Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 8: 3.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ιωσήφ Μουλίνος & Σ. Κ.

8.1 Το Θεώρημα του Tutte

Ορισμός 8.1 *Ένα γράφημα G καλείται* κορεσμένο μη παραγοντοποιήσιμο (saturated non-factorizable), *εάν δεν έχει τέλειο ταίριασμα, αλλά $\forall e \notin E(G)$, το γράφημα $G \cup e$ έχει τέλειο ταίριασμα. (Δηλαδή το G είναι μεγιστικό ως προς τις ακμές γράφημα χωρίς τέλειο ταίριασμα.)*

Θεώρημα 8.1 (Tutte, 1947) *Ένα γράφημα G έχει τέλειο ταίριασμα ανν*

$$q(G \setminus S) \leq |S|, \ \forall S \subseteq V(G) \tag{8.1}$$

όπου με $q(\cdot)$ συμβολίζεται ο αριθμός των περιττών συνιστωσών ενός γραφήματος.

Απόδειξη.
$'' \Rightarrow ''$ Αν το G έχει τέλειο ταίριασμα πρέπει να ικανοποιεί την (8.1) την οποία στο εξής καλούμε *συνθήκη του Tutte* ή συντομογραφικά *(T.C.)*.
$'' \Leftarrow ''$ Θα δείξουμε ότι αν ισχύει η συνθήκη του Tutte:

$$q(G \setminus S) \leq |S|, \ \forall S \subseteq V(G)$$

τότε στο G υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Με αντιθετοαντιστροφή, θα δείξουμε ότι αν στο G δεν υπάρχει τέλειο ταίριασμα, τότε υπάρχει σύνολο $S \subseteq V(G)$ που παραβιάζει την (T.C.).

Ισχυρισμός 8.1 *Χβτγ το $|G|$ είναι άρτιος αριθμός.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν $|G|$ περιττός, ορίζουμε $S := \emptyset$. Ισχύει ότι $|S| = 0$ και $q(G \setminus S) = q(G) \geq 1$. ∎

Ισχυρισμός 8.2 *Χβτγ το G είναι μεγιστικό (ως προς τις ακμές) γράφημα χωρίς τέλειο ταίριασμα. Δηλαδή το G είναι κορεσμένο μη παραγοντοποιήσιμο (κ.μ.π.).*

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν το G δεν είναι κ.μ.π. προσθέτουμε ακμές ώστε να γίνει. Έστω G' το γράφημα που προκύπτει. Θα δείξουμε ότι αν κάποιο $S \subseteq V(G)$ παραβιάζει την (T.C.) στο G', την παραβιάζει και στο G.

Καταρχήν ο αριθμός των συνιστωσών στο $G \setminus S$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των συνιστωσών στο $G' \setminus S$. Μία περιττή συνιστώσα του $G' \setminus S$ είτε είναι περιττή και στο G, είτε είναι ένωση κάποιων συνιστωσών του G, τουλάχιστον μία εκ των οποίων είναι περιττή. Συνεπώς

$$q(G \setminus S) \geq q(G' \setminus S).$$

∎

Ισχυρισμός 8.3 *Ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ παραβιάζει την (T.C.) στο G ανν*

$$\text{όλες οι συνιστώσες του } G \setminus S \text{ είναι κλίκες και κάθε } s \in S \text{ γειτονεύει με κάθε } v \in V(G) - \{s\}. \quad (\star)$$

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν S παραβιάζει την (T.C.) τότε η $(\star)$ ικανοποιείται από τη μεγιστικότητα του G ως προς τις ακμές. Αντίστροφα, έστω S που ικανοποιεί την $(\star)$, και έστω ότι ικανοποιεί την (T.C.).

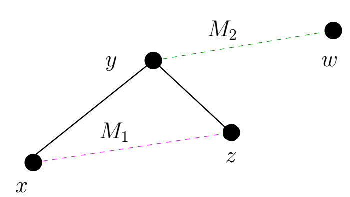
Τότε στις άρτιες συνιστώσες του $G \setminus S$ υπάρχει τετριμμένα τέλειο ταίριασμα. Σε κάθε περιττή συνιστώσα υπάρχει τετριμμένα μέγιστο ταίριασμα το οποίο εξαιρεί μια κορυφή η οποία συνδέεται με ακμή με το S. Επειδή ικανοποιείται η (T.C.) $q(G \setminus S)$ κορυφές του S είναι διαθέσιμες ως ταίρια, μία για κάθε περιττή συνιστώσα του $G \setminus S$. Απομένει να ταιριάξουμε τις υπόλοιπες κορυφές του S. Από τον Ισχυρισμό 8.1 η τάξη $|G|$ είναι άρτιος αριθμός. Ο αριθμός αταίριαστων κορυφών στο S είναι $|S| - q(G \setminus S)$ και είναι άρτιος (γιατί;). Άρα οι κορυφές του S που δεν ταιριάζονται με κορυφές του $V(G) \setminus S$, μπορούν να ταιριαστούν μεταξύ τους. Συνεπώς το G έχει τέλειο ταίριασμα, άτοπο. Αρα το S δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του Tutte. ∎

Αρκεί να βρούμε σύνολο S που ικανοποιεί την $(\star)$. Ορίζουμε

$$S = \{s \in V \mid \forall v \in V(G) \setminus \{s\},\ sv \in E(G)\}.$$

Σημειώνεται ότι το S μπορεί να είναι κενό. Θα δείξουμε ότι αν οι συνιστώσες του $G \setminus S$ δεν είναι κλίκες, τότε υπάρχει τέλειο ταίριασμα στο G, άτοπο.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 κορυφές στην ίδια συνιστώσα του $G \setminus S$ που δεν συνδέονται μεταξύ τους. Τότε σε ένα συντομότερο μονοπάτι από τη μια στην άλλη, θα υπάρχουν μη γειτονικές κορυφές x, z με κοινό γείτονα y.



Σχήμα 8.1: Μη γειτονικές κορυφές x, z με κοινό γείτονα y. Τα διακεκομμένα τμήματα xz και yw είναι ακμές που αν προστεθούν, θα προκύψουν τα τέλεια ταιριάσματα M_1 και M_2, αντίστοιχα.

Αφού $y \notin S$, $\exists w \in V(G)$ τ. ώ. w δεν είναι γείτονας του y. Από τον Ισχυρισμό 8.2, υπάρχουν τέλεια ταιριάσματα M_1 στον $G \cup xz$ και M_2 στον $G \cup yw$ (βλ. Σχήμα 8.1). Παρατηρήστε ότι $\{xy, yz\} \cap (M_1 \cup M_2) = \varnothing$.

Ορίζουμε το γράφημα

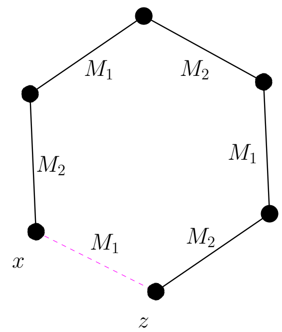
$$H := (V(G), M_1 \oplus M_2)$$

όπου $M_1 \oplus M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$, η συμμετρική διαφορά των M_1 και M_2. Παρατηρούμε ότι οι xz και yw είναι ακμές του H.

Παρατήρηση 8.1 *Στο H κάθε κορυφή έχει βαθμό 0 ή 2, δηλαδή το γράφημα H είναι ένωση ξένων κύκλων και απομονωμένων κορυφών. Οι κύκλοι αποτελούνται από εναλλασσόμενες ακμές του M_1 και του M_2.*

Ορίζουμε C να είναι κύκλος του H που περιέχει την ακμή xz. Προφανώς $|C|$ άρτιος αριθμός αφού ο C είναι M_1-εναλλασσόμενος και M_2-εναλλασσόμενος.

Περίπτωση 1: $yw \notin E(C)$ (βλ. Σχήμα 8.2).



Σχήμα 8.2: Περίπτωση 1 της απόδειξης.

Τότε $M := (M_2 \cap E(C)) \cup (M_1 \setminus E(C)) \subseteq E(G)$ είναι τέλειο ταίριασμα που δεν χρησιμοποιεί τη xz ούτε τη yw, αλλά μόνο ακμές του G.

Περίπτωση 2: $yw \in E(C)$.

Διατρέχουμε τον κύκλο C ξεκινώντας από την κορυφή w και συνεχίζοντας με την κορυφή y.

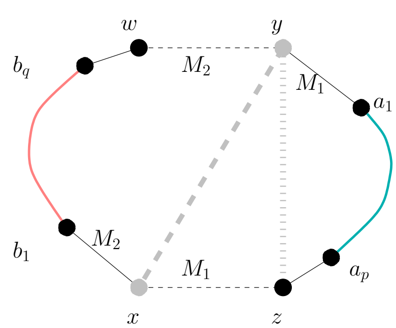
Περίπτωση 2α: Η διάσχιση του κύκλου μας δίνει ακολουθία κορυφών της μορφής (βλ. Σχήμα 8.3)

$$w, y, a_1, \ldots, a_p, z, x, b_1, \ldots, b_q.$$

Το μονοπάτι $y, a_1, \ldots, a_p, z$ ξεκινάει με ακμή του M_1 και τελειώνει με ακμή του M_2 άρα έχει άρτιο μήκος (αριθμό ακμών) επομένως περιττό αριθμό από κορυφές. Άρα το p είναι περιττό. Αφού $|V(C)| = 4+p+q$ και το q είναι περιττό. Το σύνολο ακμών

$$M^* = \{a_1a_2, \ldots, a_{p-2}a_{p-1}, a_pz, yx, b_1b_2, \ldots, b_{q-2}b_{q-1}, b_qw\} \subset E(G)$$

είναι τέλειο ταίριασμα του $V(C)$. Όλες οι κορυφές του C είναι ταιριασμένες στο $M_1 \cap E(C)$ άρα καμία ακμή του $M_1 \setminus E(C)$ δεν προσπίπτει σε κορυφή του κύκλου. Επίσης το $M_1 \setminus E(C)$ είναι τέλειο ταίριασμα στο $V \setminus V(C)$. Έπεται ότι το σύνολο $(M_1 \setminus E(C)) \cup M^*$ είναι τέλειο ταίριασμα στο G.



Σχήμα 8.3: Περίπτωση 2α της απόδειξης.

Περίπτωση 2β: Η διάσχιση του κύκλου μας δίνει ακολουθία κορυφών της μορφής:

$$w, y, a_1, \ldots, a_p, x, z, b_1, \ldots, b_q.$$

Ομοίως με την προηγούμενη όπου όμως αντί για την ακμή yx χρησιμοποιούμε την yz στο M^*.

∎