

## 4.1 2-συνεκτικά γραφήματα (συνέχεια)

**Πρόταση 4.1** Δύο μπλοκ ενός γραφήματος  $G$  μοιράζονται το πολύ μία κορυφή.

**Απόδειξη:** Θεωρήστε μπλοκ  $B_1, B_2$  τ. ώ.  $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$ . Θα δείξουμε ότι το γράφημα  $B_1 \cup B_2$  είναι συνεκτικό, χωρίς αριθρικό σημείο, άρα τα  $B_1, B_2$  δεν είναι μεγιστικά.

Σβήνοντας μια κορυφή  $x \in V(B_1) \cup V(B_2)$ , το  $B_i \setminus \{x\}$  είναι συνεκτικό,  $i = 1, 2$ . Άρα υπάρχει μονοπάτι εντός του  $B_i \setminus \{x\}$  προς την κορυφή  $y \in V(B_1) \cap V(B_2) \setminus \{x\}$ . Άρα μέσω του  $y$  υπάρχει μονοπάτι από κάθε  $v_1 \in V(B_1) \setminus \{x\}$  προς κάθε  $v_2 \in V(B_2) \setminus \{x\}$ . Το  $B_1 \cup B_2$  δεν χάνει τη συνεκτικότητα με τη διαγραφή μιας κορυφής, άρα τα  $B_1, B_2$  δεν είναι μεγιστικά με αυτή την ιδιότητα, άτοπο. ■

Ομοίως αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.2** Δίνονται μπλοκ  $B_1, B_2$  του γραφήματος  $G$ . Αν  $v \in V(B_1) \cap V(B_2)$ , τότε το  $v$  είναι αριθρικό σημείο του  $G$ .

**Παρατήρηση 4.1** Τα μπλοκ ενός γραφήματος διαμερίζουν το σύνολο των ακμών.

**Ορισμός 4.1** Το γράφημα των μπλοκ (block graph) ενός γραφήματος  $G$  είναι ένα διμερές γράφημα  $H = (A \cup B, E)$  όπου  $A$  είναι το σύνολο των αριθρικών σημείων του  $G$  και  $B$  το σύνολο των μπλοκ. Η ακμή  $\{v, b\}$ ,  $v \in A$ ,  $b \in B$ , περιλαμβάνεται στο  $E$  αν  $v \in V(b)$ .

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης είναι επίσης παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.1.

**Πρόταση 4.3** Το γράφημα των μπλοκ ενός συνεκτικού γραφήματος  $G$  είναι δέντρο.

**Ορισμός 4.2** Σε ένα γράφημα  $G$ , δύο μονοπάτια  $P_1, P_2$  καλούνται διακεκριμένα (disjoint) αν δεν έχουν καμία κοινή κορυφή. Τα  $P_1, P_2$  καλούνται εσωτερικά διακεκριμένα (internally disjoint) αν δεν έχουν καμία κοινή εσωτερική κορυφή.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μια πρόγερση του Θεωρήματος του Menger. Η απόσταση δύο κορυφών  $u, v$  ορίζεται ως το μήκος του συντομότερου μονοπατιού ανάμεσα στα  $u$  και  $v$  και συμβολίζεται με  $d(u, v)$ .

**Θεώρημα 4.1 (Whitney, 1932)** Γράφημα  $G$ ,  $|G| \geq 3$ , είναι 2-συνεκτικό αν για κάθε  $u, v \in V(G)$ ,  $u \neq v$ , υπάρχουν τουλάχιστον δύο εσωτερικά διακεκριμένα  $u-v$  μονοπάτια.

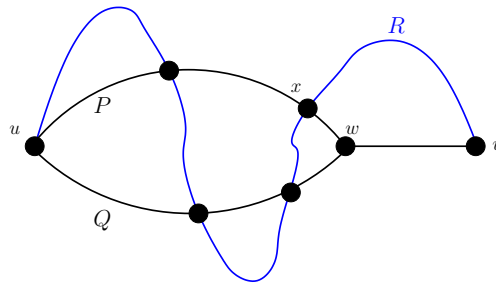
**Απόδειξη:** Για την κατεύθυνση  $\Leftarrow$ , παρατηρούμε ότι διαγράφοντας μια κορυφή δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε τα  $u$  και  $v$ .

Αποδεικνύουμε τώρα την κατεύθυνση  $\Rightarrow$ . Έστω  $G$  2-συνεκτικό. Δοσμένων  $u, v \in V(G)$ ,  $u \neq v$ , θα δείξουμε την ύπαρξη των δύο μονοπατιών με επαγωγή στο  $d(u, v)$ .

**Βάση:**  $d(u, v) = 1$ . Επειδή  $\kappa'(G) \geq \kappa(G) = 2$ , αν διαγράψουμε την ακμή  $\{u, v\}$  το εναπομείναν γράφημα παραμένει συνεκτικό. Άρα υπάρχει  $u-v$  μονοπάτι στο  $G$  που είναι εσωτερικά διακεκριμένο από την ακμή  $\{u, v\}$ .

**Επαγωγικό Βήμα:**  $d(u, v) = k > 1$  και υποθέτουμε ότι ισχύει για  $x, y \in V(G)$ , με  $1 \leq d(x, y) < k$ . Έστω  $w$  η κορυφή πριν από το  $v$  σε ένα συντομότερο  $u-v$  μονοπάτι. Επειδή  $d(u, w) = k - 1$ , από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχουν δύο εσωτερικά διακεκριμένα  $u-w$  μονοπάτια  $P$  και  $Q$ . Το γράφημα  $G - w$  είναι συνεκτικό άρα περιέχει ένα  $u-v$  μονοπάτι  $R$ . Αν  $R \cap P = \emptyset$  ή  $R \cap Q = \emptyset$ , τελειώσαμε.

Το  $R$ , εκτός από το  $u$ , μπορεί να περιέχει μόνο εσωτερικές κορυφές των  $P, Q$ . (Παρατηρήστε ότι το  $w$  δεν μπορεί να ανήκει στο  $R$ .) Ορίζουμε ως  $x$  την τελευταία κορυφή του  $R$  πριν το  $v$  που ανήκει στο  $P \cup Q$ . Χβτγ υποθέτουμε ότι  $x \in P$ . (Βλ. Σχήμα 4.1.) Συνδυάζοντας το  $u-x$  υπομονοπάτι του  $P$  με το  $x-v$  υπομονοπάτι του  $R$  παίρνουμε  $u-v$  μονοπάτι που είναι εσωτερικά διακεκριμένο από το μονοπάτι που ορίζει η ένωση του  $Q$  με την ακμή  $\{w, v\}$ . ■



Σχήμα 4.1: Επαγωγικό Βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.

**Πόρισμα 4.1** Γράφημα  $G$ ,  $|G| \geq 3$ , είναι 2-συνεκτικό αν κάθε δύο κορυφές του βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

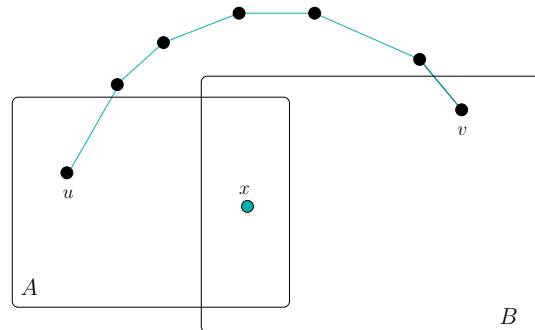
## 4.2 Το Θεώρημα του Menger

Ο ορισμός της συνεκτικότητας μας λέει ότι ένα γράφημα έχει υψηλή συνεκτικότητα αν δεν είναι ευάλωτο στις διαγραφές κορυφών. Το Θεώρημα του Menger, ή για την ακρίβεια τα πορίσματα του, δίνουν ένα «δύϊκο» χαρακτηρισμό της συνεκτικότητας μέσω της ύπαρξης πολλών διακεκριμένων μονοπατιών.

**Ορισμός 4.3** Δίνεται γράφημα  $G = (V, E)$  και έστω  $A, B \subseteq V$ . Καλούμε  $A-B$  μονοπάτι ένα  $u-v$  μονοπάτι  $P$  όπου  $u \in A$ ,  $v \in B$  και όλες οι εσωτερικές κορυφές του  $P$  δεν ανήκουν στο  $A \cup B$ . Οποιοδήποτε  $x \in A \cap B$  αποτελεί ένα τετριμμένο  $A-B$  μονοπάτι.

Βλ. Σχήμα 4.2 για μια απεικόνιση  $A-B$  μονοπατιού.

**Ορισμός 4.4** Δίνεται γράφημα  $G = (V, E)$  και έστω  $A, B \subseteq V$ . Ένα σύνολο  $X \subseteq V$  ( $X \subseteq E$ ) τ. ώ. κάθε  $A$ - $B$  μονοπάτι στο  $G$  περιέχει κορυφή (ακμή) από το  $X$  λέγεται  $A$ - $B$  διαχωριστής (ακμοδιαχωριστής).



Σχήμα 4.2: Δύο  $A$ - $B$  μονοπάτια.

**Παρατήρηση 4.2** Αν  $X$  είναι  $A$ - $B$  διαχωριστής, τότε  $A \cap B \subseteq X$ .

**Παρατήρηση 4.3** Αν  $X$  είναι  $A$ - $B$  διαχωριστής, το  $X$  δεν είναι απαραίτητα διαχωριστής του γραφήματος. Το  $A$  ή το  $B$  είναι  $A$ - $B$  διαχωριστές.

**Άσκηση 4.1** Αν  $X$  είναι  $A$ - $B$  διαχωριστής, στο  $G \setminus X$  δεν υπάρχει κανένα  $u$ - $v$  μονοπάτι όπου  $u \in A$  και  $v \in B$ .

**Θεώρημα 4.2 (Menger, 1927)** Δίνεται γράφημα  $G = (V, E)$  και έστω  $A, B \subseteq V$ . Ο μέγιστος αριθμός διακεκριμένων  $A$ - $B$  μονοπατιών είναι ίσος με το ελάχιστο μέγεθος ενός  $A$ - $B$  διαχωριστή.

**Απόδειξη:** Αν  $X$  είναι  $A$ - $B$  διαχωριστής, κάθε  $A$ - $B$  μονοπάτι πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από το  $X$ . Άρα ο μέγιστος αριθμος διακεκριμένων μονοπατιών είναι μικρότερος ή ίσος από το μέγεθος ενός οποιουδήποτε διαχωριστή  $X$ . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι δεδομένου ενός  $A$ - $B$  διαχωριστή  $X$  ελάχιστου μεγέθους, υπάρχουν  $|X|$  διακεκριμένα  $A$ - $B$  μονοπάτια. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο  $|E|$ . Όπου αναφερόμαστε παρακάτω σε διαχωριστή, εννοείται  $A$ - $B$  διαχωριστής.

**Βάση:**  $|E| = 0$ . Υπάρχουν ακριβώς  $|A \cap B|$  διακεκριμένα  $A$ - $B$  μονοπάτια (όλα τετριμμένα), και το  $A \cap B$  είναι διαχωριστής, άρα η πρόταση ισχύει.

**Επαγωγικό Βήμα:**  $|E| \geq 1$ . Διαλέγουμε ακμή  $e = \{x, y\}$  και ορίζουμε  $G' = G - e$ . Έστω  $S$  ένας ελάχιστος  $A$ - $B$  διαχωριστής στο  $G'$ , με  $|S| = k$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

**Περίπτωση 1:** ένα από τα  $S \cup \{x\}$ ,  $S \cup \{y\}$  δεν είναι ελάχιστος διαχωριστής στο  $G$ . Χβτγ, υποθέτουμε ότι το  $S \cup \{x\}$  δεν είναι ελάχιστος διαχωριστής. Το  $S \cup \{x\}$  είναι  $A$ - $B$  διαχωριστής στο  $G$ , αφού τα μόνα  $A$ - $B$  μονοπάτια στο  $G$  που δεν υπάρχουν και στο  $G'$  είναι αυτά που περνάνε από την ακμή  $e$ , άρα και από την κορυφή  $x$ . Επομένως, το ελάχιστο μέγεθος διαχωριστή στο  $G$  είναι μικρότερο από  $|S \cup \{x\}| \leq k + 1$ , άρα είναι το πολύ  $k$ . Είναι επίσης τουλάχιστον  $k = |S|$ , αφού ένας διαχωριστής στο  $G$  είναι και διαχωριστής στο  $G'$ . Άρα αρκεί να βρούμε  $k$  το πλήθος διακεκριμένα  $A$ - $B$  μονοπάτια στο  $G$ . Από την Επαγωγική Υπόθεση, υπάρχουν τόσα μονοπάτια στο  $G'$ .

*Περίπτωση 2:* το  $S \cup \{x\}$  και το  $S \cup \{y\}$  είναι ελάχιστοι διαχωριστές στο  $G$ . Σε αυτή την περίπτωση είτε και οι δύο κορυφές  $x$  και  $y$  ανήκουν στο  $S$  είτε καμία τους δεν ανήκει (ειδάλλως θα είχαμε δύο ελάχιστους διαχωριστές με διαφορετικά μεγέθη). Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

*Περίπτωση 2α:*  $x, y \in S$ . Άρα το  $S$  είναι ελάχιστος διαχωριστής μεγέθους  $k$  στο  $G$ . Τα  $k$  διακεκριμένα  $A$ - $B$  μονοπάτια που από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχουν στο  $G'$  είναι και μονοπάτια του  $G$ .

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης απομένει να ασχοληθούμε μόνο με την ακόλουθη υποπερίπτωση.

*Περίπτωση 2β:*  $x, y \notin S$ . Ορίζουμε  $G_A$  (αντ.  $G_B$ ) το γράφημα που ενάγεται από το  $S \cup \{x\}$  (αντ.  $S \cup \{y\}$ ) και τις συνιστώσες του  $G - (S \cup \{x\})$  (αντ.  $G - (S \cup \{y\})$ ) που τέμνουν το  $A$  ( $B$ ).

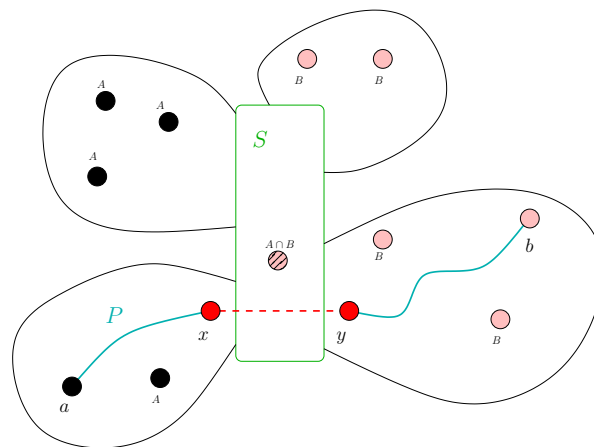
**Ισχυρισμός 4.1** Χωρίς βλάβη της γενικότητας,  $y \notin V(G_A)$  και  $x \notin V(G_B)$ .

Από τον Ισχυρισμό 4.1 προκύπτει ότι (i) οι μόνες κοινές κορυφές των  $G_A$  και  $G_B$  είναι οι κορυφές του  $S$  και (ii)  $e \notin E(G_A)$  και  $e \notin E(G_B)$ . Άρα  $|E(G_A)| < |E|$  και  $|E(G_B)| < |E|$ .

**Ισχυρισμός 4.2** Κάθε  $A$ - $(S \cup \{x\})$  (αντ.  $(S \cup \{y\})$ - $B$ ) διαχωριστής στο  $G_A$  (αντ.  $G_B$ ) είναι και  $A$ - $B$  διαχωριστής στο  $G$ .

Προς απόδειξη του Ισχυρισμού 4.2, οποιοδήποτε  $A$ - $B$  μονοπάτι  $Q$  στο  $G$  διέρχεται από κορυφές του  $S \cup \{x\}$ . Ορίζεται πρόθεμα  $Q'$  του  $Q$  που καταλήγει σε κορυφή του  $S \cup \{x\}$  και είτε είναι τετριμμένο είτε δεν έχει καμία εσωτερική κορυφή στο  $S \cup \{x\}$ . Το  $Q'$  ανήκει εξ ολοκλήρου στο  $G_A$ . Ομοίως αποδεικνύεται ο Ισχυρισμός 4.2 και για το  $G_B$ . Συνεπώς ο ελάχιστος  $A$ - $(S \cup \{x\})$  (αντ.  $(S \cup \{y\})$ - $B$ ) διαχωριστής στο  $G_A$  (αντ.  $G_B$ ) έχει μέγεθος τουλάχιστον  $k + 1$ .

Εφαρμόζοντας την Επαγωγική Υπόθεση στα  $G_A$  και  $G_B$  παίρνουμε αντίστοιχα  $k + 1$   $A$ - $(S \cup \{x\})$  και  $k + 1$   $(S \cup \{y\})$ - $B$  διακεκριμένα μονοπάτια. Τα  $2k + 2$  αυτά μονοπάτια τέμνονται μόνο στο  $S$ . Ενώνουμε ανά δύο τα μονοπάτια που έχουν κοινό άκρο στο  $S$  και για το  $A$ - $\{x\}$  μονοπάτι και το  $\{y\}$ - $B$  μονοπάτι τα συνδέουμε βάζοντας ανάμεσα τους την ακμή  $e$ . Πήραμε  $k + 1$  διακεκριμένα  $A$ - $B$  μονοπάτια στο  $G$ .



Σχήμα 4.3: Μονοπάτι  $P$  στην απόδειξη του Ισχυρισμού 4.1. Στην Περίπτωση 2β, όλες οι κορυφές της τομής  $A \cap B$  ανήκουν στο  $S$ .

Απομένει να αποδείξουμε τον Ισχυρισμό 4.1. Το γράφημα  $G - S$  περιέχει ένα  $A-B$  μονοπάτι  $P$  που ξεκινάει από το  $a \in A$  και καταλήγει στο  $b \in B$ . Ο λόγος είναι ότι το  $S \cup \{x\}$  είναι ελάχιστος διαχωριστής και  $x \notin S$ . Αφού το  $S$  είναι διαχωριστής στο  $G'$ , το  $P$  πρέπει να περιέχει την ακμή  $e$ . Χβτγ, πάνω στο μονοπάτι το  $x$  είναι πλησιέστερα στο  $a$  από ότι το  $y$  (βλ. ενδεικτικά Σχήμα 4.3, όμως σε καμία περίπτωση το σχήμα δεν υποκαθιστά το κείμενο της απόδειξης!). Το  $y \rightsquigarrow b$  υπομονοπάτι του  $P$  δεν περιέχει εξ ορισμού το  $x$  και επίσης δεν τέμνει το  $S$  γιατί το  $P$  επιβιώνει της διαγραφής του  $S$ . Άρα το υπομονοπάτι δεν τέμνει το  $S \cup \{x\}$ . Αφού το  $S \cup \{x\}$  είναι  $A-B$  διαχωριστής, όλα τα  $A-\{y\}$  μονοπάτια πρέπει να τέμνουν το  $S \cup \{x\}$ . Αφού  $y \notin S$  και δεν υπάρχουν  $A-\{y\}$  μονοπάτια στο  $G - (S \cup \{x\})$ , συμπεραίνουμε ότι  $y \notin V(G_A)$ , συνεπώς  $e \notin E(G_A)$ . Συμμετρικά αποδεικνύεται ότι  $x \notin V(G_B)$ , συνεπώς  $e \notin E(G_B)$ . ■

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 4.2 δεν αναφέρει το  $\kappa(G)$ . Σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.3, ένας  $A-B$  διαχωριστής δεν είναι απαραίτητα διαχωριστής του  $G$ . Αν το  $G$  είναι  $k$ -συνεχτικό δεν έπεται ότι κάθε  $A-B$  διαχωριστής έχει τουλάχιστον  $k$  κορυφές.