραμμικής ομογενούς δ.ε με προϋπόθεση να γνωρίζουμε είδη μία λύση της (**και οι δύο τρόποι αναφέρονται στη μέθοδο υποβιβασμού τάξης**).

$1^{ος}$ τρόπος:
Έστω ότι μας δίνεται η δ.ε (1) και μία λύση της ($\Phi_1(t)$) . Αναζητούμε να βρούμε μία δεύτερη λύση της ($\Phi_2(t)$) η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την $\Phi_1(t)$.

Μεθοδολογία:
Αναζητώ μία δεύτερη λύση της μορφής: $\Phi_2(t)=u(t)\,\Phi_1(t)$: να ικανοποιεί την (1), δηλαδή: $\Phi_2''+p\Phi_2'+q\Phi_2=0$. Όπου Φ_2 θέτουμε το ίσον του (βλέπε πάνω) και έχουμε: $(\Phi_1u)''+p(\Phi_1u)'+q(\Phi_1u)=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Phi_1u'' + (2\Phi_1'+p\Phi_1)u'=0$ (μία «ψευδό$2^{ης}$ τάξης δ.ε. ,γιατί λείπει το u»). Θέτω όπου $u'=u$ και έχουμε: $\Phi_1u' + (2\Phi_1'+p\Phi_1)u=0$ (2). (η (2) είναι γραμμική ομογενής δ.ε $1^{ης}$ τάξης και ο τρόπος επίλυσή της είναι γνωστός).

$2^{ος}$ τρόπος:
Έστω ότι μας δίνεται η δ.ε (1) και μία λύση της $\Phi_1(t)$. Ψάχνω να βρώ και μία δεύτερη λύση $\Phi_2(t)$ η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την $\Phi_1(t)$(η οποία είναι γνωστή). Θα εκμεταλλευτώ τα θεωρήματα της σελίδας 16 για να την δεύτερη λύση.
Από **θεώρημα 2** για τις δύο αυτές λύσεις ισχύει: $W'(t)+p(t)W(t)=0,\ \text{οπου}\ W(\phi_1,\phi_2)(t)$
Και από **πόρισμα 1** γνωρίζω ότι: $W(t)=ce^{-\int p(t)dt}, \forall t\in I$, άρα βρίσκω την ορίζουσα **Wronski** , αφού η p είναι γνωστή από την δ.ε (1). Όποτε από την ορισμό της ορίζουσας **Wronski** ($W(\phi,\psi)\neq 0, \forall t\in I(t), W(\phi,\psi)=\begin{vmatrix}\phi(t) & \psi(t)\\ \phi'(t) & \psi'(t)\end{vmatrix}=\phi(t)\psi'(t)-\phi'(t)\psi(t)$) βρίσκω την $\Phi_2(t)$.

Σχόλιο:
Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης είναι χρήσιμη , όταν έχουμε μη σταθερούς συντελεστές στην δ.ε με προϋπόθεση ότι μας δίνεται πάντα μία λύση της δ.ε.

Παράδειγμα 1: Δίνεται η δ.ε : $y''+\frac{t}{t+1}y'-\frac{1}{t+1}y=0, t>0$ (*) και μία λύση της $\Phi_1(t)=t$. Να βρεθεί η δεύτερη λύση της δ.ε.

Αναζητώ μία δεύτερη λύση της μορφής: $\Phi_2(t)=u(t)\,\Phi_1(t)$ με $\Phi_2'=(tu)'=u+tu'$, $\Phi_2''=(u+tu')'=u'+u'+tu''=2u'+tu''$.
Η Φ_2 ως λύση της δ.ε πρέπει να ικανοποιεί την (*). Άρα αντικαθιστώντας στην (*) τα παραπάνω έχουμε: $2u'+tu''+\frac{t}{t+1}(u+u't)-\frac{1}{t+1}tu=0 \Rightarrow u''+\frac{t^2+2t+2}{t^2+t}u'=0$

Θέτω όπου u''=u: $u'+\frac{t^2+2t+2}{t^2+t}u=0$. Ύστερα από πράξεις έχουμε την λύση της γραμμικής ομογενούς δ.ε 1ης τάξης: $u(t)=-\frac{c}{t}e^{-t}$ και για c=-1 έχουμε: $u(t)=\frac{1}{t}e^{-t}$. Άρα η δεύτερη λύση της (*) είναι: $\boldsymbol{\Phi_2(t)=e^{-t}}$.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η δ.ε: $y''+\frac{2t}{t^2+1}y'-\frac{2}{t^2+1}y=0$ και μία λύση της $\Phi_1(t)=t$. Να βρείτε μία δεύτερη λύση της.

Θεώρημα:
Έστω Φ_1,Φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε : $y''+p(t)y'+q(t)y=0$, για κάθε t το οποίο ανήκει στο I.
Τότε η γενική λύση της δ.ε είναι: $y_{ομ}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$, c_1,c_2 σταθερές.
Ο ΧΩΡΟΣ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ Δ.Ε ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕ ΔΙΑΣΤΑΣΗ 2.

Τι κάνω στην περίπτωση που δεν μου δίνουν την Φ_1;
Υπάρχουν τρόποι να βρω τις λύσεις της δ.ε είτε έχει σταθερούς συντελεστές , είτε όχι.
Παρακάτω δίνεται εφαρμογή(μεθοδολογία) για την εύρεση λύσεων μίας δ.ε με σταθερούς συντελεστές.

Εφαρμογή:
Δίνεται η γραμμική ομογενής δ.ε 2ης τάξης με ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ συντελεστές: $y''+ay'+by=0$ (#) a,b σταθερές. Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης.
(Μεθοδολογία)
Αναζητώ λύσεις της μορφής : $e^{\lambda t}$,σαν λύση θα πρέπει να ικανοποιεί την (#) . Άρα:
$(e^{\lambda t})''+a(e^{\lambda t})'+be^{\lambda t}=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\lambda^2+a\lambda+\beta)e^{\lambda t}=0$
$\lambda^2+a\lambda+\beta=0$ (καλείται χαρακτηριστική εξίσωση ή χαρακτηριστικό πολυώνυμο).
Γενικά η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις: $\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$

1. Αν $\alpha^2-4\beta>0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\in R, \lambda_1\neq\lambda_2$, τότε:
   Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες τις:

$\Phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \Phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

$$W = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_1' & \Phi_2' \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} \neq 0 (\alpha\phi o\upsilon \;\; \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Άρα Φ_1, Φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι: $y_{o\mu}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$, c_1, c_2 σταθερές.

2. Αν $\alpha^2 - 4\beta < 0 \Rightarrow \lambda_1 = \gamma + i\delta, \lambda_2 = \gamma - i\delta, \gamma = -\frac{\alpha}{2}, \delta = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}, \gamma, \delta \in R$, τότε:

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις:

$e^{\lambda_1 t} = e^{(\gamma + \iota\delta)t} = e^{\gamma t}e^{\iota\delta t} = e^{\gamma t}(\cos\delta t + i\sin\delta t)$

$e^{\lambda_2 t} = e^{(\gamma - \iota\delta)t} = e^{\gamma t}e^{-\iota\delta t} = e^{\gamma t}(\cos\delta t - i\sin\delta t)$

Αφού είναι συζυγείς θα ασχοληθώ με μία από αυτές.

$e^{\lambda_1 t} = e^{(\gamma + \iota\delta)t} = e^{\gamma t}e^{\iota\delta t} = e^{\gamma t}(\cos\delta t + i\sin\delta t), \;\; \mu\varepsilon \;\; \Phi_1(t) = e^{\gamma t}\cos\delta t, \Phi_2(t) = e^{\gamma t}\sin\delta t$

!!! Προσοχή: Το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος της παραπάνω λύσης της χαρακτηριστικής εξίσωσης αποτελούν λύσεις της δ.ε και μάλιστα είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητες</u>.

Άρα η γενική λύση της δ.ε είναι: $y_{o\mu}(t) = e^{\gamma t}(c_1\cos\delta t + c_2\sin\delta t)$.

3. Αν $\alpha^2 - 4\beta = 0, \tau o\tau\varepsilon \;\; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{\alpha}{2}. \;\; A\rho\alpha \;\; \Phi(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}$.

Αφού <u>ξέρω μία λύση</u> μπορώ να **κάνω υποβιβασμό τάξης** , έτσι έχουμε:

Η δεύτερη λύση θα είναι της μορφής: $\Phi_2(t) = u(t)\Phi(t) \Rightarrow \ldots \Rightarrow u(t) = t \Rightarrow \Phi_2(t) = te^{-\frac{\alpha}{2}t}$

(Προσοχή: από την κατασκευή τους είναι γραμμικά ανεξάρτητες.)

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί η γενική λύση της $y''-3y'+2y=0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω δ.ε είναι: $\lambda^2-3\lambda-2=0$. Έχει διακρίνουσα θετική , οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$

Άρα οι λύσεις της δ.ε είναι: $\Phi_1(t)=e^t$ και $\Phi_2(t)=e^{2t}$.

Συνεπώς η γενική λύση της δ.ε είναι: $y_{o\mu}(t)=c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί η γενική λύση της $y''+y'+y=0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω δ.ε. είναι: $\lambda^2+\lambda+1=0$. Έχει διακρίνουσα αρνητική , οπότε έχει δύο μιγαδικές ρίζες.

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Άρα οι λύσεις της δ.ε είναι: $\Phi_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $\Phi_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

Συνεπώς η γενική λύση της δ.ε είναι: $y_{o\mu}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$.

Παράδειγμα 4: Να βρείτε την γενική λύση της y''+4y+4=0.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω δ.ε. είναι: $\lambda^2+4\lambda+4=0$. Έχει διακρίνουσα μηδέν , οπότε έχει μία ρίζα.

Η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: $\lambda=-2$, άρα $\Phi_1(t)=e^{-2t}$ και $\Phi_2(t)=t\ e^{-2t}$ (βλέπε εφαρμογή σελίδα 19).
Συνεπώς η γενική λύση της δ.ε είναι: $y_{o\mu}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$.

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί η γενική λύση της Y''+9Y=0.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω δ.ε. είναι: $\lambda^2+9=0$. Έχει διακρίνουσα αρνητική , οπότε έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: $\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$
Συνεπώς η γενική λύση της δ.ε είναι: $y_{o\mu}(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t=A\sin(3t+\varphi)$, όπου $A=\sqrt{c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}}$ και $\varphi=\arctan\frac{c_1}{c_2}$.
Η γενική λύση της εξίσωσης περιγράφει ένα κύμα με πλάτος (A) και αρχική φάση (φ).

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Δίνεται η δ.ε y''+αy'+βy=0 , α,β σταθερές. Να δειχθεί ότι: $\lim_{t\to\infty} y_{o\mu}(t)=0$.

[Υποδείξεις: Αφού η δ.ε είναι σε γενική μορφή θα πάρω τρεις περιπτώσεις (ανάλογα με το τη είναι η διακρίνουσα). Αφού θα έχω τριώνυμο θα χρησιμοποιήσω τους τύπους του Vietta (άθροισμα:$S_1 + S_2 = -(\beta/\alpha)$ & γινόμενο: $S_1\ S_2=\gamma/\alpha$, όπου S_1 ,S_2 ρίζες του τριωνύμου.)]

Παρακάτω θα αναφερθούμε σε μία κλάση δ.ε με ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ συντελεστές που ανάγονται σε εξισώσεις με ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ συντελεστές.

Εφαρμογή:
Δίνεται η γραμμική ομογενής δ.ε $2^{ης}$ τάξης με ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ συντελεστές: $t^2y''+\alpha ty'+\beta y=0$ (&) (καλείται δ.ε Euler) με α,β σταθερές. Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε .

Μεθοδολογία:
Θέτω $t=e^s$ (ή $s=\ln t, t>0$).
Θα μετασχηματίσω την (&) ως προς (s).

$$y'=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dy}{ds}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dy}{ds}=\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{t^2}\frac{dy}{ds}$$

Άρα η (&) θα γίνει: $\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{ds}+\beta y=0$ (&&) η διαφορική εξίσωση που προέκυψε είναι προφανές ότι έχει σταθερούς συντελεστές. !!! εδώ η y είναι συνάρτηση του s και όχι του t.

Χαρακτηριστική εξίσωση της (&&) είναι: $\lambda^2+(\alpha-1)\lambda+\beta=0$.

1) Αν η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι θετική τότε έχει δύο πραγματικές ρίζες λ_1,λ_2 (διαφορετικές) : η γενική λύση της (&&) να είναι: $y_{o\mu}(s)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$.
   Με $\Phi_1(s)=e^{\lambda_1 s}$, $\Phi_2(s)=e^{\lambda_2 s}$. Άρα $\Phi_1(t)=e^{\lambda_1\ln t}=t^{\lambda_1}$, $\Phi_2(t)=e^{\lambda_2\ln t}=t^{\lambda_2}$.
   Άρα η γενική λύση της (&) είναι: $y_{o\mu}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$.

2) Αν η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι αρνητική τότε έχει δύο μιγαδικές ρίζες $\lambda_1=\gamma+i\delta,\lambda_2=\gamma-i\delta$ (συζυγείς): $\Phi_1(s)=e^{\gamma s}\cos\delta s$, $\Phi_2(s)=e^{\gamma s}\sin\delta s$ και αντίστοιχα έχουμε: $\Phi_1(t)=t^{\gamma}\cos(\delta\ln t)$, $\Phi_2(t)=t^{\gamma}\sin(\delta\ln t)$.

3) Αν διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μηδέν τότε έχει μία διπλή ρίζα πραγματική ρίζα λ: $\Phi_1(s)=e^{\lambda s}$, $\Phi_2(s)=se^{\lambda s}$ και αντίστοιχα έχουμε: $\Phi_1(t)=t^{\lambda}$, $\Phi_2(t)=(\ln t)t^{\lambda}$.

Γραμμικές Μη Ομογενείς δ.ε 2ης τάξης:

Γενική μορφή των εξισώσεων αυτών είναι: $\mathbf{y''+p(t)y'+q(t)y=f(t)}$ με μη σταθερούς συντελεστές.

Η αντίστοιχη ομογενής δ.ε της παραπάνω δ.ε είναι: $\mathbf{y''+p(t)y'+q(t)y=0}$.
Έστω $\Phi_1(t)$ και $\Phi_2(t)$: γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς δ.ε.
Τότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης δίνεται από τον τύπο: $y_{ομ}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$.

Θεώρημα:
Αρχικά βρίσκω την αντίστοιχη ομογενή δ.ε της μη ομογενούς και ψάχνω για δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της [$\Phi_1(t)$ και $\Phi_2(t)$]. Έστω η $y^*(t)$ μία λύση της μη ομογενούς δ.ε , τότε η γενική λύση της δ.ε δίνεται από τον τύπο: $\mathbf{y(t)=y_{ομ}(t)+y^*(t)}$. (Όπου $y_{ομ}(t)$ η λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε.).

~~ Υπάρχουν δύο μέθοδοι για να βρούμε της λύση (y(t)) της μη ομογενούς δ.ε ~~

Παρατήρηση:
Αν y_1 , y_2 είναι λύσεις της μη ομογενούς δ.ε , τότε η διαφορά τους: $y(t)= y_1(t)-y_2(t)$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε [Η παρατήρηση ισχύει για γραμμικές δ.ε οποιασδήποτε τάξης] .

1η μέθοδος (« LAGRANGE» ή μεταβολής των σταθερών):

Έστω η φραμμική μη ομογενής δ.ε 2ης τάξης : $y''+p(t)y'+q(t)y=f(t)$

Έστω Φ_1 και Φ_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε.
Η γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε είναι: $y(t)=y_{ομ}(t)+y^*(t)$, με $y_{ομ}(t)=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2$ και $y^*(t)$ να είναι μία ειδική λύση της μη ομογενούς δ.ε .

Αναζητώ μία ειδική λύση της μη ομογενούς δ.ε με μορφή: $y^*(t)=c_1(t)\ \Phi_1(t)+c_2(t)\ \Phi_2(t)$, όπου οι $c_1(t)$, $c_2(t)$ πρέπει να προσδιοριστούν.
Επειδή θέλω η $y^*(t)$ να είναι λύση της μη ομογενούς δ.ε , θα πρέπει να την υποχρεώσω να την ικανοποιεί.
Κάνοντας αντικατάσταση και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στο εξής σύστημα:

$$\begin{cases} c_1'(t)\Phi_1(t)+c_2'(t)\Phi_2(t)=0 \\ c_1'(t)\Phi_1'(t)+c_2'(t)\Phi_2'(t)=f(t) \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα μη ομογενές σύστημα με άγνωστα τα $c_1(t)$ & $c_2(t)$.

Και η ορίζουσα Wroski των συντελεστών είναι ταυτόσημα μη μεδενική αφού οι Φ_1 και Φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τη αντίστοιχης ομογενούς δ.ε .

Από τη διαδικασία επίλυσης του Συστήματος έχουμε:

$$c_1(t) = -\int \frac{\Phi_2(t) f(t)}{W(\phi_1,\phi_2)(t)} dt \quad \kappa\alpha\iota \quad c_2(t) = \int \frac{\Phi_1(t) f(t)}{W(\phi_1,\phi_2)(t)} dt$$

Τελικά έχουμε ότι: $y^*(t) = \int \frac{\Phi_1(s)\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\Phi_2(s)}{W(\phi_1,\phi_2)(s)} f(s) ds \longrightarrow$ Συνάρτηση Green

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί η γενική λύση της $t^2(t+2)y''+2ty'-2y=(t+2)^2$, $t>0$

Έστω $\Phi_1(t)=t$ & $\Phi_2(t)=-1-1/t$ οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε $t^2(t+2)y''+2ty'-2y=0$

Η γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε είναι: $y(t)=c_1t+c_2(-1-1/t)+y^*(t)$, με $y^*(t)=c_1(t)t+c_2(-1-1/t)$.

Προσοχή: διαιρώ με τον συντελεστή του y'' , γιατί πρέπει να έχει μπροστά του το 1 (ως συντελεστή).

Προκύπτει το Σύστημα: $\begin{cases} c_1'(t)\Phi_1(t) + c_2'(t)\Phi_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\Phi_1'(t) + c_2'(t)\Phi_2'(t) = \dfrac{t+2}{t^2} \end{cases}$

Λύνοντας το Σύστημα έχουμε: $c_1(t)=\ln t-1/t$ και $c_2(t)=t$. Άρα $y^*(t)=t\ln t-1-t-1=t(\ln t-1)-2$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε εξίσωσης $t^2(t+2)y''+2ty'-2y=(t+2)^2$, $t>0$, αν γνωρίζετε ότι η μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε είναι η $\Phi_1(t)=t$.

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί η γενική λύση της $y''+\omega^2y=f(t)$.

Η αντίστοιχη ομογενής δ.ε είναι: $y''+\omega^2y=0$ με $y_{o\mu}(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$, $\Phi_1(t)=\cos\omega t$ και $\Phi_2(t)=\sin\omega t$.

Εύρεση ειδικής λύσης της μη ομογενούς δ.ε : $y^*(t)=c_1(t)\cos\omega t + c_2(t)\sin\omega t$.

Προκύπτει το Σύστημα: $\begin{cases} c_1'(t)\Phi_1(t) + c_2'(t)\Phi_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\Phi_1'(t) + c_2'(t)\Phi_2'(t) = f(t) \end{cases}$

Μετά από πράξεις…

$$y^*(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\sin[\omega(t-s)]ds .$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι: $y(t)=y_{o\mu}(t)+y^*(t)$.

<u>2η μέθοδος (μέθοδος των απροσδιόριστων)</u>:

Έστω η μη ομογενής δ.ε $y''+ay'+by=f(t)$, όπου a,b:σταθερές και f(t):ειδικής μορφής.

Έστω Φ_1 και Φ_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε $y''+ay'+by=0$ και $y^*(t)$: ειδική λύση της μη ομογενούς δ.ε (η μορφή της εξαρτάτα από την μορφή της f(t)).

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την μορφή της $y^*(t)$ που πρέπει να αναζητήσουμε , άναλογα με την μορφή της f(t).

Μορφή της f(t)	Μορφή της y*(t)	Είδη συναρτήσεων
$\sum_{k=0}^{N} a_k t^k e^{mt}$	$\sum_{k=0}^{N} b_k t^k e^{mt}$,b_k άγνωστο	πολυώνυμα, εκθετικές , συνδυασμός αυτών.
$\sum_{k=0}^{N} a_k t^k e^{mt} \cos pt$	$\sum_{k=0}^{N} b_k t^k e^{mt} \sin pt + \sum_{k=0}^{N} c_k t^k e^{mt} \cos pt$,b_k , c_k άγνωστα	Πολυώνυμα, εκθετικές , συνημίτονα και συνδυασμός αυτών.
$\sum_{k=0}^{N} a_k t^k e^{mt} \sin pt$		Πολυώνυμα, εκθετικές , ημίτονα και συνδυασμός αυτών.

!!!Παρατήρηση:

Αν τύχει η y*(t) να συμπίπτει με μία (ή και με τις δύο) από τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε τότε πολλαπλασιάζω την y*(t) με t (ή και με t^2 έπειτα[αντίστοιχα]) ώστε να προκύψει μία λύση διαφορετική από αυτή (ή αυτές) της αντίστοιχης ομογενούς.

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί η γενική λύση της $y''+y'+y=t^2$.

Η αντίστοιχη ομογενής δ.ε είναι: $y''+y'+y=0$ με χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2+\lambda+1=0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Phi_1(t) = e^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\Phi_2(t) = e^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Η $f(t)=t^2$ (είναι της μορφής $\sum_{k=0}^{N} a_k t^k e^{mt}$ με m=0,N=2,$a_0=a_1=0$και$a_2=1$)

Άρα σύμφωνα με την 2η μέθοδο αναζητώ μία λύση της μη ομογενούς δ.ε με μορφή $\sum_{k=0}^{N} b_k t^k e^{mt}$

Άρα $y^*(t)=b_2t^2+b_1t+b_0$. Αντικαθιστώ την y*(t) στην μη ομογενής δ.ε έχοντας:

$y^{*\prime}(t)=2\, b_2t+ b_1$ και $y^{*\prime\prime}(t)=2\, b_2$

$2\, b_2+ b_1+2\, b_2t+ b_0+ b_1t+ b_2t^2= t^2$

Άρα $2\, b_2+ b_1+ b_0=0$, τότε $b_0=0$

$2\, b_2+ b_1=0$, τότε $b_1=-2$ και $b_2=1$

Άρα αντικαθιστώντας στην y*(t) έχουμε: $y^*(t)=t^2-2t$

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί η γενική λύση της $y''-4y'+4y=e^{2t}$

Η αντίστοιχη ομογενής δ.ε είναι: $y''-4y'+4y=0$ με $\lambda^2-4\lambda+4=0$, $\lambda=2^{-t}$

Άρα $\Phi_1(t)=e^{2t}$ και $\Phi_2(t)=te^{2t}$. Άρα $y_{o\mu}(t)=c_1 e^{2t}+c_2 te^{2t}$.

Η $f(t)=e^{2t}$. Αναζητώ λύση της μη ομογενούς δ.ε της μορφής: $y^*(t)=b_0e^{2t}$ (αλλά συμπίπτει με μία από τις λύσεις της ομογενούς). Πολλαπλασιάζω με **t** . Άρα $y^*(t)=b_0te^{2t}$ (ομοίως πάλι). Πολλαπλασιάζω με $\mathbf{t^2}$. Άρα $y^*(t)=b_0t^2e^{2t}$. Αντικαθιστώ στην μη ομογενή δ.ε και έχω τελικά: $y^*(t)=1/2\, t^2e^{2t}$. Άρα η γενική λύση είναι: $y(t)= c_1 e^{2t}+c_2 te^{2t}+1/2\, t^2e^{2t}$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί η γενική λύση της: $y''+\omega^2 y=\cos at$, ω,α:σταθερές.

[Υπόδειξη: Αν $a^2=\omega^2$, τότε η $y^*(t)$ συμπίπτει με μία από τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. Άρα θα πάρω δύο περιπτώσεις αν ισχύει: $a^2=\omega^2$ και αν όχι.]

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών με : $y''-y'-2y=4e^{-t}$ και αρχικές συνθήκες $y(0)=a$, $y'(0)=b$. Να βρεθεί μια αναγκαία και ικανή συνθήκη , τέτοια ώστε η λύση της μη ομογενούς δ.ε να είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Σχόλιο: Η λύση της μη ομογενούς δ.ε θα περιέχει: e^{-t} ,e^{2t},te^{-t} με κάποιους συντελεστές μπροστά. Οι e^{-t}, te^{-t} είναι φραγμένες. Όμως η e^{2t} δεν είναι φραγμένη , οπότε θα πρέπει ο συντελεστής της (μπροστά) να είναι μηδέν (0).

<u>Συστήματα γραμμικών δ.ε 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.</u>

Ένα τέτοιο σύστημα έχει γενική μορφή:

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{f}(t),\ \ \vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots\dots \\ y_n(t) \end{bmatrix},\ \ \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \mu\varepsilon\ f\ \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\ \ \sigma\tau o\ \ I \in R,\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \mathrm{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{nxn}}\ \ \mu\varepsilon\ \ a_{1j} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Έστω ότι έχουμε και αρχικές συνθήκες , τότε η μορφή του συστήματος θα είναι:

$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{f}(t)$ με $\vec{y}(t_o) = \vec{y}_o, \vec{y}_o \in R^n$.

Ότι γνωρίζουμε για την δ.ε 2ης τάξης ισχύουν και εδώ. (ανάγονται σε δ.ε εξισώσεις 1ης τάξης , όμως είναι διανυσματικές)

Αρχικά θα ασχοληθούμε γραμμικά συστήματα ομογενών δ.ε 1ης τάξης με γενική μορφή:
$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), A \in R^{nxn}$.

Υπενθύμιση από γραμμική άλγεβρα:

Έστω ένας πίνακας Α πραγματικός.
Με ιδιοτιμή: $\lambda \in C$
Με ιδιοδιάνυσμα: $\vec{u} \in C^n - \{0\}$ (το ιδιοδιάνυσμα είναι εξ'ορισμού μη μηδενικό)

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow (A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$$

Το ιδιοδιάνυσμα είναι δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο , όλα τα πολλαπλάσια του ιδιοδιανύσματος είναι επίσης ιδιοδιανύσματα.

Π.χ $\quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \& \vec{u}' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\vec{u}$

Το det(A-λI_n)=0 (χαρακτηριστική εξίσωση)
Με την παραπάνω εξίσωση βρίσκω τις ιδιοτιμές του πίνακα Α , δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του Α.

Έστω λ: ιδιοτιμή του Α και $\aleph$: $\iota\delta\iota o\chi\omega\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ \lambda \equiv \{\vec{u} \in C^n - \{0\}\} : A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ και περιλαμβάνει ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.

d:=dim$\aleph$ ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της λ (Δηλαδή είναι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της λ.)

τ: ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα: είναι η δύναμη στην οποία εμφανίζεται μία ιδιοτιμή.

<u>Πάντα</u> ισχύει: $1 \le d \le \tau$

Με βάση την τελευταία παρατήρηση οι πίνακες διακρίνονται σε:

a. Πίνακες απλής δομής: αν για όλες τις ιδιοτιμές ενός πίνακα Α ισχύει **d=τ.**
b. Πίνακες μη απλής δομής: αν υπάρχει έστω και μία ιδιοτιμή ενός πίνακα Α για την οποία ισχύει **d<τ.**

Μας δίνεται το ομογενές γραμμικό σύστημα: $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), A \in R^{nxn}$

Αρχικά ψάχνω να βρω αν υπάρχουν εκθετικές λύσεις , δηλαδή λύσεις της μορφής: $e^{\lambda t}\vec{u},\ \vec{u} = \sigma\tau\alpha\theta$ και θα καταλήξουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση: $e^{\lambda t}(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0},\ \lambda : \iota\delta\iota o\tau\iota\mu\eta,\ \vec{u} = \iota\delta\iota o\delta\iota\alpha\nu\upsilon\sigma\mu\alpha$. **Πρέπει να βρούμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.**

Παράδειγμα 1:

Να βρεθούν οι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος: $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), A \in R^{3x3}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1ον. Εύρεση ιδιοτιμών του Α από την χαρακτηριστική εξίσωση: det(A-λI$_3$)=0

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, τότε (1-λ)(λ-3)(λ+2)=0

Άρα οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-2$. Είναι και οι τρεις απλές ιδιοτιμές , άρα ο πίνακας Α είναι απλής δομής(αφού $d_1=1$ και $\lambda_1=1$ κ.ο.κ)

2ον. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων:

Για την $\lambda_1=1$, έχουμε

$\vec{u}_1,\quad A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 \Rightarrow A\vec{u}_1 = 1\vec{u}_1 \Rightarrow (A - I_3)\vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -u_{12} + 4u_{13} = 0 \\ 3u_{11} + u_{12} - u_{13} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_{11} = -u_{12}$$

$$2u_{11} + u_{12} - 2u_{13} = 0$$

$\text{Αρα} : u_{12} = 4u_{13}$

Ορίζω : $u_{11}=-1$ αυθαίρετα τότε αναγκαστικά $u_{12}=4$, $u_{13}=1$. Άρα $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, αυτό το ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$. Άρα η πρώτη λύση του συστήματος είναι: $\vec{\Phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ομοίως βρίσκουμε για την $\lambda_2=3$, έχουμε $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\Phi}_2(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ και για την $\lambda_3=-2$,

έχουμε $\vec{u}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\Phi}_3(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν διαφορετικά <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> ιδιοδιανύσματα. Οι λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικά <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> ιδιοδιανύσματα είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητες</u>. Οπότε η γενική λύση του ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι: $\vec{y}_{o\mu}(t)=C_1\vec{\Phi}_1(t)+C_2\vec{\Phi}_2(t)+C_3\vec{\Phi}_3(t)$.

Παράδειγμα 2:

Να βρεθούν οι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος: $\vec{y}'(t)=A\vec{y}(t), A\in R^{3x3}$, όπου $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι $(1-\lambda)^2(2-\lambda)=0$.
$\lambda_1=1$, $\tau_1=2$, αν και $d_1=2$ τότε ο πίνακας A είναι απλής δομής.
$\lambda_2=2$, $\tau_2=1$, $d_2=1$.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_2=2$ είναι: $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\Phi}_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Για την $\lambda_1=1$: πρέπει να ισχύει:

$$(A-\lambda I_3)\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases}-u_3=0\\0=0\\u_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\0\end{pmatrix}. \quad \text{Αρα ορίζω αυθεραιτα } \vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Άρα η $d_1=2$ και ο πίνακας είναι απλής δομής.

Οι λύσεις που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ είναι:

$$\vec{\Phi}_1(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{\Phi}_2(t)=e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Έστω ο πίνακας $A \in R^{nxn}$, $\lambda = \iota\delta\iota o\tau\iota\mu\eta, \lambda \in C(\lambda = \alpha \pm i\beta)$ (δηλαδή όταν έχουμε μία μιγαδική ιδιοτιμή τότε θα έχουμε και τη συζυγή της).

$(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}_1 + i\vec{u}_2 \quad \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in R^n \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota \quad \sigma\tau\eta \quad \lambda$

$O\mu o\iota\omega s \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau\eta\nu \quad \bar{\lambda} : \bar{\vec{u}} = \vec{u}_1 - i\vec{u}_2$

$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) \;, \lambda = \iota\delta\iota o\tau\iota\mu\eta \quad \kappa\alpha\iota \quad \vec{u} = \iota\delta\iota o\delta\iota\alpha\nu\upsilon\sigma\mu\alpha \;\Rightarrow\; \vec{\Phi}(t) = e^{\lambda t}\vec{u} = \vec{\Phi}_1(t) + i\vec{\Phi}_2(t)$

$\alpha\nu \quad \pi\alpha\iota\rho\nu\alpha\mu\varepsilon \quad \tau\eta\nu \quad \bar{\lambda} : \; \bar{\vec{\Phi}}(t) = \vec{\Phi}_1(t) - i\vec{\Phi}_2(t)$

Δηλαδή από μία ιδιοτιμή λ (μιγαδική) παίρνουμε δυο <u>πραγματικές γραμμικά ανεξάρτητες</u> λύσεις.

Παράδειγμα 3:

Να Βρεθούν οι λύσεις του $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), A \in R^{2x2}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(A - \lambda \mathrm{I}_2)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathrm{I}_2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} -3-(2+i) & 2 \\ -1 & -1-(-2+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1+i}{2}u_1$$

$\delta\iota\alpha\lambda\varepsilon\gamma\omega \quad \alpha\upsilon\theta\varepsilon\rho\alpha\iota\tau\alpha : u_1 = 2 \Rightarrow u_2 = 1 + i$

$$\vec{\Phi}(t) = e^{\lambda t}\vec{u} = e^{(-2+i)t}\vec{u} = e^{-2t}e^{it}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-2t}(\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = e^{-2t}\left\{\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}\right\}$$

$$\vec{\Phi}_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi}_2(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$A\rho\alpha : \vec{y}_{o\mu}(t) = C_1\vec{\Phi}_1(t) + C_2\vec{\Phi}_2(t)$

<u>Πίνακες μη απλής δομής</u>

<u>Υπενθύμιση:</u> $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t}{2!} + \frac{a^3 t}{3!} + \ldots \;, a \in R$

Κατά απόλυτη αντιστοιχία ορίζεται το:

$e^{At} = I_n - At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \ldots \quad , A \in R^{nxn}(\pi\iota\nu\alpha\kappa\alpha s)$. <u>Αποδεικνύεται ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε **t** που ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς.</u>

<u>Ισχύουν:</u>

$(e^{At})' = Ae^{At}$

$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$

$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \Leftrightarrow AB = BA$

$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{u}$, αναζητώ λύσεις αυτής της μορφής.
$\vec{y}'(t) = Ae^{At}\vec{u} = A\vec{y}(t)$

Μεθοδολογία:
Έστω το σύστημα $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$
$e^{At}\vec{u} : \lambda\upsilon\sigma\eta \Rightarrow e^{At}\vec{u} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda \mathrm{I}_n)t}\vec{u}$, $\lambda, \vec{u} : \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha$

$$e^{(A-\lambda \mathrm{I}_n)}\vec{u} = \vec{u} + t(A-\lambda \mathrm{I}_n)\vec{u} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda \mathrm{I}_n)^{m-1}\vec{u}, m \in N$$

Αν λ: ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}$. τ: αλγεβρική πολλαπλότητα της λ.
Ισχύει: τ=dim(ker(A-λI_n)$^{\mu}$), $\ker B = \left\{\vec{u} : B\vec{u} = \vec{0}\right\}$

Έννοιες:
1. Απλό ιδιοδίανυσμα της ιδιοτιμής λ: $\vec{u} \neq \vec{0} : (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\vec{u} = \vec{0}$
2. Γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ: $\vec{w} \neq \vec{0} : (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^2\vec{w} = \vec{0}$ $\kappa\alpha\iota$ $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\vec{w} \neq \vec{0}$

Παράδειγμα 4:

Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος: $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Πρέπει να βρούμε τις ιδιοτιμές του A: det(A-λI_3)=0
$(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
$\lambda_1=1$, $\tau_1=2$
$\lambda_2=2$, $\tau_2=1$ άρα $d_2=1$
Πρέπει να ελέγξω αν ο πίνακας είναι απλής δομής (δηλαδή, πρέπει $d_1=2$)

Για την λ_2: $(A-2\mathrm{I}_3)\vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\Phi}_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για την λ_1:

$$(A-\mathrm{I}_3)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}\sigma\tau\omega \;\; u_1 = 1 : \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\Phi}_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή $d_1=1 < t_1=2$, ο πίνακας είναι μη απλής δομής . Άρα πρέπει να βρω και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 2.

$$(A-\lambda I_3)^2\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow w_3=0\Rightarrow\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\0\end{pmatrix}.$$

$$\text{Ισχυει}:(A-\lambda I_3)\vec{w}\neq\vec{0}$$

Αυθαίρετη επιλογή: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ η $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Το $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ απορρίπτεται αφού είναι απλό ιδιοδιάνυσμα.

Άρα $\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$\vec{\Phi}_2(t)=e^{\lambda t}\left\{\vec{w}+t(A-\lambda I_3)\vec{w}\right\}=e^t\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 5:

Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος: $\vec{y}'(t)=A\vec{y}(t)$, $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$

Ιδιοτιμή: det(A-λI_3)=0 , τότε $(\lambda-2)^3=0$, άρα λ=2 (με τ=3)

Ιδιοδιάνυσμά: $(A-2I_3)\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{\Phi}_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα χρειαστούμε δύο γενικευμένα ιδιοδιανύσματα το πρώτο θα είναι $2^{ης}$ τάξης και το άλλο θα είναι $3^{ης}$ τάξης.

$$(A-2I_3)^2\vec{w}=\vec{0}\ \&\ (A-2I_3)\vec{w}\neq\vec{0}\Rightarrow\cancel{\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}\ \eta\ \vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{\Phi}_2(t)=e^{2t}\left\{\vec{w}+t(A-2I_3)\vec{w}\right\}=e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I_3)^3\vec{v}=\vec{0}\ \&\ (A-2I_3)^2\vec{v}\neq\vec{0}\Rightarrow\cancel{\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}\ \eta\ \cancel{\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}\ \eta\ \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{\Phi}_3(t)=e^{2t}\left\{\vec{v}+t(A-2I_3)\vec{v}+\frac{t^2}{2!}(A-2I_3)^2\vec{v}\right\}=e^{2t}\begin{pmatrix}3t-\frac{t^2}{2}\\-t\\1\end{pmatrix}$$

!!! Γενικά με αυτήν την διαδικασία παίρνουμε τις λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος , ανεξαρτήτως αν πίνακας είναι απλής δομής ή μη απλής δομής.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

$(a,b) \in C, a,b \in R$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Το (0,0) είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το (1,0) είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Ο αντίστροφος ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού: $\frac{1}{Z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

Προσοχή:
!!! Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δεν **ορίζεται** διάταξη.

Το i=(0,1) είναι η **φανταστική μονάδα**.

$R \ni a \mapsto (a,0) \in C$

$i^2=(0,1)(0,1)=-(1,0)=-1$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι ισόμορφο με αυτό των πραγματικών.

Παίρνω το αριθμό (a,b)=a+bi, x,y,a,b$\in$R

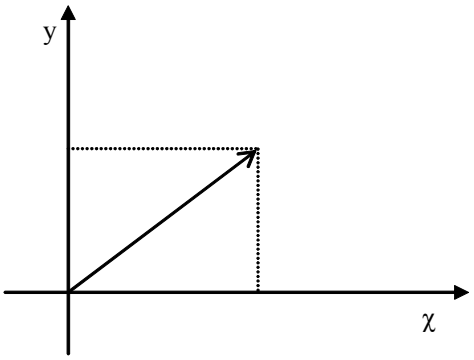
$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ y=\dfrac{b}{2x} \end{cases}$$

$(x+iy)^2=a+ib$, τότε: $4x^4-4ax^2-b^2=0 \Rightarrow \ldots$

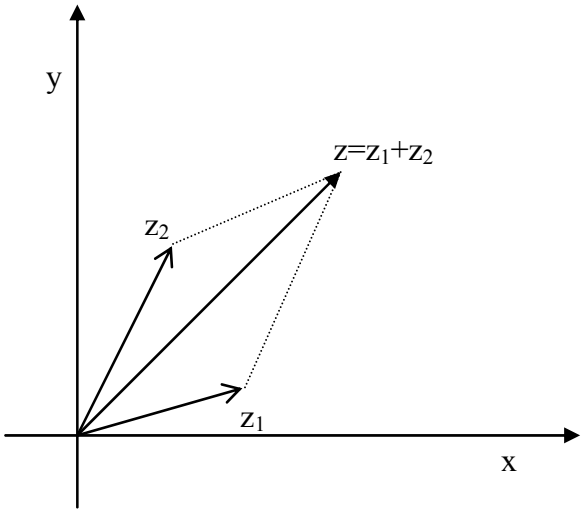
$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$az^2+bz+c=0$, αυτό τα πολυώνυμο έχει ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών.
Π.χ Το πολυώνυμο $x^2+1=0$ (έχει ρίζες στο μιγαδικό σύνολο).

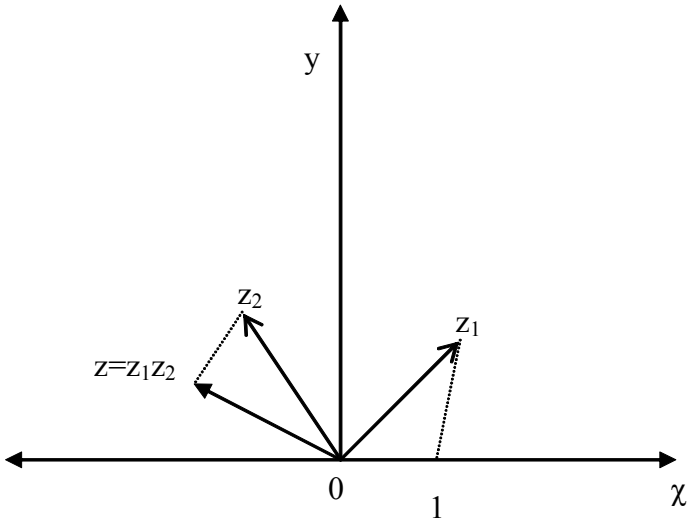
<u>Παρατήρηση</u>: Τα μιγαδικά πολυώνυμα έχουν **πάντα** ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών , ενώ τα πραγματικά πολυώνυμα μπορούν να έχουν ρίζες και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.



z=x+iy, x,y $\in$R
x= Re(z) , y= Im(z)



Πρόσθεση 2 μιγαδικών αριθμών

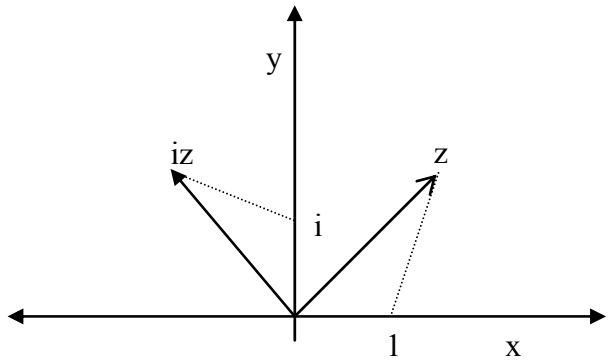


Πολλαπλασιασμός 2 μιγαδικών αριθμών.

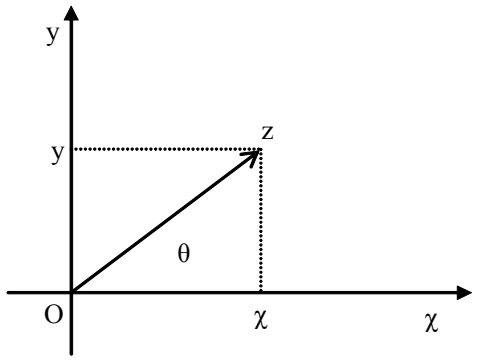
Όμοιο τρίγωνο (με τον ίδιο προσανατολισμό) $z_2 \to 1$

Ειδική περίπτωση πολλαπλασιασμού:

Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει γεωμετρικά το γινόμενο i*z:



Αν πολλαπλασιάσω έναν μιγαδικό αριθμό με το i , τότε τον στρέφω κατά 90 μοίρες αντίθετα από την φορά του ρολογιού.



Το θ=argz: όρισμα του z

$|z|$= μέτρο του z

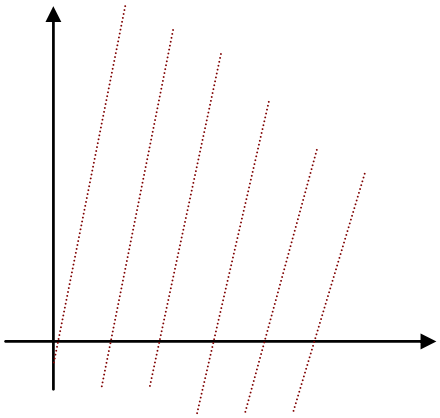
Για κάθε z=x+yi , υπάρχει αντιστοίχως $\overline{z}$ =x-yi με z, $\overline{z} \in C$ και x,y$\in$R.

Το $|z| := \sqrt{z * \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Αν πάρω τις σχέσεις:

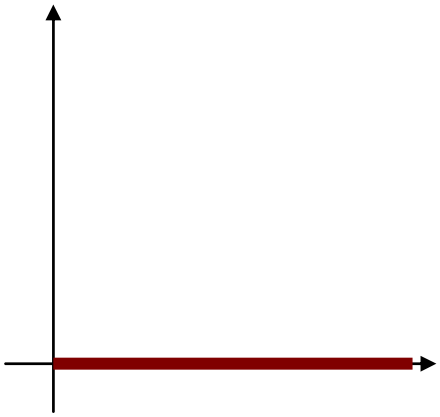
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Re(z)}{|z|} = \cos\theta \\ \dfrac{Im(z)}{|z|} = \sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

Γεωμετρικοί Τόποι:

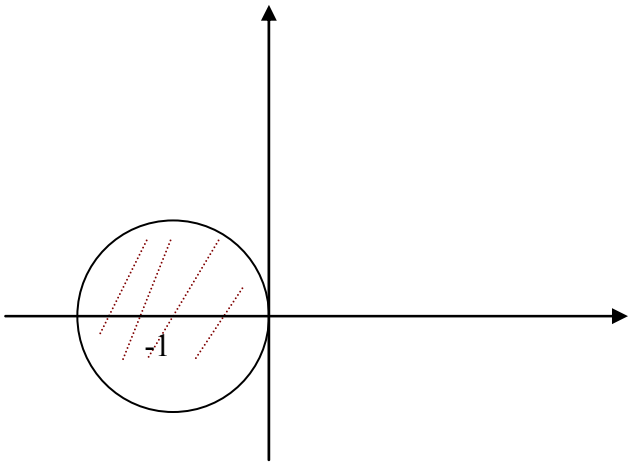


Δεξί ημιεπίπεδο

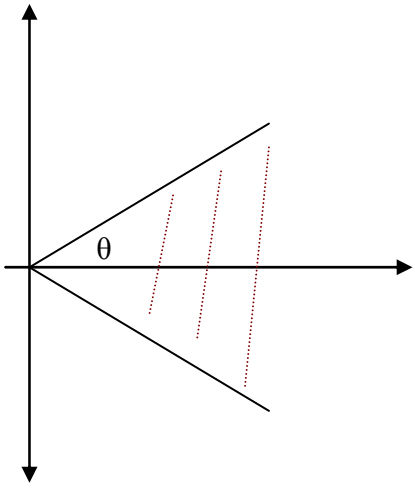
$\{z \in C : \mathrm{Re}(z) > 0\}$



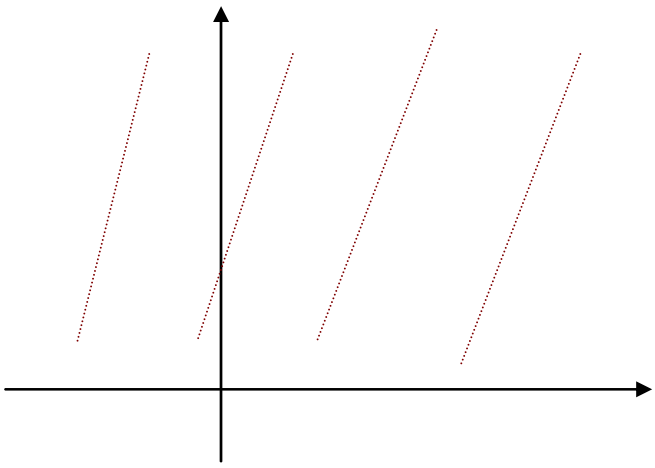
$\{z \in C : z = \overline{z}\}$



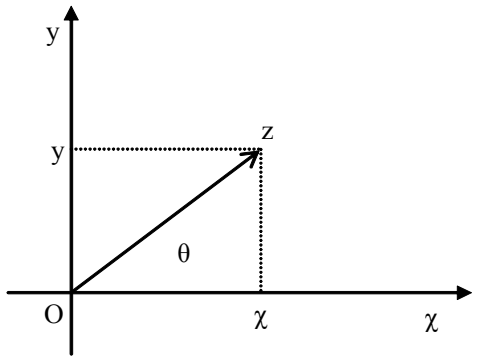
$$\{z \in C : |z+1| < 1\}$$



$$\{z \in C : -\theta < argz < \theta\}$$



$$\left\{z \in C : \left|argz - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}\right\} = \{z \in C : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$



Πολικός μετασχηματισμός:
$r = |z|$
$\theta = \arg z$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$z_1 z_2= r_1 r_2(\cos(\theta_1+ \theta_2) + i\sin(\theta_1+ \theta_2))$

$z_1 /z_2= r_1 /r_2(\cos(\theta_1- \theta_2) + i\sin(\theta_1- \theta_2))$

$z^m=r^m(\cos(m\theta)+i\sin(m\theta))$
π.χ: Δίνεται η εξίσωση $z^m=z_o$. Να λυθεί η εξίσωση ή ισοδύναμα να βρεθεί η **m** τάξης ρίζα του z_o.

Παράδειγμα 1:
Εύρεση των κυβικών ριζών της μονάδας: $z^3=1$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
Τότε: $z^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)=1=1(\cos 0+i\sin 0)$

$$r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$3\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0(\bmod 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \dfrac{2\pi}{3} \\ \theta = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$3\theta = 0 + 2\kappa\pi, \kappa \in \mathrm{N}$$

$$z_1 = 1 : (r = 1, \theta = 0)$$
$$z_2 = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) : (r = 1, \theta = \frac{2\pi}{3})$$
$$z_3 = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) : (r = 1, \theta = \frac{4\pi}{3})$$

Τύπος Euler:
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \theta \in R$

$$\{Z_n\}, Z_n \in C, z \in C$$

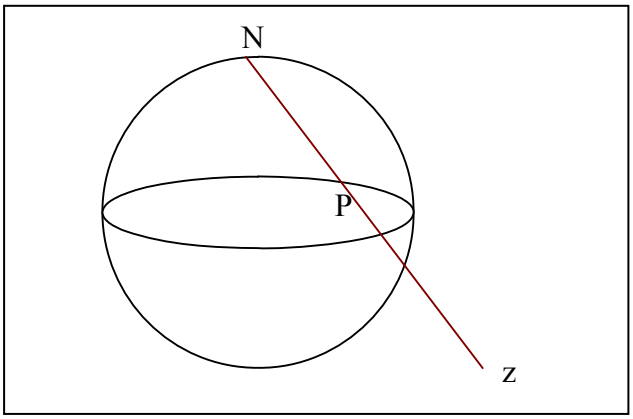
$$Z_n -> z \Leftrightarrow |Z_n - z| -> 0, n -> +\infty$$

$$|Z_n - z| -> 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(Z_n) -> \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(Z_n) -> \mathrm{Im}(z) \end{cases}$$

Όπου Z_n μία μιγαδική ακολουθία.

Μία σειρά συγκλίνει όταν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο μηδέν.

<u>Σύγκλιση στο άπειρο (Στερεωμετρική Προβολή)</u>:



Το επίπεδο που περνάει από το κέντρο της σφαίρας (μισή είναι επάνω , μισή είναι κάτω) (Ισημερινό Επίπεδο) Μοναδιαία σφαίρα με κέντρο (0,0)

Έστω z ένα τυχαίο σημείο . Φέρνω μία ευθεία από το N στο z. Βλέπω ότι η ευθεία τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας σε ένα μόνο σημείο P

Έτσι για κάθε σημείο δημιουργείτε μία αντιστοιχία «1-1» μεταξύ των σημείων z,p , εκτός του N που ορίζουμε ως άπειρο.

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon > 0 : \textit{περιοχη του } \infty$$

$$Z_k -> \infty \Leftrightarrow |Z_k| -> +\infty$$

Δυναμοσειρές: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$

Γνωρίζουμε ότι:

$a_n \in R$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup a_k), k > n$$

Θεώρημα:

Έστω $\lim_{n\to\infty}|c_k|^{\frac{1}{k}} = L$

αν L=0 , τότε η σειρά συγκλίνει για κάθε z$\in C$

αν L=∞, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για z=0

αν 0<L< ∞ , τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|z| < R$ και αποκλίνει για $|z| > R$

(Θέτω R=1/L>0) [R: ακτίνα σύγκλισης]

Θεώρημα:

f(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$ συγκλίνει για $|z| < R$.

Τότε υπάρχει η f'(z) και ισούται με f'(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} kc_k Z^{k-1}$, $\textit{συγκλινει για}$ $|z| < R$

Αναλυτικές Συναρτήσεις και Εξισώσεις Cauchy-Riemann:

Πρόταση 1:
Θεωρούμε ότι έχουμε μία μιγαδική συνάρτηση f=u+iv παραγωγίσιμη στο z. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x , f_y στο z και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann: $\mathbf{f_y=if_x}$. Αυτό γράφεται αναλυτικά ως:

$u_x=v_y$
$u_y=-v_x$

Παρατήρηση: **Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.**

Πρόταση 2:
Έστω ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f , f_x και f_y και είναι συνεχείς στο z.
Έστω ότι ικανοποιούνται και οι εξισώσεις **Cauchy-Riemann** .
Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z.

Ορισμός:
Μία συνάρτηση f λέγεται αναλυτική (ή ολόμορφη) στο σημείο z αν και μόνον αν η f είναι διαφορίσιμη (παραγωγίσιμη) σε μία περιοχή του z.

Σχόλιο: Αν μία συνάρτηση f: C->C είναι αναλυτική σε όλο το C , τότε λέγεται **ακέραια συνάρτηση**.

Εξίσωση La Place:
Έστω μία συνάρτηση h=h(x,y) , παίρνω τις $2^{ες}$ μερικές παραγώγους της: h_{xx} , h_{yy}. Τότε η $h_{xx}+h_{yy}=0$ (ισοδύναμα $\nabla h=0$ [λαπλασιανή] ή ισοδύναμα $\nabla^2 h=0$) ονομάζεται εξίσωση La Place .

Έστω μια συνάρτηση f με f=u+iv. Θεωρώ ότι η f είναι αναλυτική , άρα ικανοποιούνται οι εξισώσεις **Cauchy-Riemann** και μας δίνουν τις σχέσεις: $u_x=v_y$ (1), $u_y=-v_x$ (2).
Παραγωγίζω την (1) ως προς x: $u_{xx}=v_{yx}$ (3)
Παραγωγίζω την (2) ως προς y: $u_{yy}=-v_{xy}$ (4)
Προσθέτω κατά μέλη τις (3),(4) και έχουμε:

$v_{yx}= v_{xy}$
Από Θεώρημα Clairaut(Ανάλυση ΙΙ)

$u_{xx}+ u_{yy}=0$
(πραγματικό μέρος)

$v_{xx}+ v_{yy}=0$
(φανταστικό μέρος)

Και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ικανοποιούν την Εξίσωση του La place.

<u>Στοιχειώδεις Συναρτήσεις</u>:

Έστω z=x+yi με $z \in C$ και $x,y \in R$, ισχύουν:

1. **Εκθετικές: $e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$** (για y=0, τότε: $e^z=e^x$(πραγματική))

<u>Ιδιότητες</u>:

$I)\left|e^z\right| = e^x$

$II)e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

$III)e^{iy} = \cos y + i\sin y, y \in R$

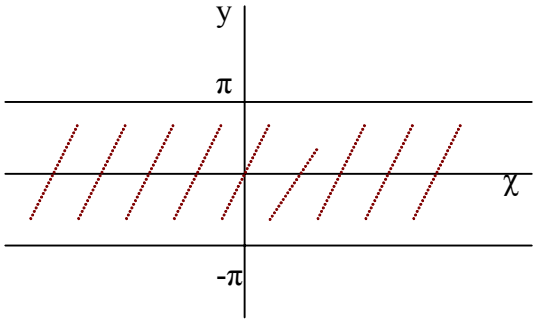
$IV)e^z = a, a \in C - \{0\} : \alpha\pi\varepsilon\iota\rho\varepsilon s \;\; \lambda\upsilon\sigma\varepsilon\iota s$

$V)e^z : \pi\varepsilon\delta\iota o \;\; \tau\iota\mu\omega\nu \;\; C - \{0\}$

$VI)e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in C$

VII) αν $-\pi < \mathrm{Im}z \leq \pi$: τότε e^z είναι «1-1»
(Προσοχή: Θα πρέπει να συμπεριλαμβάνουμε το πάνω όριο-άκρο και όχι τα κάτω)

Η εκθετική στο σύνολο των μιγαδικών δεν είναι παντού «1-1».



$IIX)e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$IX)(e^z)' = e^z$

$X)e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

2. Τριγωνομετρικές: sinz= $1/2i[e^{iz}-e^{-iz}]$ και cosz=$1/2[e^{iz}+e^{-iz}]$

<u>Ιδιότητες</u>:

I) (cosz)'=-sinz & (sinz)'=cosz

II) cos(-z)=cosz & sin(-z)=-sinz
cos(z+2π)=cosz & sin(z+2π)=sinz
cos(z+2kπ)=cosz & sin(z+2kπ)=sinz

III) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$

IV) $\cos(z_1 \pm z_2)=\ldots$ & $\sin(z_1 \pm z_2)=\ldots$

V) Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν φράσσονται **πάντα** απολύτως από την μονάδα. Π.χ: $|\sin 10i| = \frac{1}{2}(e^{10} - e^{-10}) > 1$

VI) sinz , cosz : Δυναμοσειρές.

VII) Tanz=(sinz/cosz).

3. **Λογαριθμικές:** $r \in R^+$: Logr: συνήθης πραγματικός λογάριθμος.

$z \in C - \{0\}, r = |z|, \theta = \arg z$: **μιγαδικός λογάριθμος.**

$\log z = Logr + i\theta$

Η παραπάνω συνάρτηση παίρνει πολλές τιμές (πλειότιμη).

$\theta=\theta_0 +2n\pi$, n ακέραιο(Το θ_0 ονομάζεται κύριο όρισμα και συμβολίζεται με Argz)

Άρα: $\log z=Logr+i(\theta_0 +2n\pi)$ (1)

Για n=0 , η (1) γίνεται: $\log z=Logr+i\theta_0$ (με r>0 ,αφού $r = |z|$ και $-\pi< \theta_0 \leq\pi$

Την οποία θα συμβολίζω με: $Logz= Logr+i\theta_0$ (μονότιμη).

Άρα η w=Logz έχει:

Πεδίο ορισμού: $C - \{0\}$

Σύνολο τιμών: $-\pi<Imw\leq\pi$

<u>Παρατήρηση</u>: αν $\theta_0=0$, τότε ο μιγαδικός λογάριθμος συμπίπτει με τον πραγματικό λογάριθμο και ισχύει ότι: $w=Logz \Leftrightarrow z=e^w$.

<u>Σχόλιο</u>:
Αν πάρω το διάστημα: {(r,θ): r>0 και $-\pi< \theta <\pi$}, τότε αυτό θα είναι το μέγιστο χωρίο στο οποίο η συνάρτηση (λογάριθμος) μπορεί να είναι συνεχής και αφού ικανοποιεί και τις εξισώσεις **Cauchy-Riemann** , η συνάρτηση είναι αναλυτική. (Προσοχή αυτά ισχύουν **μόνο** για το διάστημα $-\pi< \theta <\pi$.)

<u>Ιδιότητες</u>:

I) $(Logz)'=1/z$ (με $|z| > 0$, $-\pi< Argz <\pi$).

Έστω το σύνολο: {(r,θ): r>0 και $\alpha< \theta <\alpha+2\pi$, α: αυθαίρετος πραγματικός}

$Logz=Logr+i\theta$

(σε ένα τέτοιο σύνολο η συνάρτηση είναι μονότιμη, συνεχής, αναλυτική)

Άρα: $(\log z)'=1/z$ { $|z| > 0$, $\alpha< \arg z < \alpha+2\pi$}.

II) $e^{\log z}=z$

III) $\log e^z=z+2n\pi i$,n ακέραιος

IV) $\log(z_1z_2)=\log z_1+\log z_2$

V) $\log(z^{1/n})=(1/n)\log z$, n φυσικός

VI) $\log z^n \neq n\log z$, n φυσικός (δεν ισχύει **πάντα** η ισότητα)

π.χ $\log i^2=\log(-1)=(2k+1)\pi i \neq 2\log i=(4k+1)\pi i$, k ακέραιος

VII) $z^\lambda=e^{\lambda\log z}$ {r>0, $\alpha<\theta<\alpha+2\pi$} , λ πραγματικός

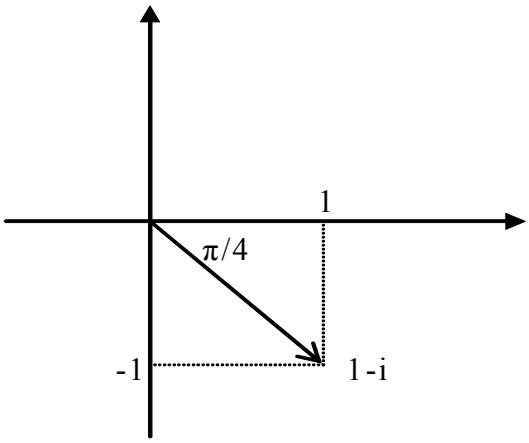
$(z^\lambda)'=\lambda z^{\lambda-1}$

VIII) $\lambda^z=e^{z\log\lambda}$, λ μιγαδικός

IX) $(1+z)^\lambda= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}z^n, \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}$

Παράδειγμα 1:
Να λυθεί στο C η εξίσωση: $e^z=1-i$.

Γενικά : $e^w = z \Leftrightarrow w = \log|z| + i\arg z$



$$|1-i| = \sqrt{2} \qquad Arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = \log\sqrt{2} \ + i(2k\pi - \frac{\pi}{4}), k \in Z$$

Παράδειγμα 2:
Να λυθεί στο C η εξίσωση: cosz=2.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Rightarrow e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$z = x + yi : e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin x) \Rightarrow \begin{cases} e^{-y}\cos x = 2 \pm \sqrt{3} \\ e^{-y}\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in Z \end{cases}$$

Για να είναι το cosx≠0 πρέπει χ=2mπ ,m ακέραιος (δηλαδή δεν πρέπει να μηδενίζεται κάτι που συμβαίνει για τα μονά πολλαπλάσια).

$$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = -\log(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow z = 2m\pi \pm i\log(2 + \sqrt{3})$$

Αφού $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$, άρα φεύγει το (-) που είναι μέσα στο λογάριθμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν στο C οι εξισώσεις:

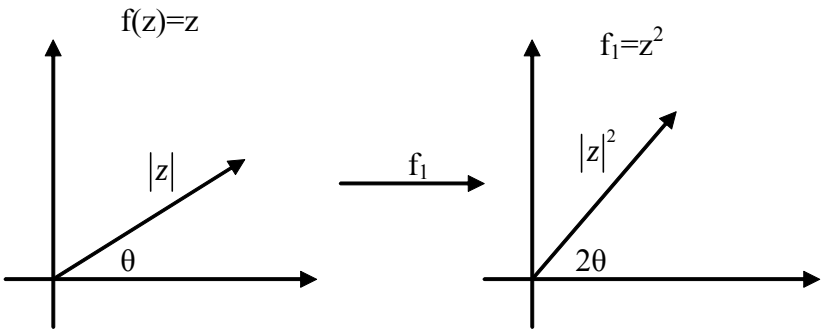
$$a.\log(-1-i) = \log 2 + \frac{7\pi}{4}i + 2k\pi i, k \in Z$$

$$b.3^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3}$$

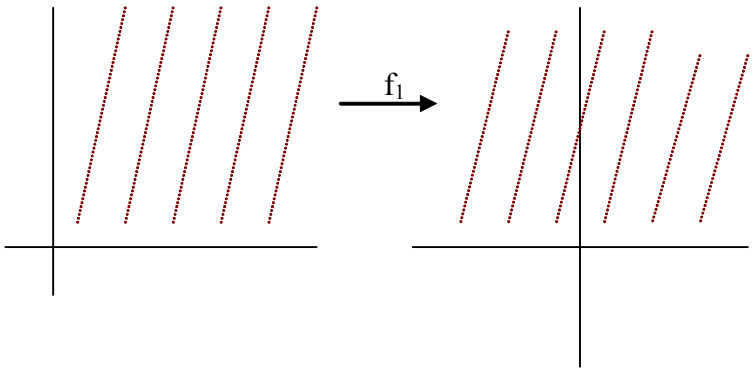
$$c.i^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$d.i^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, k \in z(i^i \in R)$$

Απλά εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για να δούμε ότι όντως βγαίνει τόσο.



Έστω ο μιγαδικός z , παρατηρούμε ότι αν υψωθεί στο τετράγωνο , τότε το όρισμά του θα διπλασιαστεί.



Άρα η f_1 απεικονίζει στο πάνω ημιεπίπεδο το πρώτο τεταρτημόριο.

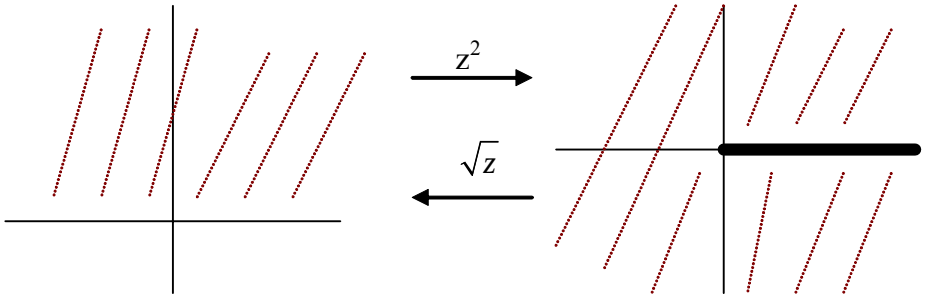
Έστω η $f_2=\sqrt{z}$, γνωρίζουμε ότι:

$z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, 0 < \theta < 2\pi$ (οπότε γίνεται μονότιμη συνάρτηση)

Το $\sqrt{r}$ είναι θετικό άρα είμαστε στο άνω ημιεπίπεδο

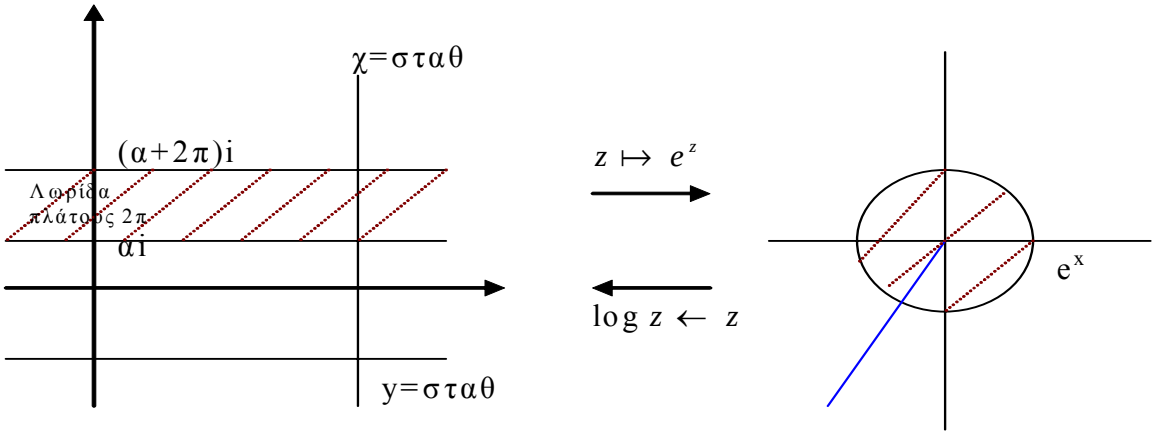
Παρατηρούμε επίσης ότι παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του z , το όρισμά του υποδιπλασιάστηκε.

Σε περιοχή που η f είναι «1-1» η $z \mapsto \sqrt{z}$ είναι η αντίστροφη της $z \mapsto z^2$.



Εξαιρούμε μόνο αυτόν τον άξονα , γιατί αν κατά την στροφή ξαναπέσω στο ίδιο σημείο τότε θα έχω μπει στο επόμενο χωρίο οπότε χάνεται η ιδιότητα της συνάρτησης να είναι «1-1».

Η z^2 επίσης απεικονίζει και το άνω ημιεπίπεδο στο επίπεδο με εξαίρεση τον ημιάξονα οχ.



Κάθε τέτοια λωρίδα (όπως δίπλα) (σχήμα 1)
απεικονίζετε στο εσωτερικό του κύκλου , κάθε παράλληλη του άξονα χ απεικονίζεται όπως η μπλε γραμμή και παράλληλη προς το άξονα y απεικονίζεται από την περιφέρεια το κύκλου.

Καμπύλη C: Είναι ένα σύνολο σημείων $z=(\chi,y)$ του επιπέδου C έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε $\chi=\chi(t)$, $y=y(t)$ με $t\in[a,b]$, όπου $x(t),y(t)$ συνεχείς και t: παράμετρος που διατρέχει το κλειστό διάστημα.
$z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$.

Μία καμπύλη λέγεται απλή αν δεν τέμνει τον εαυτό της (βλέπε Ανάλυση ΙΙ)

Αν $x(t),y(t)$ είναι παραγωγίσιμες τότε: $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$.
Αν ισχύει το παραπάνω τότε η z λέγεται ομαλή ή λεία καμπύλη.
Μηκός λείας καμπύλης: $L=\int_a^b |z'(t)|dt$, όπου $|z'(t)|=\sqrt{|x'(t)|^2+|y'(t)|^2}$

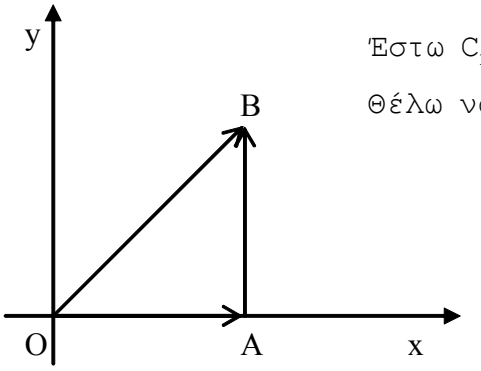
<u>Ορισμός 1</u>:
Θεωρούμε ότι έχουμε μία καμπύλη C τμηματικά λεία : z(t) , a<t<b και μία συνάρτηση f κατά τμήματα συνεχής. Τότε:

$$\int_C f(z)dz := \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \ , \ g(t)=u(t)+iv(t)$$

<u>Ορισμός 2</u>:
$C_1 : z(t)$, $t\in[a,b]$
$C_2 : w(t)$, $t\in[c,d]$
Λέγονται ομαλά ισοδύναμες , αν υπάρχει παραγωγίσιμη και "1-1" συνάρτηση $y(t):[c,d]->[a,b]$: $y(c)=a$, $y(d)=b$ & $w(t)=z(y(t))$.
Αν C_1,C_2 είναι ομαλά ισοδύναμες τότε ισχύει: $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$

Παράδειγμα 3:



Έστω C_1 ονομάζω το ευθύγραμο τμήμα OB στο τρίγωνο OAB.

Θέλω να βρω το: $I_1 = \int_{C_1} z^2 dz.$

Πρέπει να περιγράψω την καμπύλη πάνω στην οποία θα ολοκληρώσουμε. Βρισκόμαστε κατά μήκος της ευθείας x=2y . Οπότε η καμπύλη θα έχει την μορφή: z(t)=x(t)+iy(t) άκρα y(t)=t και χ(t)=2t. Αντί για t μπορώ να τοποθετήσω y (για την άσκηση αυτή , σε άλλη άσκηση μπορεί να μην χρειάζεται.) για ευκολία στις πράξεις. Άρα η καμπύλη παίρνει την μορφη: z(y)=x(y)+iy. Επειδή θέλω να ολοκληρώσω το z^2, θα έχω: $z^2(y)=x^2-y^2+2ixy$ (όπου χ=2y & y=y). Άρα: $z^2(y)= 3y^2+4iy$ και z'(y)=2+i
Όποτε:

$$I_1 = \int_0^1 (3y^2 + 4iy)\,(2+i)\,dy = \ldots = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

για $y=0$ έχουμε $z(y)=0$

για $y=2+i$ έχουμε $z(y)=1$

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε και το $I_2 = \int_{C_2} z^2 dz.$

$$I_2 = \int_{C_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$$

Για την OA έχουμε: $y=0$, άρα $z(x)=x$ & $z'(x)=0$, $x\in[0,2]$

Για την AB έχουμε: $\chi=2$, άρα $Z(y)=2+iy$ & $z'(y)=i$, $y\in[0,1]$

Άρα $I_2 = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2+iy)^2 i\,dy = \ldots = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$

Παρατήρηση:

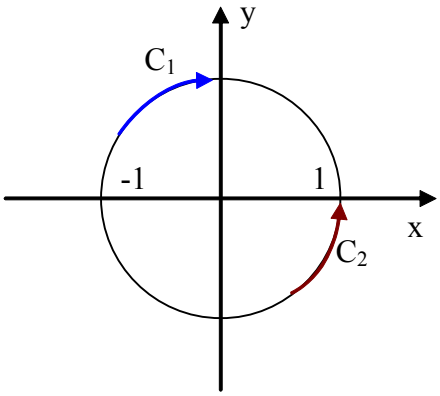
$$\int_{OABO} z^2 dz = 0$$

Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους:

1. Έχουμε αναλυτική συνάρτηση.
2. Ολοκληρώνουμε κατα μήκος κλειστής καμπύλης.

Παράδειγμα 1:

Έστω η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$. Θεωρούμε C_1 : η καμπύλη που διατρέχει το πάνω ημισφαίριο C_2 : η καμπύλη που διατρέχει το κάτω ημισφαίριο και C:μοναδιαίος κύκλος.
Να βρεθούν τα επικαμπύλια της f κατα μήκος των C_1 , C_2 , C. Τι παρατηρείτε;



$$I_1=\int_{C_1}\bar{z}dz=...=-\pi i$$

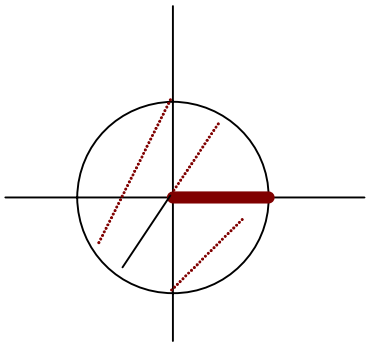
$$I_2=\int_{C_2}\bar{z}dz=...=\pi i$$

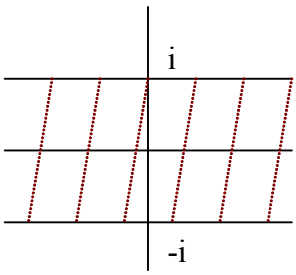
$$I_3=\int_{C}\bar{z}dz=...=2\pi i\neq 0$$

Παρατηρούμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα κατα μήκος της κλειστής καμπύλης C(μοναδιαίος κύκλος) είναι διαφορετικό του μηδενός. Αυτο συμβαίνει γιατί η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι αναλυτική.

<u>Χρήσιμα και Βασικά σύνολά</u>:

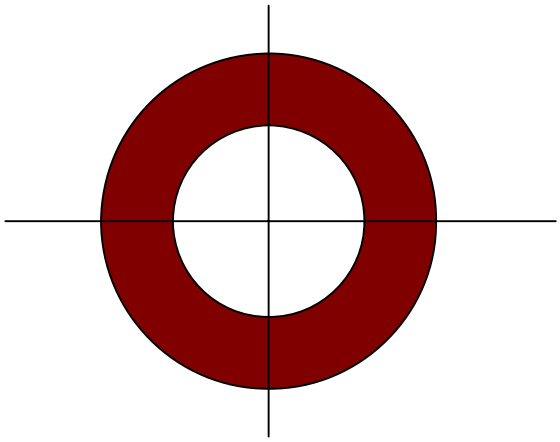
Απλά **συνεκτικό σύνολο** λέγεται ένα σύνολο που δεν περιέχει τρύπες.(περιγραφικός ορισμός)





Παραδείγματα απλά συνεκτικών συνόλων.

!!! Αν ένα σύνολο είναι <u>ανοικτό</u> και <u>κυρτό</u> , τότε αυτό είναι **συνεκτικό**.



Ένα παράδειγμα ενός μη απλά συνεκτικού συνόλου.

Θεώρημα Cauchy:

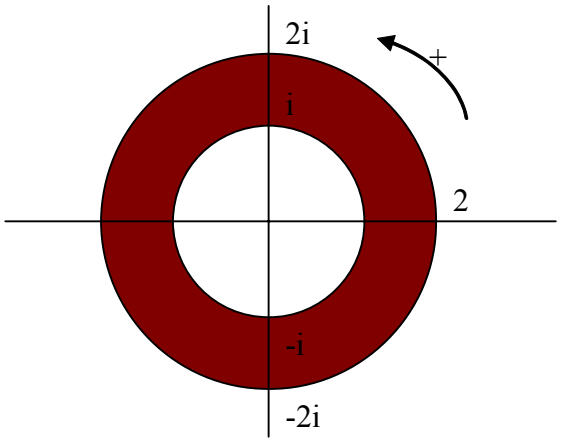
Έστω μία συνάρτηση f: C->C , η οποία είναι **αναλυτική σε ένα απλά συνεκτικό χωρίο D** του C. Θεωρώ μία **απλή και κλειστή καμπύλη** C στο εσωτερικό του D, τότε: $I=\int_C f(z)\,dz=0$

Γενικευμένο Θεώρημα Cauchy:

Έστω μία συνάρτηση f: C->C ,θεωρώ ένα απλά συνεκτικό χωρίο D του C. Θεωρώ μία απλή και κλειστή καμπύλη C στο εσωτερικό του D , η οποία στο εσωτερικό της φέρει άλλες μικρότερες καμπύλες. Θεωρώ το χωρίο R στο εσωτερικό της C , με $B=\partial R=C\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_n$ (προσανατολισμένο σύνορο του R). Αν η f είναι αναλυτική στο R , τότε: $I=\int_B f(z)\,dz=0$

Παράδειγμα 2:

Έστω R: το χωρίο που σχηματίζεται απο τους κύκλους $|z|=2$ (με θετικό προσανατολισμό , όπως το βέλος) και $|z|=1$ (με αρνητικό πρασανατολισμό) με $B=\partial R$ σύνορο του χωρίου R. Να δειχθεί ότι: $\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)}=0$



Θεωρώ την συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2+9)}$.

Αρχικά η f είναι αναλυτική στο C εκτός των σημείων $z_1=0$, $z_2=3i$, $z_3=-3i$. Άρα τα σημεία στα οποία η f δεν είναι αναλυτική είναι εκτός του χωρίου R πάνω στο όποιο θα ολοκληρώσουμε. Άρα η f είναι αναλυτική στο χωρίο R. Άρα από θεώρημα Cauchy έχουμε: $\int_B f(z)\,dz=0$

Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy:

Έστω f μία αναλυτική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό μίας απλής και κλειστής καμπύλης *C*. Έστω z_0 ένα σημείο στο εσωτερικό της καμπύλης *C* , τότε:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Δηλαδή οι τιμές της f πάνω στην καμπύλη *C* προσδιορίζουν πλήρως την f στο εσωτερικό της *C*.

Επέκταση του Ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy (για την **n-οστή** παράγωγο της f):

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Εκτιμήσεις του Cauchy:

Θεωρώντας ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Cauchy ισχύουν.

Αν $|f(z)|\le M(r)$, όπου r η ακτίνα του κύκλου $|z-z_0|=r$

και έστω ότι $\alpha_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, τότε: $|\alpha_n|\le \frac{M(r)}{n!}$

Δηλαδή αν γνωρίζω μία εκτίμηση της f , τότε μπορώ να εκτιμήσω πως φράσσεται στο κέντρο του κύκλου η n-οστή παράγωγος της f(όλες οι παράγωγοι). (Δηλαδή, πως συμπεριφέρονται οι παράγωγοι της f).

Παράδειγμα 3:

Έστω μία απλή και κλειστή καμπύλη C.

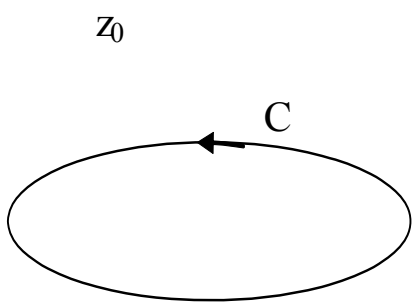
Να δειχθεί ότι: $I=\int_C \frac{dz}{z-z_0}=\begin{cases}0 \text{ , αν } z_0 \text{ "εκτός" καμπύλης C}\\ 2\pi i \text{ , αν } z_0 \text{ "εντός" καμπύλης C}\end{cases}$

Θεωρώ την $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$.

Η f δεν είναι αναλυτική στο z_0.

1. Αν z_0 "εκτός" της καμπύλης c, τότε:

   Αφού το z_0 είναι "εκτός" της C , η f είναι αναλυτική και απο θεώρημα cauchy ισχύει: $I=\int_C f(z)dz=0$.



2. Αν z_0 "εντός" της καμπύλης C:

Θεωρώ μέσα στη C ένα δίσκο με κέντρο στο σημείο z_0 και ακτίνα $\varepsilon>0$ με σύνορο Γ.

Θεωρώ επίσης ένα χωρίο R μέσα στη C με $\partial R = C \cap \Gamma$ στο οποίο η f είναι αναλυτική , άρα το ολοκλήρωμα της f πάνω στο χωρίο θα είναι μηδέν (από θεώρημα Cauchy).

Τέλος, θεωρώ μία καμπύλη I η οποία ενώνει την καμπύλη C με την Γ.

Άρα: $0=\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_I f(z)\,dz - \int_I f(z)\,dz \Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$

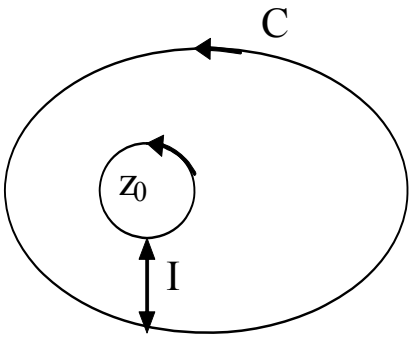
Οπότε: $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$.

Πάνω στην Γ έχω:

$|z-z_0| = \varepsilon \Rightarrow z-z_0 = \varepsilon e^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi]$

$z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta} \Rightarrow dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$

Άρα: $\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$



Ορισμός:

Η f έχει **μεμονωμένη ανωμαλία** στο z_0 , αν είναι αναλυτική σε μία περιοχή D της μορφής: $D=\{z:\ 0<|z-z_0|<d\}$, αλλά δεν είναι αναλυτική στο z_0.

<u>Είδη μεμονωμένης ανωμαλίας</u>:

1) Αν υπάρχει μία συνάρτηση g αναλυτική στο z_0 : f(z)=g(z) σε μία περιοχή όπως η D , τότε λέμε ότι η f έχει **επουσιώδη ανωμαλία στο z_0**.

   π.χ: $f(z)=\begin{cases}\sin z\ ,\ z\neq 2\\ 0\ ,\ z=2\end{cases}$

2) Αν για $z\neq z_0$ η f μπορεί να γραφεί ως: $f(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$ με A(z) , B(z) αναλυτικές στο z_0 και $A(z_0)\neq 0$, $B(z_0)=0$, τότε λέμε ότι η f έχει **πόλο στο z_0**.

   !!! Αν z_0 είναι ρίζα με πολλαπλότητα κ , τότε η f έχει πόλο στο z_0 τάξης κ.

   π.χ : $f(z)=\frac{1}{z-3}$, τότε η f έχει πόλο στο 3.

3) Αν η f δεν έχει ούτε <u>επουσιώδη ανωμαλία</u> , ούτε <u>πόλους</u> , τότε η f έχει **ουσιώδη ανωμαλία**. π.χ: $f(z)=e^{1/2}$ (δεν θα ασχοληθούμε με αυτήν την περίπτωση).

<u>Θεώρημα</u>: (Αρχή του Riemann για επουσιώδεις ανωμαλίες)

Έστω μία συνάρτηση f: C->C αναλυτική σε ένα χώριο D του z_0.
Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 και το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$,
τότε η f έχειεπουσιώδη ανωμαλία στο z_0

<u>Θεώρημα</u>:
Έστω μία συνάρτηση f: C->C αναλυτική σε ένα χωρίο D του z_0.
Αν υπάρχει $\kappa>0$, $\kappa\in Z$: $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\neq 0$, ενώ $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k+1} f(z)=0$
τότε η f έχει πόλο τάξης κ στο z_0.

Με τα παραπάνω θεωρήματα ελέγχω την ύπαρξη επουσιώδης ανωμαλίας ή πόλων της συνάρτησης. (αυτά θα χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις)

Έστω ότι έχω το ανάπτυγμα της μορφής: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ (Σειρά Laurent)
Τότε στο δακτύλιο που δημιουργείτε από τους κύκλους με ακτίνες , τις ακτίνες σύγκλισης R_1,R_2. Που είναι οι ακτίνες σύγκλισης της δυναμοσειράς με θετικούς εκθέτες και της δυναμοσειράς με αρνητικούς εκθέτες αντίστοιχα, η σειρά Laurent είναι αναλυτική και αντίστροφα.
Μάλιστα σε συτήν την περίπτωση η σειρά ονομάζεται ανάπτυγμα Laurent και είναι μοναδική για κάθε f.

<u>Θεώρημα</u>:
Έστω μία συνάρτηση f: C->C. Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Laurent.
Δηλαδή, για $\delta>0$ και $0<|z-z_0|<\delta$, ισχύει:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k|z-z_0|^k,\ c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz.$$

Όπου C είναι ένας κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα R , $0<R<\delta$.

<u>Παρατηρήσεις</u>:
1. Αν $c_{-k}=0$ για κάθε $\kappa>0$, τότε η f έχει **επουσιώδη ανωμαλία** στο $\underline{z_0}$.
2. Αν $c_{-k}\neq 0$ και $c_{-N}=0$ για κάθε $N>\kappa$, τότε η f έχει πόλους τάξης κ στο z_0.
   (Δηλαδή είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα από αρνητικές δυνάμεις).
   Μάλιστα η τάξη κ των πόλων της f είναι ίση με το πλήθος των αρνητικών δυνάμεων που υπάρχουν στο άθροισμα.

Όσο αφορά την τελευταία παρατήρηση για τους πόλους μίας συνάρτησης , αξίζει να μελετηθεί ο συντελεστής του αθροίσματος c_{-1} , ο οποίος ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο σημείο z_0 και συμβολίζεται με $c_{-1}=Res(f,z_0)$.
(Έχει πρακτική αξία σε ασκήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε.)

Τρόποι υπολογισμού Ολοκληρωτικού Υπολοίπου:

α) Αν f έχει απλό πόλο στο σημείο z_0, τότε: $c_{-1}=\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\dfrac{A(z_0)}{B'(z_0)}$

β) Αν f έχει πόλο τάξης κ στο σημείο z_0, τότε:

$$c_{-1}=\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\underbrace{\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z))\Big|_{z=z_0}\right)}_{\text{παράγωγος τάξης κ-1}}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ ΤΟΥ CAUCHY</u>: (SOS)

Έστω μία συνάρτηση f: C->C αναλυτική σε έναν απλά συνεκτικό τόπο Ω, εκτός από κάποια σημεία του Ω: $(z_1,z_2,\ldots,z_m)$ στα οποία η f έχει m μεμονωμένες ανωμαλίες. Έστω γ μία κλειστή καμπύλη που δεν διέρχεται από τα σημεία $z_1,z_2,\ldots,z_m$.

Τότε ισχύει: $I=\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\left(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_k}}_{\text{δείκτης της γ ως προς } z_k}\right)\mathrm{Res}(f,z_k)$

Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 3 το ολοκλήρωμα που έχει ο δείκτης είναι 0 ή 2πi άρα ο δείκτης θα παίρνει τιμές το 0 ή το 1. Σε ειδικές περιπτώσεις παίρνει και άλλες τιμές , εμείς όμως δεν θα ασχοληθούμε με αυτές.

<u>Εφαρμογές</u>: (υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων με μιγαδικές τεχνικές)

1. Να υπολογιστεί το: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, P,Q πολυώνυμα.

Προσοχή:

α. πρέπει $\deg Q-\deg P\geq 2$ και $Q(x)\neq 0$, $x\in R$ (δεν έχει ρίζες στο R).

β. Θεωρούμε την Q στο άνω ημιεπίπεδο, και την ανάγω σε μιγαδική.

π.χ $Q(x)=x^2\Rightarrow Q(z)=z^2$

και έστω z_k με $(\kappa=1,2,\ldots,m)$ οι ρίζες του Q στο άνω ημιεπίπεδο.

Αποδεικνύεται ότι: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right)$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x dx$$

Τώρα $R=\frac{P}{Q}$, Q,P πραγματικά πολυώνυμα

προσοχή:

πρέπει $\deg Q > \deg P$ και $Q(x)\neq 0$, $x\in R$. (deg = βαθμός πολυωνύμου)

και έστω z_k $(\kappa=1,2,...,m)$ πόλοι της $R(x)$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(R(z)e^{iz},z_k)\right\}$$

Αντίστοιχα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x dx = \mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(R(z)e^{iz},z_k)\right\}$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$, R: ρητή συνάρτηση

τότε:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$$ (με την χρήση του μετασχηματισμού $z=e^{i\theta}$)

και στην συνέχεια χρησιμόποιώ το Θεώρημα Ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Παράδειγμα 3:

Να υπολογιστεί το: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+\sin\theta}$

Σύμφωνα με την εφαρμογή 3. Παίρνω τον μετασχηματισμό $z=e^{i\theta}$.

Άρα: $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$.

Θεωρώ την C: $\{z:|z|=1\}$

Άρα: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+\sin\theta} = \int_C \frac{1}{5+3\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)}\frac{dz}{iz} = \ldots = \int_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$ (1)

Οι πόλοι της συάρτησης είναι οι ρίζες του παρανομαστή:
$-i/3$, $-3i$. θέλω τους πόλους που βρίσκονται "έντος" της C , δηλαδή τον $-i/3$.
Άρα από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy:

$\int_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz = 2\pi i * \mathrm{Res}(f(z),-i/3)$ (2)

Ο $-i/3$ είναι απλός πόλος άρα: $\mathrm{Res}(f(z),-i/3) = \lim_{z\to -i/3}(z+i/3)\frac{2}{3z^2+10iz-3} = \ldots = 1/4i$

Άρα (2) $\Rightarrow \int_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz = 2\pi i(1/4i) = \pi/2$

Παράδειγμα 4:

Να λυθεί το: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}dx$.

Θεωρώ την $f(z) = \frac{dx}{1+x^4}$. Οι πόλοι της f στο άνω ημιεπίπεδο είναι :

$z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{3i\pi/4}$ (είναι και οι $e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}$ αλλά ανήκουν στο κάτω ημιεπίπεδο)

Αλλά $\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \frac{1}{4z_0^{\,3}}$.

Άρα: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}(f(z),z_k) = \ldots = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

ΤΕΛΟΣ