Γραφέας: Βασίλης Μαργώνης & Σ. Κ.

16.1 Πλάτος μονοπατιού σε πλήρη δυαδικά δέντρα

Παρατήρηση 16.1 *Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι:* $\mathrm{pw}(G) = \max_{H \in \mathcal{C}} \mathrm{pw}(H)$*, όπου $\mathcal{C}$ το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του G.*

Συμβολίζουμε με B_h το πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους h.

Θεώρημα 16.1 $\mathrm{pw}(B_h) \geq \frac{h+1}{2} - 2$, $h \geq 5$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο ύψος h:

Βάση. Έστω $h = 5$, τότε: $\mathrm{pw}(B_5) \geq \frac{5+1}{2} - 2 = 1$, ισχύει.

Έστω $h = 6$, τότε $\mathrm{pw}(B_6) \geq \frac{6+1}{2} - 2 = 1.5 \Leftrightarrow \mathrm{pw}(B_6) \geq 2$, ισχύει.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω $h \geq 7$, και $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού του B_h πλάτους $\mathrm{pw}(B_h)$. Διαλέγουμε $u \in X_1$ και $v \in X_r$. Στο B_h υπάρχει (μοναδικό) u-v μονοπάτι P. Από το Λήμμα 14.1 $X_i \cap V(P) \neq \varnothing$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Άρα έχουμε ότι

$$\forall i \in [r],\ |X_i| \geq |X_i \setminus V(P)| + 1 \tag{16.1}$$

Το δέντρο B_h περιέχει τέσσερα υποδέντρα ύψους $h-2$, άρα το δάσος $B_h \setminus V(P)$ περιέχει ως υπογράφημα ένα πλήρες δυαδικό δέντρο T ύψους τουλάχιστον $h-2$. Η ακολουθία $(X_1 \setminus V(P), \ldots, X_r \setminus V(P))$ είναι νόμιμη αποσύνθεση μονοπατιού του $B_h \setminus V(P)$ και η $(X_1 \cap V(T), \ldots, X_r \cap V(T))$ νόμιμη αποσύνθεση του T. Από την Παρατήρηση 16.1 παίρνουμε ότι

$$\mathrm{pw}(B_h) \geq \mathrm{pw}(B_h \setminus V(P)) \geq \mathrm{pw}(T).$$

Από την (16.1) προκύπτει ότι

$$\forall i \in [r],\ |X_i| \geq |X_i \setminus V(P)| + 1 \geq |X_i \cap V(T)| + 1.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση

$$\max_i |X_i| \geq \max_i |X_i \cap V(T)| + 1 \geq \left(\frac{(h-2)+1}{2} - 2 + 1\right) + 1 = \frac{h-1}{2} = \frac{h+1}{2} - 1.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pw}(B_h) \geq \frac{h+1}{2} - 1 - 1 = \frac{h+1}{2} - 2$.

■

16.2 Υπολογισμός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου

Θεώρημα 16.2 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ με $\mathrm{pw}(G) = w$. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση f που εξαρτάται μόνο από το w τ. ώ. μπορούμε να υπολογίσουμε το $\alpha(G)$ σε χρόνο $f(w) \cdot n$, όπου $n = |V(G)|$.*

Απόδειξη: Δίνουμε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού.

Έστω $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού του G πλάτους w. Για $i \in \{1, \ldots, r\}$ και $X \subseteq X_i$ συμβολίζουμε με $\alpha_i(X)$ το μέγιστο μέγεθος ανεξάρτητου συνόλου S, τέτοιο ώστε $S \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_i$ και $S \cap X_i = X$. Τότε:

$$\alpha(G) = \max_{X \subseteq X_r} \alpha_r(X)$$

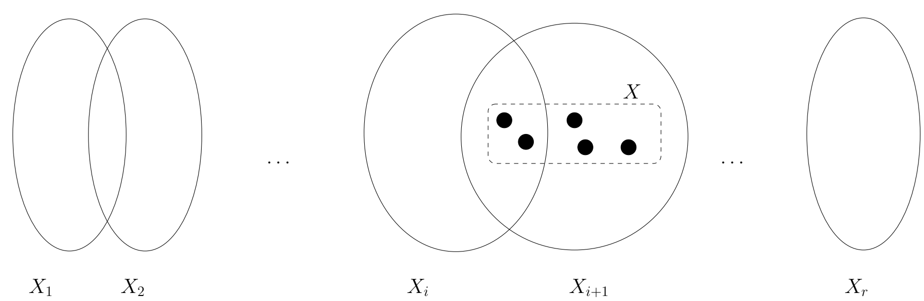
Μπορούμε, $\forall X \subseteq X_1$, να υπολογίσουμε το $\alpha_1(X)$ σε χρόνο $g(w)$, όπου g είναι μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται μόνο απο το w.

Για δεδομένο $X \subseteq X_1$, $X \neq \varnothing$:

$$\alpha_1(X) = \begin{cases} |X|, & \text{αν X ανεξάρτητο} \\ -\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$ και ο υπολογισμός αυτός εκτελείται σε χρόνο $O(|X|^2)$.

Για $X = \varnothing$, $\alpha_1(\varnothing) = 0$.

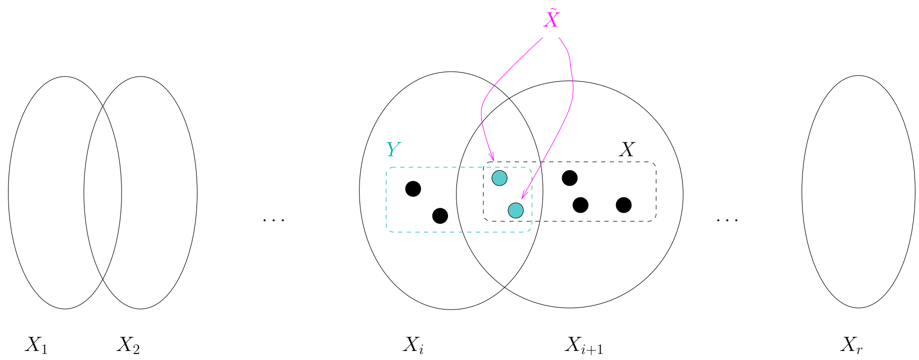
Δοκιμάζοντας όλα τα τα δυνατά υποσύνολα του X_1, των οποίων το πλήθος είναι $2^{|X_1|}$, παίρνουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές $\alpha_1(X)$ για όλα τα $X \subseteq X_1$ σε χρόνο $O(2^{|X_1|} \cdot |X_1|^2) = O(2^{w+1} \cdot w^2) = g(w)$.



Σχήμα 16.1: Η αποσύνθεση μονοπατιού του G, και ένα ανεξάρτητο σύνολο $X \subseteq X_{i+1}$.

Δείχνουμε τώρα πώς για $X \subseteq X_{i+1}$, $i \geq 1$, υπολογίζουμε το $\alpha_{i+1}(X)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση $\alpha_{i+1}(X)$ μόνο για ανεξάρτητα σύνολα X. Βλ. Σχήμα 16.1. Έστω $\hat{S}$ μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο, τέτοιο ώστε $\hat{S} \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_i \cup X_{i+1}$ και $\hat{S} \cap X_{i+1} = X$. Συνεπώς $\alpha_{i+1}(X) = |\hat{S}|$. Για το $Y = \hat{S} \cap X_i$ ισχύει ότι $Y \cap (X_i \cap X_{i+1}) \subseteq X$. Ορίζουμε το σύνολο $\tilde{X} := X \cap (X_i \cap X_{i+1})$. Προφανώς $\tilde{X} = Y \cap (X_i \cap X_{i+1})$

Οι κορυφές του $X \setminus \tilde{X}$ εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αποσύνθεση μονοπατιού στην τσάντα X_{i+1}. Μία οποιαδήποτε κορυφή του $(X_1 \cup \ldots \cup X_i) \setminus (X_i \cap X_{i+1})$ εμφανίζεται για τελευταία φορά στην αποσύνθεση σε μία τσάντα X_j, $j \leq i$. Βλ. Σχήμα 16.2.



Σχήμα 16.2: Τα σύνολα Y, $\tilde{X}$ και η σχέση τους με το X.

Ισχυρισμός 16.1 *Στο γράφημα G αν για μία ακμή uv ισχύει ότι $u \in X \setminus \tilde{X}$ και $v \in X_1 \cup \ldots \cup X_i$, τότε $v \in X_i \cap X_{i+1}$.*

Με βάση το Λήμμα 14.2 το ζεύγος $(\bigcup_{j=1}^{i} X_j, \bigcup_{j=i+1}^{r} X_j)$ είναι διαχωριστής του G και $\partial \bigcup_{j=1}^{i} X_j \subseteq X_i \cap X_{i+1}$. Οποιαδήποτε ακμή από το $X \setminus \tilde{X}$ προς το $\bigcup_{j=1}^{i} X_j$ πρέπει να καταλήγει στο $X_i \cap X_{i+1}$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Για να «συμπληρώσουμε» το $\hat{S}$ γνωρίζοντας ότι $X \subseteq \hat{S}$ πρέπει να βρούμε κατάλληλο σύνολο $A = \hat{S} \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_i)$ υπό τους περιορισμούς ότι

(i) το A είναι ανεξάρτητο σύνολο στο $G[X_1 \cup \ldots \cup X_i]$ και

(ii) $A \cap (X_i \cap X_{i+1}) = \tilde{X}$.

Από τον Ισχυρισμό 16.1 και το γεγονός ότι το X είναι ανεξάρτητο σύνολο στο G, αν A είναι οποιοδήποτε σύνολο που ικανοποιεί τους (i) και (ii), έχουμε ότι το $A \cup (X \setminus \tilde{X})$ είναι ανεξάρτητο σύνολο στο G. Άρα για να μεγιστοποιήσουμε το μέγεθος του $\hat{S}$ αρκεί να μεγιστοποιήσουμε το μέγεθος του A. Καταλήγουμε ότι, για δεδομένο X, αν μαντέψουμε τη «σωστή» προβολή Y του A στο X_i θα ισχύει ότι:

$$\alpha_{i+1}(X) = \alpha_i(Y) + |X \setminus \tilde{X}|.$$

Η άπληστη στρατηγική που παίρνει ως Y όλες τις κορυφές του X_i που δεν συνδέονται με το $X \setminus \tilde{X}$ δεν δίνει απαραίτητα βέλτιστη λύση. Ορίζουμε την αναδρομική σχέση:

$$\alpha_{i+1}(X) = \max_{Y \subseteq X_i,\, Y \cap (X_i \cap X_{i+1}) = \tilde{X}} \{\alpha_i(Y) + |X \setminus \tilde{X}|\} \tag{16.2}$$

Παρατηρήστε ότι η απαρίθμηση των Y που υλοποιείται στην (16.2) επιτρέπει να εξεταστούν για το $\alpha_i(Y)$ οι πληθικοί αριθμοί όλων των συνόλων A που ικανοποιούν τους περιορισμούς (i) και (ii). Επομένως η σχέση (16.2) υπολογίζει ορθά το $\alpha_{i+1}(X)$.

Τονίζουμε ότι το σύνολο $\tilde{X}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο δεδομένου του X, δεν εξαρτάται από το Y. Αντίθετα το Y πρέπει να επιλεχθεί ώστε να περιέχει ως υποσύνολο το $\tilde{X}$. Για κάθε ζεύγος (i, X), υπολογίζουμε το $\alpha_{i+1}(X)$ σε χρόνο $O(2^{w+1})$, δοκιμάζοντας όλα τα δυνατά $Y \subseteq X_i$. Επειδή θα υπολογίσουμε r το πλήθος ζεύγη για όλα τα δυνατά X ο συνολικός χρόνος του αλγορίθμου είναι $f(w) \cdot r$ όπου $f(w) = 2^{O(w)}$. Δεδομένου ότι $r \leq n$, υπολογίζουμε το $\alpha(G)$ σε χρόνο $f(w) \cdot n$. ∎