

7.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος του Hall

Πόρισμα 7.1 (Ελλειμματική εκδοχή του Θεωρήματος Hall) Δίνεται διμερές γράφημα $G = (A \cup B, E)$. Εάν υπάρχει $d \in \mathbb{N}$ τ. ώ.

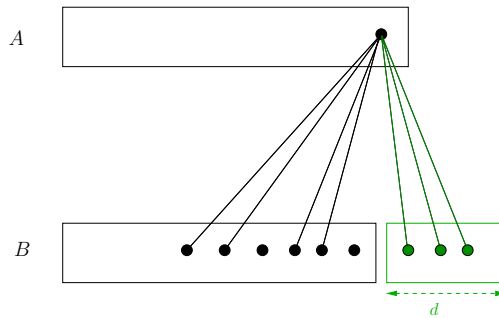
$$|N(S)| \geq |S| - d, \quad \forall S \subseteq A$$

τότε το G περιέχει ταίριασμα μεγέθους $|A| - d$.

Απόδειξη. Προσθέτουμε d το πλήθος κορυφές και ενώνουμε την κάθε μία από αυτές με όλες τις κορυφές του A . Έστω G' το προκύπτων διμερές γράφημα. Βλ. Σχήμα 7.1. Παίρνουμε ότι

$$\forall S \subseteq A, |N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| + d \geq |S| - d + d = |S|.$$

Επομένως από το Θεώρημα του Hall (Θεώρημα 6.2) το G' έχει ταίριασμα M του A . Τουλάχιστον $|A| - d$ από τις ακμές του M είναι ακμές του G . Άρα το G έχει ταίριασμα μεγέθους $|A| - d$. ■



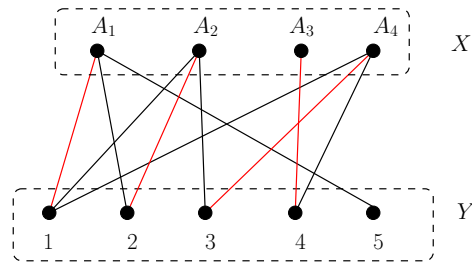
Σχήμα 7.1: Κατασκευή του G' στην απόδειξη του Πορίσματος 7.1.

Αν $n \in \mathbb{N}$, με $[n]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{1, \dots, n\}$.

Ορισμός 7.1 Έστω A_1, \dots, A_n μια συλλογή πεπερασμένων συνόλων. Οικογένεια $\{a_1, \dots, a_n\}$ καλείται Σύστημα Διακεκριμένων Αντιπροσώπων (ΣΔΑ) αν $\forall i \in [n]$, τα a_i είναι διακεκριμένα και $a_i \in A_i$.

Πόρισμα 7.2 Μια συλλογή συνόλων A_1, \dots, A_n έχει ΣΔΑ αν και μόνο αν $\forall I \subseteq [n]$ ισχύει ότι $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$.

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα $G = (X \cup Y, E)$ ως εξής. Θέτουμε $X = \{A_1, \dots, A_n\}$ και $Y = \bigcup_{i \in [n]} A_i$. Επιπλέον, $\{A_i, a\} \in E$ αν και μόνο αν $a \in A_i$. Παρατηρούμε ότι κάθε ΣΔΑ της συλλογής A_1, \dots, A_n αντιστοιχεί σε ταίριασμα του X και αντιστρόφως. Το πόρισμα προκύπτει άμεσα εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Hall (Θεώρημα 6.2) στο G . Βλ. Σχήμα 7.2. ■

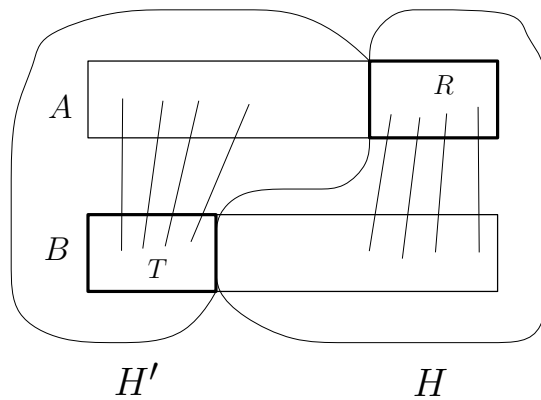


Σχήμα 7.2: Παράδειγμα για το Πρόρισμα 7.2, όπου: $A_1 = \{1, 2, 5\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{1, 3, 4\}$.

Θεώρημα 7.1 (Kőnig, 1931) Έστω $G = (A \cup B, E)$ διμερές γράφημα. Τότε $\nu(G) = \tau(G)$.

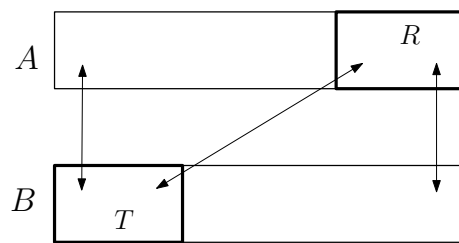
Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη από την Πρόταση 6.1 ότι $\nu(G) \leq \tau(G)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\nu(G) \geq \tau(G)$.

Έστω $U \subseteq V(G)$ κάλυμμα κορυφών ελάχιστου μεγέθους. Θα δείξουμε ότι στο G υπάρχει ταίριασμα μεγέθους $|U|$. Θέτουμε $R = U \cap A$ και $T = U \cap B$. Έστω H, H' εναγόμενα υπογραφήματα του G τέτοια ώστε $H = G[R \cup (B \setminus T)]$ και $H' = G[T \cup (A \setminus R)]$. Βλ. Σχήμα 7.3. Θα δείξουμε ότι το H έχει ταίριασμα μεγέθους $|R|$ και το H' ταίριασμα μεγέθους $|T|$.



Σχήμα 7.3: Απεικόνιση κατασκευής των υπογραφημάτων H και H' .

Αφού το $U = R \cup T$ είναι κάλυμμα κορυφών του G , στο G δεν υπάρχει ακμή από το $A \setminus R$ στο $B \setminus T$. Βλ. Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4: Τα τρία είδη ακμών που υπάρχουν στο G .

Έστω $S \subseteq R$ και $N_H(S) \subseteq B \setminus T$. Το $N_H(S)$ καλύπτει όλες τις ακμές που προσπίπτουν στο S και δεν προσπίπτουν στο T . Αν $|N_H(S)| < |S|$, τότε μπορούμε στο U να αντικαταστήσουμε το S με το $N_H(S)$ και να πάρουμε κάλυμμα κορυφών του G μικρότερου μεγέθους, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως η συνθήκη (6.1) του Θ. Hall ισχύει στο H , και παίρνουμε ταίριασμα M_H του R . Ομοίως στο H' παίρνουμε ταίριασμα $M_{H'}$ του T . Εκ κατασκευής, το $M_H \cup M_{H'}$ είναι ταίριασμα στο G μεγέθους $|U|$. ■

7.2 Ανεξάρτητα σύνολα κορυφών, καλύμματα ακμών

Ορισμός 7.2 Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $S \subseteq V$. Το S λέγεται ανεξάρτητο σύνολο (independent set, stable set) αν $\forall v, u \in S, \{v, u\} \notin E$.

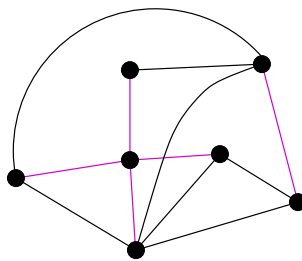
Συμβολίζουμε με $\alpha(G)$ τον πληθάρημο του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου του G , δηλ.

$$\alpha(G) = \max_{S \subseteq V(G)} |S|, \text{ όπου } S \text{ ανεξάρτητο.}$$

Παρατήρηση 7.1 Το $S \subseteq V(G)$ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $V(G) \setminus S$ είναι κάλυμμα κορυφών. Όλες οι ακμές του $E(G)$ προσπίπτουν σε τουλάχιστον μια κορυφή του $V(G) \setminus S$ αν το S ανεξάρτητο.

Πρόταση 7.1 Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$.

Ορισμός 7.3 Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $F \subseteq E$. Το F λέγεται κάλυμμα ακμών (edge cover) αν $\forall v \in V, \exists e \in E$ τέτοια ώστε $v \in e$.



Σχήμα 7.5: Παράδειγμα ενός καλύμματος ακμών μεγέθους 5.

Συμβολίζουμε με $\rho(G)$ τον πληθάρημο του ελάχιστου καλύμματος ακμών του G , δηλ.

$$\rho(G) = \min_{F \subseteq E(G)} |F|, \text{ όπου } F \text{ κάλυμμα ακμών.}$$

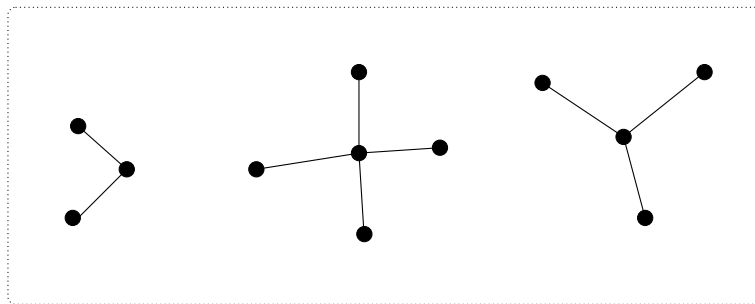
Παρατήρηση 7.2 Αν $F \subseteq E(G)$ είναι κάλυμμα ακμών ενός γραφήματος G , δεν έπεται ότι το $E(G) \setminus F$ είναι ταίριασμα.

Πρόταση 7.2 Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ που δεν έχει απομονωμένη κορυφή (βαθμού 0) ισχύει ότι $\nu(G) + \rho(G) = |V|$.

Απόδειξη. Έστω $C \subseteq E$ κάλυμμα ακμών του G τέτοιο ώστε $|C| = \rho(G)$. Ορίζουμε το υπογράφημα $\langle C \rangle := (V, C)$.

Ονομάζουμε ένα γράφημα *αστέρι* αν είναι ισόμορφο με το $K_{1,t}$ για κάποιο $t \geq 1$. Το C ως ελάχιστο είναι και ελαχιστικό, άρα οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $\langle C \rangle$ είναι αστέρια, όπως στο Σχήμα 7.6. Αν k είναι το πλήθος των συνιστωσών (δηλ. αστεριών) του δάσους $\langle C \rangle$, τότε ισχύει ότι $k = |V| - \rho(G)$. Κάθε αστέρι του $\langle C \rangle$ περιέχει τουλάχιστον μια ακμή. Αν πάρουμε μια ακμή από κάθε συνιστώσα, παίρνουμε ταίριασμα M μεγέθους k . Άρα:

$$\nu(G) \geq k = |V| - \rho(G) \Rightarrow \nu(G) + \rho(G) \geq |V| \quad (7.1)$$



Σχήμα 7.6: Απεικόνιση του $\langle C \rangle$.

Έστω τώρα M_0 ένα μέγιστο ταίριασμα στο G και U το σύνολο των κορυφών που δεν καλύπτονται από το M_0 . Προφανώς το U είναι ανεξάρτητο (independent set) στο G . Αφού το G δεν έχει απομονωμένες κορυφές, μπορούμε για κάθε μια από τις $|V| - 2\nu(G)$ κορυφές του U να διαλέξουμε μια ακμή που την καλύπτει. Το σύνολο των ακμών που διαλέξαμε το ονομάζουμε S και έπεται ότι:

$$\rho(G) \leq |M_0 \cup S| = \nu(G) + |V| - 2\nu(G) = |V| - \nu(G) \Rightarrow \nu(G) + \rho(G) \leq |V| \quad (7.2)$$

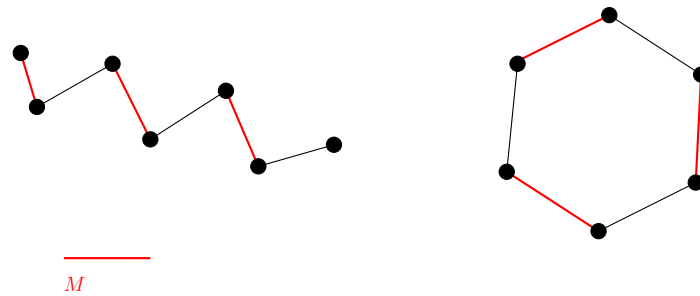
Από τις σχέσεις (7.1) και (7.2) παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Η απόδειξη της Πρότασης 7.2 υποδεικνύει έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για την εύρεση ελάχιστου καλύμματος ακμών. Υπολόγισε ένα μέγιστο ταίριασμα M και κάλυψε με άπληστο τρόπο (με μία ακμή ανά κορυφή) τις $|V| - 2\nu(G)$ κορυφές που δεν καλύπτει το M . Τελικά χρησιμοποιούμε $|V| - \nu(G) = \rho(G)$ ακμές που είναι το βέλτιστο.

Πόρισμα 7.3 Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό του ελάχιστου καλύμματος ακμών.

7.3 Εναλλασσόμενα μονοπάτια, Συνθήκη του Tutte

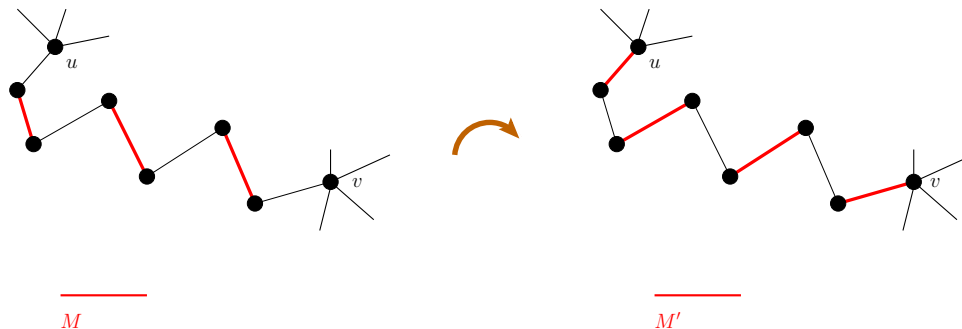
Ορισμός 7.4 Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και ένα ταίριασμα $M \subseteq E$. M -εναλλασσόμενο (M -alternating) μονοπάτι (ή κύκλος) στο G είναι ένα μονοπάτι (αντίστοιχα κύκλος) του οποίου οι ακμές ανήκουν εναλλάξ στο M και το $E \setminus M$.



Σχήμα 7.7: Παράδειγμα ενός εναλλασσόμενου μονοπατιού και ενός εναλλασσόμενου κύκλου. Οι κόκκινες ακμές ανήκουν στο M .

Παρατηρήστε ότι ένα μονοπάτι μήκους 1 είναι M -εναλλασσόμενο.

Ένα M -εναλλασσόμενο μονοπάτι $P = (v_1, \dots, v_k)$, $k \geq 2$, του G του οποίου τα άκρα v_1 και v_k δεν καλύπτονται από το M καλείται M -αυξητικό (M -augmenting). Εάν το υποκείμενο ταίριασμα εννοείται από τα συμφραζόμενα θα αναφερόμαστε απλά σε εναλλασσόμενο ή αυξητικό μονοπάτι. Το σύνολο $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$ είναι ταίριασμα στο G με την ιδιότητα $|M'| = |M| + 1$. Βλ. Σχήμα 7.8. Επομένως αν το M είναι μέγιστο, δεν υπάρχει αυξητικό μονοπάτι. Θα αποδείξουμε ότι τα μέγιστα ταίριασματα χαρακτηρίζονται από την απουσία αυξητικών μονοπατιών. Με άλλα λόγια η συνθήκη (απουσία αυξητικού μονοπατιού) είναι αναγκαία και ικανή.



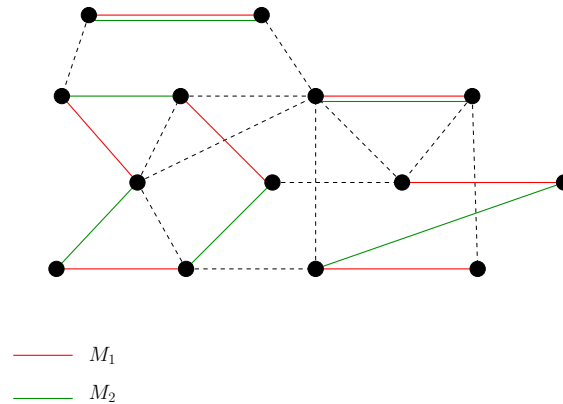
Σχήμα 7.8: Παράδειγμα ενός M -αυξητικού μονοπατιού από το u στο v .

Ορισμός 7.5 Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A, B συμβολίζεται $A \Delta B$ και ορίζεται ως το σύνολο $(A - B) \cup (B - A)$.

Λήμμα 7.1 Δίνονται δύο ταίριασματα M, M' . Κάθε συνεκτική συνιστώσα της συμμετρικής τους διαφοράς είναι μονοπάτι ή άρτιος κύκλος.

Απόδειξη. Έστω $F = M \Delta M'$. Αφού τα M, M' είναι ταίριασματα, το πολύ μία ακμή από το καθένα προσπίπτει σε μία κορυφή. Επομένως στο F το πολύ δύο ακμές προσπίπτουν σε κάθε κορυφή. Έχουμε λοιπόν γράφημα με μέγιστο βαθμό 2, άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα πρέπει να είναι κύκλος ή μονοπάτι. Επιπλέον, σε κάθε κύκλο ή μονοπάτι οι ακμές εναλλάσσονται ανάμεσα σε ακμές του $M - M'$ και ακμές του $M' - M$. Επομένως κάθε κύκλος έχει άρτιο μήκος με ίσο πλήθος ακμών από τα δύο σύνολα. ■

Στο Σχήμα 7.9 δίνουμε ένα παράδειγμα της συμμετρικής διαφοράς δύο ταίριασμάτων.



Σχήμα 7.9: Δύο ταιριάσματα M_1, M_2 . Οι διακεκομμένες ακμές δεν ανήκουν σε κανένα από τα δύο. Η συμμετρική διαφορά $M_1 \Delta M_2$ αποτελείται από έναν κύκλο μήκους 6 και ένα μονοπάτι μήκους 3.

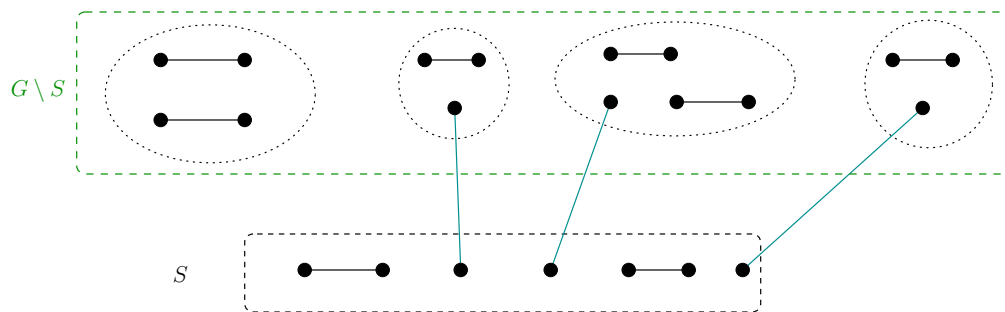
Θεώρημα 7.2 (Berge, 1957) Ένα ταιρίασμα M του γραφήματος G είναι μέγιστο αν και μόνο αν το G δεν περιέχει M -αυξητικό μονοπάτι.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο αποδεικνύουμε με αντιθετοαντιστροφή.

Έστω M και M' ταιριάσματα με $|M'| > |M|$. Ορίζουμε $F = M \Delta M'$. Από το Λήμμα 7.1 το F αποτελείται από μονοπάτια και άρτιους κύκλους και οι κύκλοι έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών από το M και το M' . Πρέπει λοιπόν σε κάποιο μονοπάτι P να υπάρχουν περισσότερες ακμές από το M' . Ένα τέτοιο μονοπάτι πρέπει να αρχίζει και να τελειώνει με ακμές του M' . Παρατηρήστε ότι τα δύο άκρα του μονοπατιού πρέπει να είναι αταίριαστα στο M . Άρα το P είναι M -αυξητικό μονοπάτι. ■

Σε ένα γράφημα G , συμβολίζουμε με $q(G)$ το πλήθος των συνιστωσών περιττής τάξης του G .

Παρατήρηση 7.3 Αν το G έχει τέλει ταιρίασμα, τότε $\forall S \subseteq V(G)$ ισχύει ότι $q(G \setminus S) \leq |S|$.



Σχήμα 7.10: Απεικόνιση της Παρατήρησης 7.3. Στο παράδειγμα αυτό $q(G \setminus S) = 3$. Σε ένα τέλει ταιρίασμα, το S πρέπει να παρέχει τουλάχιστον τρία ταιρία για κορυφές του $G \setminus S$.

Στην επόμενη διάλεξη θα δείξουμε ότι η συνθήκη της Παρατήρησης 7.3, γνωστή και ως Συνθήκη του Tutte, εκτός από αναγκαία είναι και ικανή για την ύπαρξη τέλει ταιριάσματος.