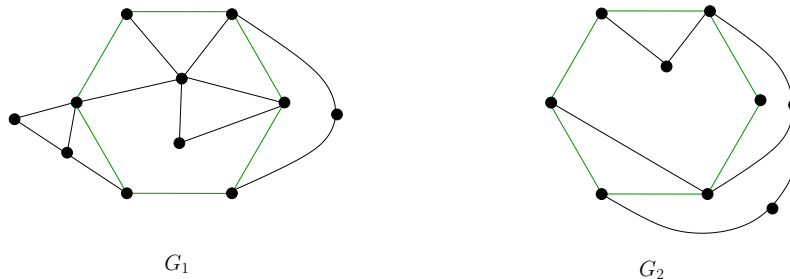


### 13.1 Εναγόμενοι κύκλοι

**Ορισμός 13.1** Ένας κύκλος  $C$  του γραφήματος  $G = (V, E)$ , καλείται εναγόμενος αν  $C = G[V(C)]$ . Δηλαδή, εναγόμενος κύκλος  $C$  είναι κύκλος ο οποίος δεν έχει χορδές.

Βλ. Σχήμα 13.1 για ένα παράδειγμα εναγόμενου κύκλου.



Σχήμα 13.1: Το  $G_1$  περιέχει εναγόμενο κύκλο  $C_6$ . Το  $G_2$  περιέχει ένα υπογράφημα ισόμορφο με το  $C_6$  που δεν είναι εναγόμενο υπογράφημα.

**Λήμμα 13.1** Έστω κύκλος  $C$  σε επίπεδο γράφημα  $G = (V, E)$  τ.ώ. το γράφημα  $G$  δεν είναι ο κύκλος  $C$  συν μια χορδή. Τότε ο  $C$  ορίζει το σύνορο όψης σε κάθε εμβάπτιση του  $G$  στο επίπεδο αν και μόνο αν ο  $C$  είναι εναγόμενος κύκλος και δεν είναι διαχωριστής του  $G$ .

**Απόδειξη:**

« $\Leftarrow$ »:

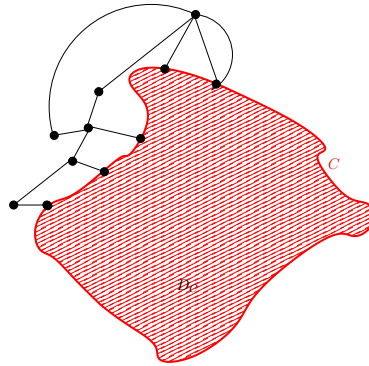
Έστω εμβάπτιση  $\Gamma$  του  $G$  στο επίπεδο. Αφού το  $G \setminus C$  συνεκτικό, από το Θεώρημα του Jordan (Θεώρημα 10.1) θα περιέχεται εξολοκλήρου είτε στο εσωτερικό του δίσκου  $D_C$  που ορίζει ο  $C$  στη  $\Gamma$  (βλ. Σχήμα 13.2) είτε στο  $\mathbb{R}^2 \setminus D_C$ . Σε κάθε περίπτωση, η «άλλη» περιοχή του  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , δηλαδή αυτή που δεν περιέχει το  $G \setminus C$ , είναι μία όψη που έχει ως σύνορο το  $C$ , διότι δεν υπάρχουν χορδές (βλ. Σχήμα 13.3).

« $\Rightarrow$ »:

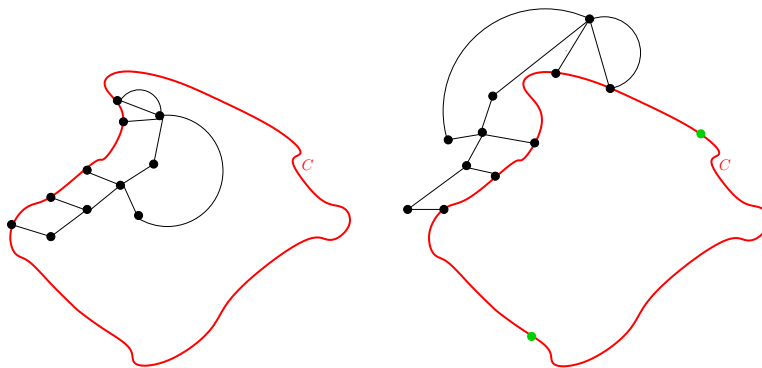
Θα χρησιμοποιήσουμε αντιθετοαντιστροφή. Έστω ότι ο κύκλος  $C$  δεν είναι εναγόμενος ή το  $G \setminus C$  δεν είναι συνεκτικό. Θα δείξουμε ότι υπάρχει εμβάπτιση στην οποία ο  $C$  δεν ορίζει όψη.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Ο  $C$  δεν είναι εναγόμενος, δηλαδή υπάρχει χορδή  $c$  του  $C$  στο  $G$ . Αφού  $G \neq C \cup c$ , είτε ο  $G$  έχει κορυφή  $u$  εκτός του  $C$  ή το  $G$  περιέχει χορδή  $d$  του  $C$  όπου  $d \neq c$ .

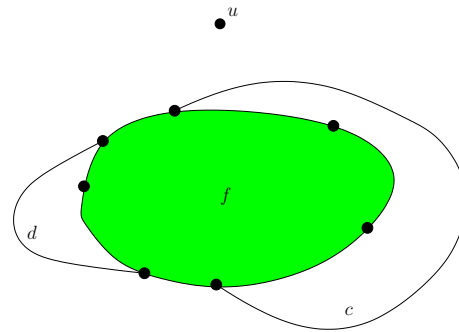


Σχήμα 13.2: Ενδεικτική αναπαράσταση δίσκου  $D_C$  που ορίζει ο  $C$  στην εμβάπτιση  $\Gamma$ .



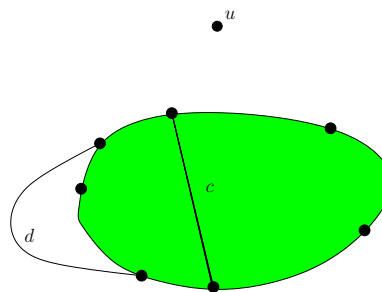
Σχήμα 13.3: Σχηματική επεξήγηση περιπτώσεων που απορρέουν από Θεώρημα του Jordan. Αριστερά: το  $G \setminus C$  περιέχεται στο εσωτερικό του δίσκου  $D_C$ . Δεξιά: το  $G \setminus C$  περιέχεται στο  $\mathbb{R}^2 \setminus D_C$ . Η μη ύπαρξη χορδών και στις δύο περιπτώσεις περιγράφεται σχηματικά. Στην αριστερή εικόνα η απουσία χορδών είναι προφανής, ενώ στη δεξιά, επισημαίνεται με την ύπαρξη των δύο πράσινων κόμβων.

Θεωρούμε εμφάπτιση  $\Gamma$  του γραφήματος  $G$ , στην οποία ο  $C$  ορίζει όψη  $f$  (βλ. Σχήμα 13.4). (Αν δεν υπάρχει τέτοια εμφάπτιση τότε αποδείχθηκε.)



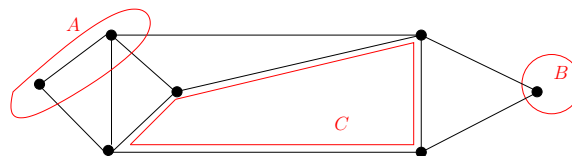
Σχήμα 13.4: Εμφάπτιση  $\Gamma$  στην οποία ο κύκλος  $C$  ορίζει όψη  $f$ .

Τροποποιούμε τη  $\Gamma$  σχεδιάζοντας τη  $c$  μέσα στην όψη  $f$ . Παίρνουμε εμφάπτιση  $\Gamma'$  στην οποία ο  $C$  δεν ορίζει όψη μιας και έξω από τον δίσκο που ορίζει ο  $C$  θα βρίσκεται η κορυφή  $u$  ή η χορδή  $d$  (βλ. Σχήμα 13.5).



Σχήμα 13.5: Εμφάπτιση  $\Gamma'$  στην οποία ο κύκλος  $C$  δεν ορίζει όψη.

Περίπτωση 2: Το  $G \setminus C$  έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχει ακριβώς δύο συνιστώσες  $A, B$ . Έστω η εμφάπτιση  $\Gamma$  στην οποία ορίζει όψη ο  $C$ . Από την  $A$  παίρνουμε τις «εναγόμενες» εμφαπτίσεις  $\Gamma_A$  του  $G \setminus B = A \cup C$  και  $\Gamma_B$  του  $G \setminus A = B \cup C$  (βλ. Σχήμα 13.6).



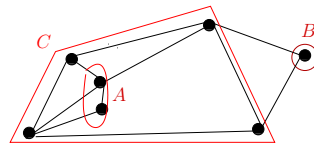
Σχήμα 13.6: Εμφάπτιση  $\Gamma$  στην οποία ορίζει όψη ο  $C$ .

Χ.β.τ.γ., υποθέτουμε επίσης ότι ο  $C$  ορίζει την εξωτερική όψη στη  $\Gamma_A$  και μη εξωτερική όψη στη  $\Gamma_B$  (βλ. Σχήμα 13.7). Συνδυάζουμε τις  $\Gamma_A$  και  $\Gamma_B$  «συγκολλώντας» τες στον  $C$ . Με άλλα λόγια

επεκτείνουμε την  $\Gamma_B$  σε εμβάπτιση όλου του  $G$  «προσθέτοντας» τη  $\Gamma_A$  στο εσωτερικό της όψης που ορίζει ο  $C$  (βλ. Σχήμα 13.8).



Σχήμα 13.7: Εμβαπτίσεις  $\Gamma_B$  (αριστερά στο σχήμα),  $\Gamma_A$  (δεξιά στο σχήμα).



Σχήμα 13.8: Συνδυασμός εμβαπτίσεων  $\Gamma_A$  και  $\Gamma_B$  σε μία εμβάπτιση.

Στην περίπτωση όπου  $G = C \cup c$ , όπου  $c$  χορδή του  $C$ , όλες οι εμβαπτίσεις περιέχουν όψη με σύνορο το  $C$ . Επίσης οι κύκλοι του γραφήματος είναι ακριβώς τρεις και κάθε ένας από αυτούς ορίζει όψη σε οποιαδήποτε εμβάπτιση του  $G$ . Επομένως σε συνδυασμό με το Λήμμα 13.1 έχουμε χαρακτηρίσει επακριβώς πότε ένας κύκλος  $C$  ορίζει όψη σε κάθε εμβάπτιση του  $G$ .

**Παρατήρηση 13.1** Αν  $G = C \cup c$ , όπου  $c$  είναι χορδή του κύκλου  $C$ , τότε το  $G$  δεν είναι 3-συνεκτικό.

**Πόρισμα 13.1** Ένας κύκλος  $C$  ενός επίπεδου 3-συνεκτικού γραφήματος  $G$  ορίζει όψη σε κάθε εμβάπτιση του  $G$  αν και μόνο αν ο  $C$  είναι εναγόμενος κύκλος και δεν είναι διαχωριστής του  $G$ .

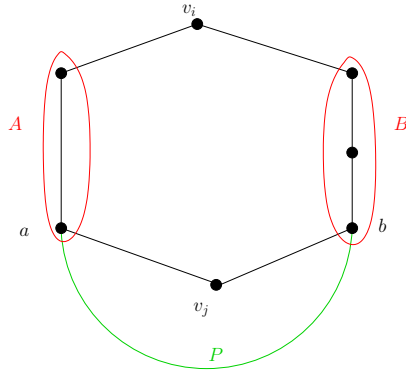
## 13.2 Θεώρημα του Whitney

Αποδεικνύεται ότι για 2-συνεκτικά γραφήματα, σε κάθε εμβάπτιση τα σύνορα όλων των όψεων είναι κύκλοι. Στο εξής θα ασχοληθούμε με 3-συνεκτικά γραφήματα.

**Θεώρημα 13.1 (Whitney, 1932)** Όλες οι εμβαπτίσεις ενός επίπεδου 3-συνεκτικού γραφήματος είναι ισοδύναμες.

**Απόδειξη:** Έστω  $G$  ένα επίπεδο 3-συνεκτικό γράφημα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο εμβαπτίσεις  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  του  $G$ , οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες. Τότε υπάρχει  $C$ , όπου  $C$  κύκλος  $C = (v_1, \dots, v_k)$ ,  $k \geq 3$ , που ορίζει όψη στη  $\Gamma_1$  αλλά όχι στη  $\Gamma_2$ . Από το Πόρισμα 13.1, ο  $C$  ή έχει χορδή ή είναι διαχωριστής.

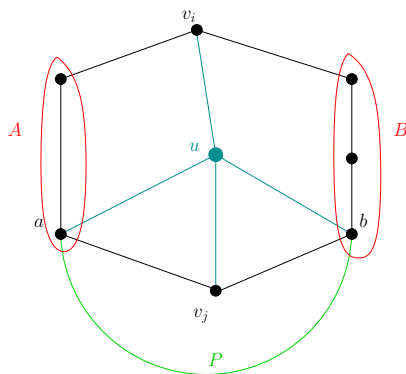
Περίπτωση 1: Ο  $C$  έχει χορδή  $\{v_i, v_j\}$  με  $j \geq i + 2$ . Ορίζουμε επίσης:  $A := \{v_x \mid i < x < j\}$  και  $B := \{v_x \mid x > i \text{ ή } x > j\}$ . Ισχύει ότι  $A, B \neq \emptyset$  δεδομένου ότι  $v_i, v_j$  δεν είναι γειτονικά στο  $C$ . Αφού  $G$  είναι 3-συνεκτικό, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $A$ - $B$  μονοπάτι  $P$  που δεν χρησιμοποιεί τα  $v_i, v_j$  (βλ. Σχήμα 13.9).



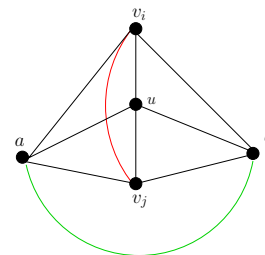
Σχήμα 13.9: Μονοπάτι  $P$  στην Περίπτωσης 1 της απόδειξης του Θεωρήματος 13.1.

Έστω  $a$  η τελευταία κορυφή του  $P$  που ανήκει στο  $A$  και  $b$  η πρώτη κορυφή του μονοπατιού που ανήκει στο  $B$ . Αφού το  $C$  ορίζει όψη  $f$  στη  $\Gamma_1$  μπορούμε να προσθέσουμε κορυφή  $u$  μέσα στην όψη  $f$  και να την συνδέσουμε με τέσσερις διακεκριμένες (*disjoint*) καμπύλες με τις  $v_i, v_j, a, b$  (βλ. Σχήμα 13.10).

Βρήκαμε λοιπόν, ενεπίπεδο γράφημα  $G' \supset G$  που περιέχει το  $K_5$  ως έλασσον ή υποδιαίρεση (βλ. Σχήμα 13.11). Όμως το  $G'$  είναι επίπεδο. Οδηγηθήκαμε λοιπόν σε άτοπο.



Σχήμα 13.10: Η πρόσθετη κορυφή  $u$  μέσα στην όψη  $f$  και οι συνδέσεις της.

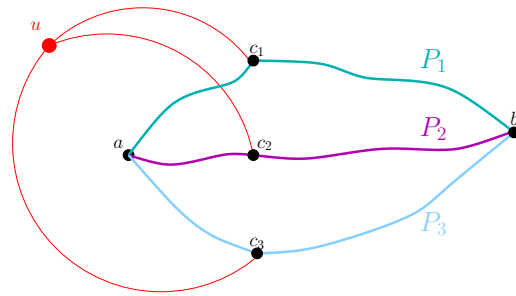


Σχήμα 13.11: Το  $K_5$  ως έλασσον του  $G$ .

Περίπτωση 2: Ο  $C$  είναι διαχωριστής, άρα το  $G \setminus C$  περιέχει δύο συνιστώσες  $A$  και  $B$ . Θεωρούμε εμφάνιση  $\Gamma_1$  στην οποία ο  $C$  ορίζει όψη  $f$ . Χ.β.τ.γ. η  $f$  δεν είναι εξωτερική άρα και το  $A$  και το  $B$  είναι εμφατισμένα εξωτερικά της  $f$ .

Διαλέγουμε  $a \in V(A)$  και  $b \in V(B)$ . Από το Θεώρημα του Menger «εκδοχή με κορυφές» (Θεώρημα 6.1) υπάρχουν τουλάχιστον 3 εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια  $P_1, P_2, P_3$ , από το  $a$  στο  $b$ .

Επίσης ορίζουμε τη  $c_i$  ως την πρώτη κορυφή του  $P_i$  στον κύκλο  $C$ , όπου  $i = 1, 2, 3$ . Βρήκαμε μια υποδιαίρεση του  $K_{2,3}$  στο  $G$ . Έπειτα προσθέτουμε τη  $u$  στο εσωτερικό της όψης  $f$  και την ενώνουμε με τρεις διακεκριμένες καμπύλες με τα  $c_1, c_2, c_3$ . Παρατηρούμε ότι πήραμε ενεπίπεδο γράφημα  $G' \supset G$  που περιέχει υποδιαίρεση του  $K_{3,3}$  (βλ. Σχήμα 13.12). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο.



Σχήμα 13.12: Η υποδιαίρεση του  $K_{3,3}$  που περιέχεται στο  $G$ .

■