**Θεωρία Γραφημάτων**

Διάλεξη 1: 12.10.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σ. Κ.

## 1.1 Εισαγωγικοί ορισμοί

**Ορισμός 1.1** Γράφημα $G$ *καλείται ένα ζεύγος* $G = (V, E)$ *όπου* $V$ *είναι το σύνολο των* κορυφών *(ή* κόμβων*) και* $E$ *πολυσύνολο που αποτελείται από μη διατεταγμένα ζεύγη κορυφών. Τα στοιχεία του* $E$ *καλούνται* ακμές.

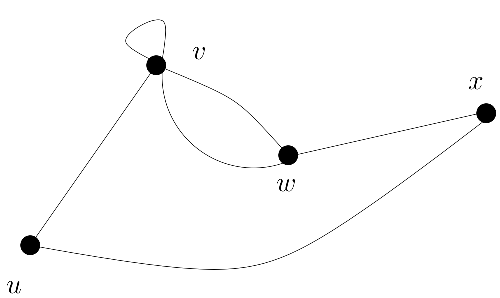
Για γράφημα $G$, $V(G)$ και $E(G)$ δηλώνουν τα σύνολα κορυφών και ακμών αντίστοιχα. Συνήθως χρησιμοποιούμε $n$ και $m$ για τις ποσότητες $|V(G)|$ και $|E(G)|$. Ο αριθμός των κορυφών καλείται επίσης *τάξη* του $G$ και εναλλακτικά συμβολίζεται ως $|G|$.

Ο ορισμός που δώσαμε αντιστοιχεί στα *μη κατευθυνόμενα* γραφήματα. Αν τα ζεύγη στο $E$ είναι διατεταγμένα, το γράφημα καλείται *κατευθυνόμενο*. Στο εξής όταν αναφερόμαστε απλά σε «γράφημα» εννοούμε μη κατευθυνόμενο.

*Βρόχος* καλείται μια ακμή της μορφής $\{v, v\}$, $v \in V$. *Πολλαπλή ακμή* είναι μια ακμή που εμφανίζεται πολλές φορές στο πολυσύνολο $E$. Εάν το $E$ είναι σύνολο και δεν περιέχει βρόχους, έχουμε ένα απλό γράφημα.

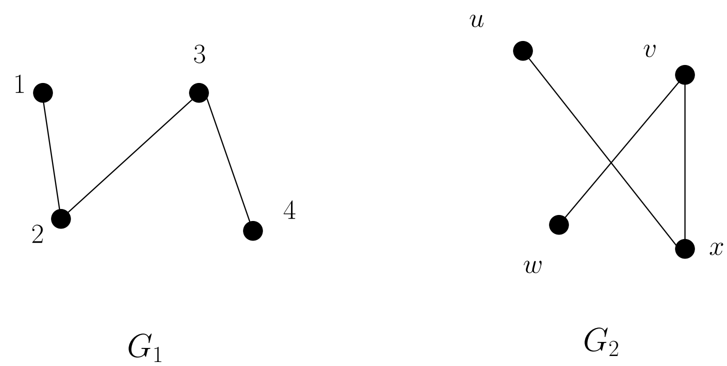
**Ορισμός 1.2** Το $G = (V, E)$ *καλείται* απλό *γράφημα αν το* $E$ *δεν περιέχει βρόχους ή πολλαπλές ακμές.*

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε γράφημα που δεν είναι απλό, θα το δηλώνουμε ρητά. Στο Σχήμα 1.1 δίνεται ένα παράδειγμα μη απλού γραφήματος.




**Σχήμα** 1.1: (Μη απλό) γράφημα $G = (V, E)$ με $|E(G)| = 6$.

Οι κορυφές $u, v$ είναι τα *άκρα* της ακμής $\{u, v\}$. Δύο κορυφές $u, v$ καλούνται *γειτονικές* στο γράφημα $G$ αν $\{u, v\} \in E(G)$· τότε ο $u$ είναι *γείτονας* του $v$. Η ακμή $e \in E(G)$ *προσπίπτει* στην $v \in V(G)$ αν $v \in e$. Η ακμή $e$ *προσπίπτει στην ακμή* $e'$ αν $e \cap e' \neq \varnothing$. Θα χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τον συμβολισμό $uv$ για να δηλώσουμε την ακμή $\{u, v\}$.

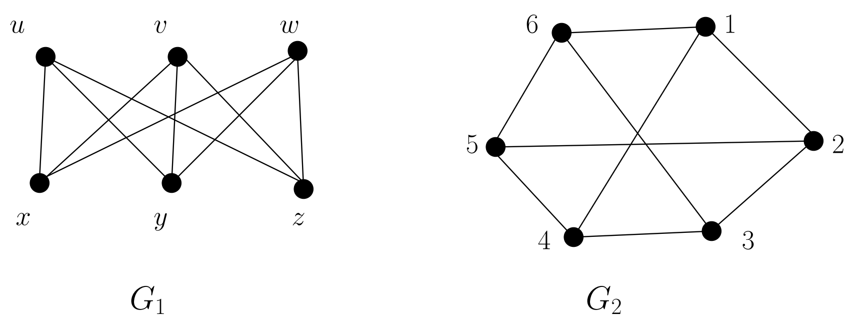



**Σχήμα** 1.2: Δύο ισόμορφα γραφήματα.

Εξετάστε τα γραφήματα $G_1$, $G_2$ στο Σχήμα 1.2. Είναι τα ίδια; Όχι! Είναι όμως ισόμορφα.

**Ορισμός 1.3** *Έστω γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.* Ισομορφισμός *καλείται μια 1-1 και επί συνάρτηση $\phi : V_1 \to V_2$ τ.ω. $\{u, v\} \in E_1$ αν και μόνο αν $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_2$. Αν υπάρχει ισομορφισμός, τα $G_1$, $G_2$ καλούνται* ισόμορφα *(ή* ισομορφικά*).*

Ένα άλλο παράδειγμα ισόμορφων γραφημάτων δίνεται στο Σχήμα 1.3.




**Σχήμα** 1.3: Δύο ισόμορφα γραφήματα.

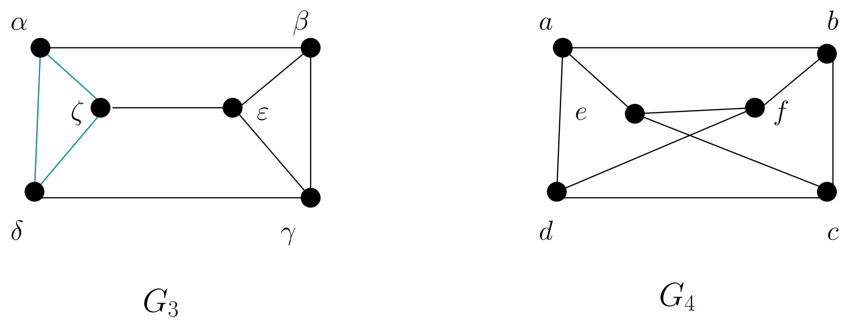
**Ορισμός 1.4** *Το* συμπλήρωμα *του γραφήματος $G$ είναι το γράφημα $\overline{G} = (V(G), \overline{E(G)})$ όπου $e \in \overline{E(G)}$ αν και μόνο αν $e \in E(G)$.*

**Άσκηση 1.1** *Τα $G$ και $H$ είναι ισόμορφα αν και μόνο αν $\overline{G}$ και $\overline{H}$ ισόμορφα.*

**Ορισμός 1.5** *Έστω $r \geq 2$, ακέραιος. $G = (V, E)$ καλείται $r$-μερής ($r$-partite) αν υπάρχει διαμέριση του $V$ σε $r$ κλάσεις και κάθε ακμή του $E$ έχει τα άκρα της σε διαφορετικές κλάσεις.*

Εξετάστε τα γραφήματα $G_1, G_2$ από το Σχήμα 1.3 και τα $G_3, G_4$ από το Σχήμα 1.4. Ποια από αυτά είναι ισόμορφα μεταξύ τους;

**Παρατήρηση 1.1** *Ο ισομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας.*

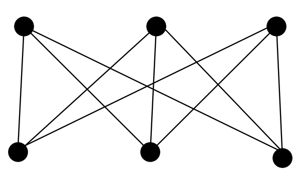



Σχήμα 1.4: Είναι τα $G_3, G_4$ ισόμορφα;

1. *Το $G$ είναι ισόμορφο με τον εαυτό του.*
2. *Αν το $G_1$ είναι ισόμορφο με το $G_2$, τότε το $G_2$ είναι ισόμορφο με το $G_1$.*
3. *Αν το $G_1$ είναι ισόμορφο με το $G_2$ και το $G_2$ ισόμορφο με το $G_3$, τότε το $G_1$ είναι ισόμορφο με το $G_3$.*

**Ορισμός 1.6** Γράφημα χωρίς ετικέτες (unlabelled graph) *καλείται μία κλάση ισοδυναμίας ισόμορφων γραφημάτων.*

Στο Σχήμα 1.5 δίνεται ένα παράδειγμα απεικόνισης ενός γραφήματος χωρίς ετικέτες. Αναπαριστά την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκουν τα $G_1, G_2$ του Σχήματος 1.3.



Σχήμα 1.5: Γράφημα χωρίς ετικέτες.

## 1.2 Υπογραφήματα, Μονοπάτια, Συνεκτικότητα

Δοθέντων $G = (V, E)$ και $v \in V$, *γειτονιά* του $v$ είναι το σύνολο των γειτόνων του $v$, το οποίο συμβολίζουμε με $N(v)$. *Βαθμός* του $v$ είναι ο αριθμός $|N(v)|$ και τον συμβολίζουμε με $d(v)$ ή με $d_G(v)$ αν χρειάζεται να ξεκαθαρίσουμε σε ποιο γράφημα μετράμε το βαθμό.

**Πρόταση 1.1** *Σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.*

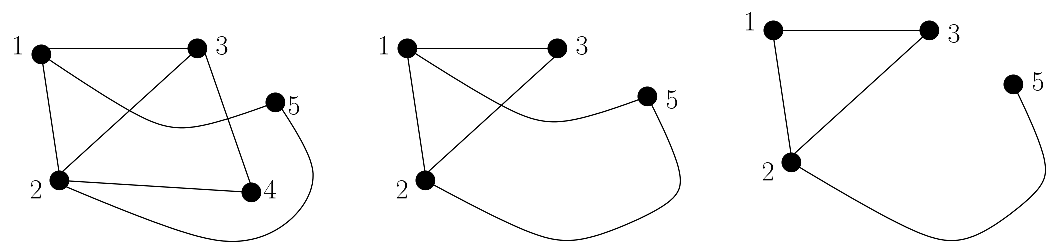
**Απόδειξη.** Στο άθροισμα κάθε ακμή μετριέται δύο φορές. ∎

**Ορισμός 1.7** *Το γράφημα $H = (U, F)$ καλείται* υπογράφημα *του $G = (V, E)$ αν $U \subseteq V$ και $F \subseteq E$. Αν $U = V$, τότε το $H$ λέγεται* επικαλύπτον υπογράφημα (spanning subgraph) *του $G = (V, E)$.*

Διαισθητικά για να πάρουμε ένα υπογράφημα του $G = (V, E)$, σβήνουμε κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές. Τα εναγόμενα υπογραφήματα καθορίζονται μόνο από το σύνολο των κορυφών τους.

**Ορισμός 1.8** *Δοθέντων* $G = (V, E)$ *και* $\varnothing \neq U \subseteq V$, *με* $G[U]$ *συμβολίζουμε το γράφημα με σύνολο κορυφών* $U$ *και σύνολο ακμών* $E(G[U]) = \{e \in E \mid e \subseteq U\}$. *Το* $G[U]$ *καλείται* υπογράφημα του $G = (V, E)$ που ενάγεται από το $U$ *ή πιο απλά* εναγόμενο υπογράφημα (induced subgraph*) του* $G = (V, E)$.

Στο Σχήμα 1.6 δίνονται παραδείγματα των Ορισμών, 1.7,1.8. Θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία $G - X$ για να συμβολίσουμε το γράφημα $G[V \setminus X]$, $X \subseteq V$. Ομοίως για $F \subseteq E$, με $G - F$ συμβολίζουμε το γράφημα $G = (V, E \setminus F)$. Αν τα $X$ και $F$ είναι μονοσύνολα, απλά γράφουμε $G - v$ και $G - e$ αντίστοιχα.




$G_1$ $G_2$ $G_3$

Σχήμα 1.6: Το $G_2$ είναι εναγόμενο υπογράφημα του $G_1$. Το $G_3$ είναι υπογράφημα του $G_1$ και του $G_2$ αλλά δεν είναι εναγόμενο υπογράφημα.

Κάποιες σημαντικές ειδικές κατηγορίες γραφημάτων είναι οι παρακάτω. $K_n$: πλήρες γράφημα (κλίκα) με $n$ κορυφές. $K_{n,m}$: πλήρες διμερές γράφημα με $n$ κορυφές στο ένα σύνολο της διαμέρισης και $m$ στο άλλο. *Κενό γράφημα:* το $(\varnothing, \varnothing)$.

**Ορισμός 1.9** Μονοπάτι (path) *καλείται το μη κενό γράφημα* $P = (V, E)$ *όπου* $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ $E = \{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_k, x_{k+1}\}\}$, $k \geq 0$, *όπου* $|E(P)| = k$ *είναι το* μήκος *του μονοπατιού. Οι κορυφές* $x_2, \ldots, x_k$ *καλούνται* εσωτερικές κορυφές *του* $P$.

Αν $P = (V, E)$ είναι ένα μονοπάτι μήκους $k \geq 2$, το γράφημα $C = (V, E \cup \{x_{k+1}, x_1\})$ καλείται *κύκλος (cycle)* μήκους $k + 1$. Όταν αναφερόμαστε σε ένα μονοπάτι ή κύκλο στο $G$ εννοούμε ένα υπογράφημα του $G$ που είναι μονοπάτι ή κύκλος αντίστοιχα.

**Ορισμός 1.10** Περίπατος (walk) *μήκους* $k \geq 1$ *στο* $G$ *καλείται μια μη κενή ακολουθία κορυφών του* $G = (V, E)$

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$$

*τ.ω.* $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, k + 1$ *και υπάρχει* $e_i \in E$ *με* $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, \ldots, k$.

Παρατηρήστε ότι σε έναν περίπατο μπορεί να υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών ή ακόμα και ακμών. Αν $v_1 = v_{k+1}$ ο περίπατος ονομάζεται *κλειστός*.

**Άσκηση 1.2** *Κάθε περίπατος από το* $u$ *στο* $v$ *στο* $G$ *περιέχει ένα μονοπάτι από το* $u$ *στο* $v$.

**Ορισμός 1.11** *Ένα μη κενό γράφημα $G = (V, E)$ καλείται* συνεκτικό *αν για κάθε $x, y \in V$, τα $x$ και $y$ ενώνονται με μονοπάτι στο $G$.*

Ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του $G$ καλείται *συνεκτική συνιστώσα* του $G$, ή απλά *συνιστώσα* του $G$.

**Πρόταση 1.2** *Γράφημα $G$ με $n$ κορυφές και $m$ ακμές έχει τουλάχιστον $n-m$ συνεκτικές συνιστώσες.*

**Απόδειξη.** Ξεκίνησε με το γράφημα $\overline{K_n}$ (που έχει $n$ συνιστώσες) και πρόσθεσε μία-μία τις $m$ ακμές του $E(G)$. Κάθε ακμή που προσθέτεις μειώνει τον αριθμό των συνιστωσών το πολύ κατά ένα. ∎

## 1.3 Δέντρα

**Ορισμός 1.12** *Ένα γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται* ακυκλικό *ή* δάσος. Δέντρο *είναι ένα συνεκτικό ακυκλικό γράφημα.*

*Φύλλο* σε ένα δέντρο είναι μια κορυφή βαθμού 1.

**Λήμμα 1.1** *Ένα δέντρο $T$ με $n \geq 2$ κορυφές περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα.*

**Απόδειξη.** Κάθε συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές περιέχει τουλάχιστον μία ακμή, άρα και τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Πάρε ένα μεγιστικό μονοπάτι $P$, τα άκρα του $x$, $y$ δεν έχουν άλλο γείτονα στο $T$ εκτός από τους γείτονες τους στο $P$. Άρα τα $x$, $y$ είναι φύλλα. ∎

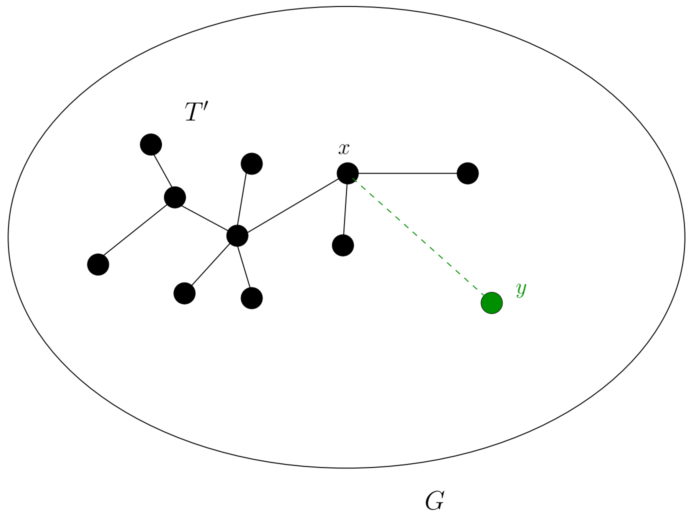
**Θεώρημα 1.1** *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα γράφημα $T$ με $n$ κορυφές.*

1. *Το $T$ είναι δέντρο.*
2. *Οποιεσδήποτε δύο κορυφές του $T$ ενώνονται με μοναδικό μονοπάτι.*
3. *Το $T$ είναι συνεκτικό και έχει $n-1$ ακμές.*
4. *Το $T$ είναι ακυκλικό και έχει $n-1$ ακμές.*

**Απόδειξη.** Άσκηση. ∎

Συμβολίζουμε με $\delta(G)$ τον ελάχιστο βαθμό, δηλαδή την ποσότητα $\min_{v \in V(G)} d_G(v)$.

**Θεώρημα 1.2** *Αν $T$ δέντρο με $k \geq 0$ ακμές και $G$ γράφημα με $\delta(G) \geq k$, τότε το $T$ είναι ισόμορφο με υπογράφημα του $G$.*




Σχήμα 1.7: Απεικόνιση της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.

**Απόδειξη.** Με επαγωγή στο $k$.

*Βάση.* Έστω $k = 0$. Κάθε γράφημα περιέχει ως υπογράφημα το $K_1$ που είναι το μόνο δέντρο με μηδέν ακμές.

*Επαγωγικό Βήμα.* Έστω ότι η πρόταση ισχύει για διέντρα με λιγότερες από $k$ ακμές. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $T$ με $k > 0$ ακμές. Από το Λήμμα 1.1, το $T$ περιέχει φύλλο $v$. Έστω $u$ ο μοναδικός γείτονας του $v$ στο $T$. Ορίζουμε $T' := T - v$. Από την Επαγωγική Υπόθεση το $G$ περιέχει το $T'$ ως υπογράφημα, αφού $\delta(G) \geq k > k - 1 = |E(T')|$. Έστω $x$ η κορυφή στο αντίγραφο του $T'$ εντός του $G$ η οποία αντιστοιχεί στο $u$. Δείτε το Σχήμα 1.7. Επειδή το $T'$ έχει $k - 1$ κορυφές διάφορες του $u$ και $d_G(x) \geq k$, το $x$ έχει κάποιο γείτονα $y$ στο $G$ που δεν περιέχεται στο αντίγραφο του $T'$. Προσθέτοντας την ακμή $\{x, y\}$ παίρνουμε ένα αντίγραφο του $T$ στο $G$ με το $y$ να παίζει το ρόλο του $v$. ∎

Η ανισότητα στο Θεώρημα 1.2 είναι η καλύτερη δυνατή αφού το $K_k$ δεν περιέχει δέντρο με $k$ ακμές.