

Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 19: 14.12.2016 και 15.12.2016

Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείας: Αγγελική Χαντζηθάνου & Σ. Κ.

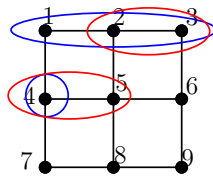
19.1 Σχέση πλάτους μονοπατιού και δενδροπλάτους

Πρόταση 19.1 Το πλέγμα $\Gamma_{n \times n}$ έχει πλάτος μονοπατιού και δενδροπλάτος το πολύ n .

Απόδειξη: Ορίζουμε αποσύνθεση μονοπατιού $X_{n(i-1)+j} = \{(i, k) \mid j \leq k \leq n\} \cup \{(i+1, k) \mid 1 \leq k \leq j\}$ για $1 \leq i \leq n-1$ και $1 \leq j \leq n$. Κάθε τσάντα έχει ακριβώς $n+1$ κορυφές. ■

Παράδειγμα 19.1 Για το πλέγμα $\Gamma_{3 \times 3}$ βρίσκουμε αποσύνθεση μονοπατιού με 4 κορυφές σε κάθε τσάντα. Ορίζουμε τις τσάντες της αποσύνθεσης ως εξής:

$X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_2 = \{2, 3, 4, 5\}$, $X_3 = \{3, 4, 5, 6\}$, $X_4 = \{4, 5, 6, 7\}$, $X_5 = \{5, 6, 7, 8\}$, $X_6 = \{6, 7, 8, 9\}$.

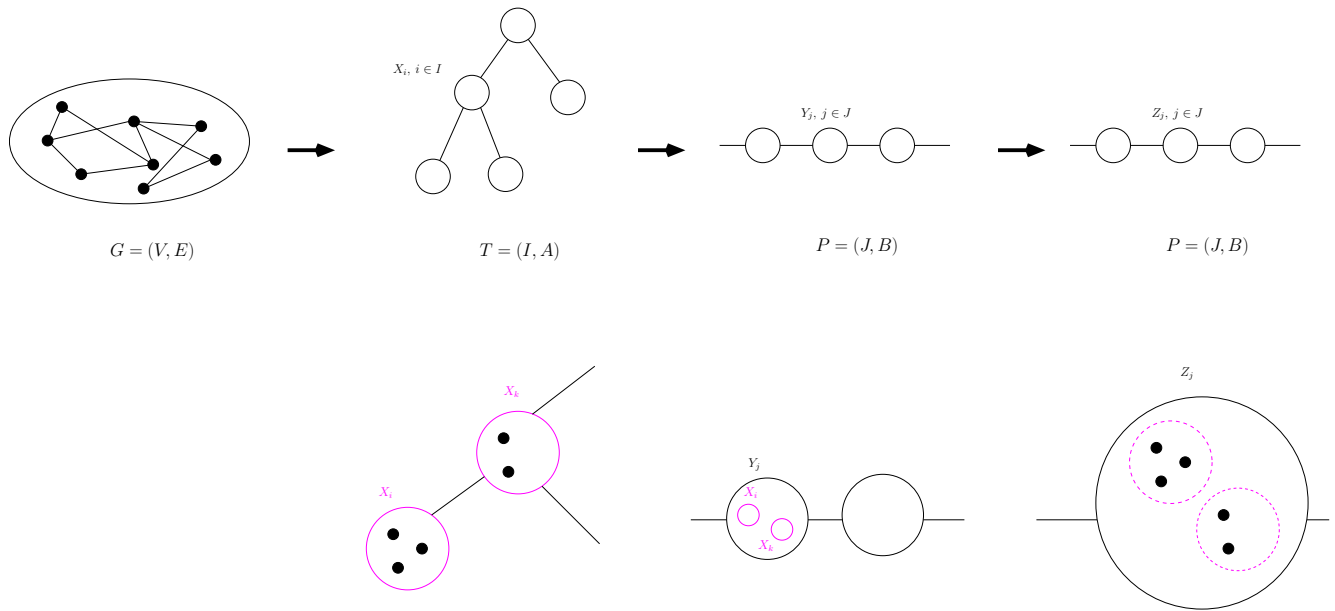


Σχήμα 19.1: Πλέγμα 3×3 .

Γενικά $\text{tw}(G) \leq \text{pw}(G)$, όμως το πλάτος μονοπατιού δεν μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από το δενδροπλάτος.

Θεώρημα 19.1 Για κάθε γράφημα G με n κορυφές, $\text{pw}(G) = O(\log n \cdot \text{tw}(G))$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{T} = (T = (I, A), \{X_i : i \in I\})$ η δενδροαποσύνθεση του G . Από το Θεώρημα 15.3 υπάρχει αποσύνθεση μονοπατιού $\mathcal{P}_1 = (P = (J, B), \{Y_j : j \in J\})$ του T με πλάτος $O(\log n)$. Ορίζουμε αποσύνθεση μονοπατιού του G ως $\mathcal{P}_2 = (P = (J, B), \{Z_j : j \in J\})$, όπου για κάθε $j \in J$, $Z_j = \bigcup_{i \in Y_j} X_i$. Βλ. Σχήμα 19.2. Είναι προφανές ότι η \mathcal{P}_2 ικανοποιεί τις ιδιότητες 1, 2 του Ορισμού 14.1. Όσον αφορά την Ιδιότητα 3, κάθε συνεκτικό υποδέντρο του T θα «σκορπιστεί» σε συνεχόμενο υπομονοπάτι του P . Συγκεκριμένα, κάθε $v \in V(G)$ εμφανίζεται σε ένα σύνολο τσαντών τ . Οι κορυφές $\{i \in I \mid v \in X_i\}$ ενάγουν συνεκτικό υποδέντρο T_v του T . Από την Πρόταση 14.1 οι κορυφές του T_v κατανέμονται σε «συνεχόμενες» τσάντες Y_j , δηλ. το σύνολο κορυφών $\{j \in J \mid Y_j \cap V(T_v) \neq \emptyset\}$ ενάγει ένα υπομονοπάτι P_v του P . Στην αποσύνθεση \mathcal{P}_2 η κορυφή v εμφανίζεται ακριβώς στις τσάντες του συνόλου $\{Z_j : j \in V(P_v)\}$ ■



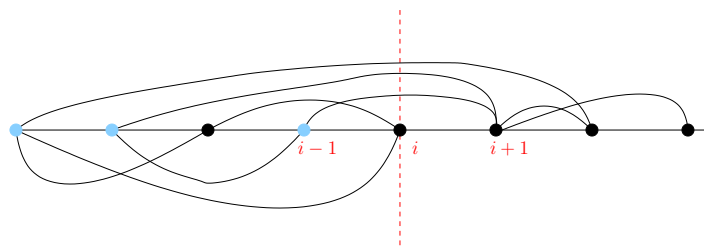
Σχήμα 19.2: Απεικόνιση της απόδειξης του Θεωρήματος 19.1.

19.2 Εναλλακτικοί ορισμοί πλάτους μονοπατιού

Ορισμός 19.1 Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Μια γραμμική διάταξη των κορυφών του G είναι μια $1-1$ απεικόνιση $L : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$. Η L ορίζει μια μετάθεση των κορυφών του G .

Για κάθε γραμμική διάταξη L και $1 \leq i < n$ ορίζουμε το παρακάτω σύνολο (βλ. Σχήμα 19.3):

$$V_L(i) = \{u \in V \mid L(u) \leq i \text{ και } \exists v \in V \text{ τέτοιο ώστε } \{u, v\} \in E \text{ και } L(v) > i\}.$$



Σχήμα 19.3: Στο $V_L(i)$ ανήκουν οι τρεις κορυφές που βρίσκονται μέχρι τη θέση i στη διάταξη και συνδέονται με ακμή με κορυφές που βρίσκονται μετά το i .

Ορισμός 19.2 Το vertex separation number του γραφήματος $G = (V, E)$ για μια συγκεκριμένη γραμμική διάταξη L ορίζεται ως $vs_L(G) = \max_{1 \leq i < |V|} \{|V_L(i)|\}$. Το vertex separation number του G συμβολίζεται με $vs(G)$ και είναι το ελάχιστο vertex separation number επί όλων των γραμμικών διατάξεων L :

$$vs(G) = \min\{vs_L(G) \mid L \text{ γραμμική διάταξη του } V\}$$

Θεώρημα 19.2 Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$, $vs(G) = pw(G)$.

Απόδειξη: (i) Θα δείξουμε ότι $pw(G) \leq vs(G)$. Έστω $vs(G) = k$ και έστω L μια γραμμική διάταξη τέτοια ώστε $vs_L(G) = k$. Ορίζουμε σύνολα X_1, X_2, \dots, X_n ως εξής:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{L^{-1}(1)\} \\ X_2 &= V_L(1) \cup \{L^{-1}(2)\} \\ &\vdots \\ X_n &= V_L(n-1) \cup \{L^{-1}(n)\}. \end{aligned}$$

Η (X_1, X_2, \dots, X_n) είναι αποσύνθεση μονοπατιού του G . Αφού $vs_L(G) = k$, $|V_L(i)| \leq k$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Συνεπώς, $|X_i| \leq k+1$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Άρα, $pw(G) \leq k = vs(G)$.

(ii) Θα δείξουμε ότι $vs(G) \leq pw(G)$. Έστω (X_1, X_2, \dots, X_r) αποσύνθεση μονοπατιού του G με πλάτος $k = pw(G)$. Κατασκευάζουμε γραμμική διάταξη L . Έστω $|X_1| = t$ και $L : X_1 \xrightarrow{1-1} \{1, 2, \dots, t\}$. Επεκτείνουμε την L στο V ως εξής:

```

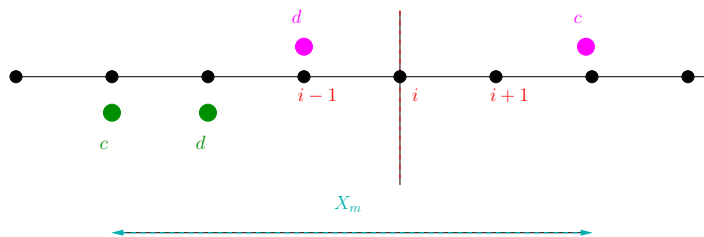
V' ← X1;
for i ← 2 to r do
  Y ← Xi \ V';
  while Y ≠ ∅ do
    L(y) ← |V'| + 1, για αυθαίρετο y ∈ Y;
    V' ← V' ∪ {y};
    Y ← Y \ {y};
  end
end
end
    
```

Τοποθετούμε δηλαδή στη διάταξη πρώτα τα στοιχεία του X_1 , μετά τα στοιχεία του $X_2 \setminus X_1$, του $X_3 \setminus (X_2 \cup X_1)$, κ.ο.κ. Η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα στοιχεία της ίδιας τσάντας είναι αυθαίρετη. Η διάταξη μας έχει την ιδιότητα ότι αν $indx(v) \in [r]$ είναι ο μικρότερος δείκτης τσάντας που περιέχει την κορυφή $v \in V$, η σειρά των κορυφών στη γραμμική διάταξη L σέβεται τη μονοτονία των δεικτών αυτών. Δηλαδή

$$L(v) \leq L(u) \Leftrightarrow indx(v) \leq indx(u), \quad \forall u, v \in V.$$

Για να υπολογίσουμε το $vs_L(G)$ εξετάζουμε τα σύνολα $V_L(i)$ για $1 \leq i < n$. Έστω X_m η πρώτη τσάντα της αποσύνθεσης που περιέχει το $L^{-1}(i)$ (δηλ. $indx(L^{-1}(i)) = m$) και $a = L^{-1}(s)$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $V_L(i)$. Από τον ορισμό του $V_L(i)$ ξέρουμε ότι $s \leq i$ και υπάρχει $t > i$ τ. ώ. $L^{-1}(t) = b$ και $\{a, b\} \in E$. Αφού $s \leq i$ υπάρχει $h \leq m$ τ. ώ. $a \in X_h$. Επειδή $\{a, b\} \in E$ και $t > i$ υπάρχει $j \geq m$ τ. ώ. το X_j περιέχει και το a και το b . Επομένως $a \in X_h \cap X_j$. Μιας και $h \leq m \leq j$ η Ιδιότητα 3 του Ορισμού 14.1 δίνει ότι $a \in X_m$. Άρα $V_L(i) \subseteq X_m$.

Μπορούμε να υποθέσουμε χβτγ ότι καμία τσάντα της αποσύνθεσης μονοπατιού δεν είναι υποσύνολο κάποιας άλλης, άρα υπάρχει κάποιος $c \in X_m$ τ. ώ. $c \notin X_{m+1}$. Επίσης χβτγ υπάρχει ακμή $\{c, y\} \in E$ τέτοια ώστε $c, y \in X_m$, ειδάλως μπορούμε να αφαιρέσουμε το c από την τσάντα X_m . Από όλους τους γείτονες του c στο X_m έστω d αυτός που μεγιστοποιεί την ετικέτα $L(\cdot)$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις $L(c) \leq i$ ή $L(c) > i$ άρα τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για τις τιμές των $L(c), L(d)$ σε σχέση με το i . Βλ. Σχήμα 19.4. Αν μία από τις δύο κορυφές τοποθετηθεί μετά τη θέση i , τότε αυτή δεν θα ανήκει

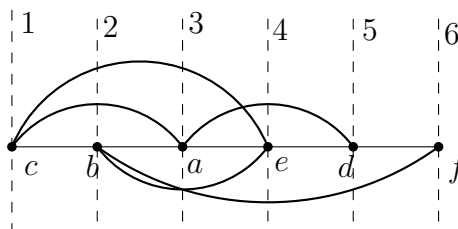
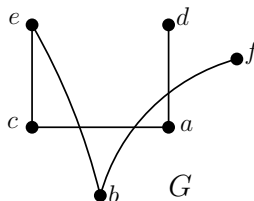


Σχήμα 19.4: Δύο παραδείγματα για τη σχετική θέση των c, d στη γραμμική διάταξη. (α) Αν $L(d) \leq i$ και $L(c) > i$, τότε $d \in V_L(i)$ και $c \notin V_L(i)$. (β) Αν $L(c) \leq i$ και $L(d) \leq i$, τότε $c \notin V_L(i)$.

στο $V_L(i)$. Αν $L(c), L(d) \leq i$ τότε $c \notin V_L(i)$. Σε κάθε περίπτωση $c \notin V_L(i)$ ή $d \notin V_L(i)$. Επομένως $|V_L(i)| \leq |X_m| - 1$.

Άρα για κάθε $1 \leq i < n$ υπάρχει m , $1 \leq m \leq r$, τ. ώ. $|V_L(i)| \leq |X_m| - 1 \leq k$. Επομένως $vs(G) \leq vs_L(G) \leq pw(G)$. ■

Παράδειγμα 19.2 Εφαρμογή του πρώτου μέρους της απόδειξης του Θεωρήματος 19.2.



Σχήμα 19.5: Μια μετάθεση των κορυφών του G .

Για τη γραμμική διάταξη L στο Σχήμα 19.5 υπολογίζουμε το $V_L(i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $V_L(1) = \{c\}$, $V_L(2) = \{c, b\}$, $V_L(3) = \{c, b, a\}$, $V_L(4) = \{b, a\}$, $V_L(5) = \{b\}$.
 Ισχύει ότι $vs_L(G) = 3$.

Ορίζουμε τις τσάντες της αποσύνθεσης μονοπατιού:

- $X_1 = \{L^{-1}(1)\} = \{c\}$
- $X_2 = V_L(1) \cup \{L^{-1}(2)\} = \{c\} \cup \{b\} = \{b, c\}$
- $X_3 = V_L(2) \cup \{L^{-1}(3)\} = \{b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}$
- $X_4 = V_L(3) \cup \{L^{-1}(4)\} = \{c, b, a\} \cup \{e\} = \{a, b, c, e\}$
- $X_5 = V_L(4) \cup \{L^{-1}(5)\} = \{b, a\} \cup \{d\} = \{a, b, d\}$
- $X_6 = V_L(5) \cup \{L^{-1}(6)\} = \{b\} \cup \{f\} = \{b, f\}$



Σχήμα 19.6: Μια μετάθεση των κορυφών του G σύμφωνα με τη σειρά που εμφανίζονται στο μονοπάτι.

και βλέπουμε ότι $\text{pw}(G) \leq 3 = \text{vs}_L(G)$. Αν βάλουμε τις κορυφές σε διαφορετική διάταξη προκύπτει ότι $\text{vs}(G) = \text{pw}(G) = 1$. Βλ. Σχήμα 19.6.

Υπάρχουν και άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί του πλάτους μονοπατιού. Σε ένα παίγνιο αναζήτησης έχουμε ένα γράφημα $G = (V, E)$ του οποίου αρχικά όλες οι ακμές είναι μολυσμένες από ένα δηλητηριώδες αέριο. Το αέριο είναι αόρατο και κινείται με απεριόριστη ταχύτητα. Έχουμε στη διάθεση μας ένα σύνολο ανιχνευτών. Μια ακμή από μολυσμένη γίνεται καθαρή αν και στα δύο άκρα της βρίσκονται ταυτόχρονα ανιχνευτές. Το αέριο μπορεί να μετακινηθεί προς οποιαδήποτε ακμή ή κορυφή προς την οποία υπάρχει μονοπάτι ελεύθερο ανιχνευτών. Ένα βήμα αναζήτησης συνίσταται είτε στην τοποθέτηση ενός καινούργιου ανιχνευτή σε κάποια κορυφή του G είτε στη μετακίνηση ενός ανιχνευτή από μία κορυφή $v \in V$ του γραφήματος σε μία οποιαδήποτε $u \neq v$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μια ακμή e που καθαρίσαμε ξαναμολύνεται αν το αέριο βρει μονοπάτι ελεύθερο ανιχνευτών προς την e . Μια στρατηγική αναζήτησης είναι μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων αναζήτησης που εγγυάται ότι στο πέρας της όλες οι ακμές του γραφήματος θα είναι ταυτόχρονα καθαρές. Ο αριθμός αναζήτησης κορυφών $\text{ns}(G)$ (node search number) του γραφήματος ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός ανιχνευτών που εγγυάται την ύπαρξη μιας στρατηγικής αναζήτησης. Έχει αποδειχθεί ότι $\text{ns}(G) = \text{pw}(G) + 1$.

19.3 Εναλλακτικός ορισμός δενδροπλάτους

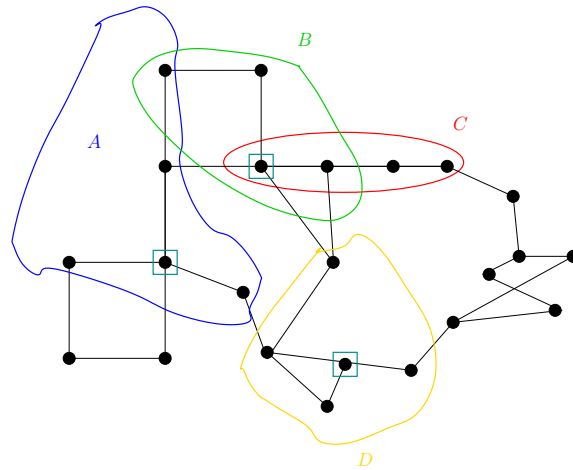
Ορισμός 19.3 Δύο υπογραφήματα A, B του G αγγίζονται αν $V(A) \cap V(B) \neq \emptyset$ ή αν υπάρχει ακμή $\{u, v\} \in E(G)$ έτσι ώστε $u \in V(A)$ και $v \in V(B)$

Ορισμός 19.4 Βάτος (bramble) στο G είναι ένα σύνολο \mathcal{B} συνεκτικών υπογραφημάτων του G που αγγίζονται ανά δύο. Ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ καλείται σύνολο κρούσης (hitting set) της βάτου \mathcal{B} , αν το S περιέχει κορυφή από κάθε στοιχείο της \mathcal{B} . Τάξη της \mathcal{B} είναι το ελάχιστο μέγεθος ενός συνόλου κρούσης. Bramble number (αριθμός βάτου) είναι η μέγιστη τάξη μιας βάτου στο G , συμβολίζεται με $\text{bn}(G)$.

Στο Σχήμα 19.7 φαίνεται μια βάτος που αποτελείται από 4 συνεκτικά υπογραφήματα A, B, C, D του G τα οποία αγγίζονται ανά δύο είτε με κοινή κορυφή (A, B και B, C) είτε μέσω ακμής για τα υπόλοιπα τέσσερα ζεύγη. Η τάξη της βάτου είναι 3 αφού υπάρχει σύνολο με τρεις κορυφές που τέμνει κάθε στοιχείο της βάτου ενώ για τα τρία γραφήματα A, B, C χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο διακεκριμένες κορυφές σε οποιοδήποτε σύνολο κρούσης.

Θεώρημα 19.3 (Seymour, Thomas 1993) Για κάθε γράφημα G , $\text{tw}(G) = \text{bn}(G) - 1$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο την κατεύθυνση $\text{tw}(G) \geq \text{bn}(G) - 1$. Έστω \mathcal{B} βάτος του G μέγιστης τάξης. Έστω T το δέντρο μιας δενδροαποσύνθεσης του G . Για $A \in \mathcal{B}$, έστω T_A το υπογράφημα του T που ενάγεται από τις κορυφές των οποίων οι τσάντες περιέχουν κορυφές του A . Αφού το A είναι



Σχήμα 19.7: Οι τετραγωνισμένες κορυφές αποτελούν ελάχιστο σύνολο κρούσης της βάτου $\mathcal{B} = \{A, B, C, D\}$.

συνεκτικό, πρέπει και το T_A να είναι συνεκτικό (γιατί:). Αν $A, B \in \mathcal{B}$ τότε τα A και B αγγίζονται άρα $V(T_A) \cap V(T_B) \neq \emptyset$. Τα υποδέντρα του συνόλου $\{T_A : A \in \mathcal{B}\}$ τέμνονται ανά δύο έχουν δηλαδή την ιδιότητα Helly. Επομένως υπάρχει $i \in \bigcap_{A \in \mathcal{B}} V(T_A)$, δηλαδή η τσάντα με δείκτη i περιέχει μια κορυφή από κάθε $V(T_A), A \in \mathcal{B}$. Αυτή η τσάντα είναι σύνολο κρούσης για τη βάτο \mathcal{B} , άρα έχει μέγεθος τουλάχιστον $\text{bn}(G)$. Κατά συνέπεια, $\text{tw}(G) \geq \text{bn}(G) - 1$.

■