Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 2: 13.10.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Αριστοτέλης Χανιώτης & Σ. Κ.

2.1 Διαχωριστές και συνεκτικότητα

Ορισμός 2.1 Κορυφοδιαχωριστής (vertex separator) *ή απλά* διαχωριστής, *ενός συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται ένα σύνολο $S \subseteq V$ τέτοιο ώστε το γράφημα $G - S = G[V \setminus S]$ είναι μη συνεκτικό.*

Ορισμός 2.2 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Μία κορυφή $v \in V$ καλείται* αρθρικό σημείο (cutpoint, cut-vertex) *αν το μονοσύνολο $\{v\}$ είναι διαχωριστής.*

Ορισμός 2.3 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Το $G = (V, E)$ είναι k-*συνεκτικό *αν $|V(G)| > k$ και το υπογράφημα $G - X$ είναι συνεκτικό για κάθε $X \subseteq V$ με $|X| < k$.*

Παράδειγμα 2.1 *Αν το G είναι 1-συνεκτικό, τότε είναι και συνεκτικό.*

Παρατήρηση 2.1 *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Όλα τα συνεκτικά γραφήματα με $n \geq 2$ είναι 1-συνεκτικά.*
2. *Γράφημα με αρθρικό σημείο δεν είναι 2-συνεκτικό.*
3. *Κάθε μη κενό γράφημα είναι 0-συνεκτικό.*
4. *Αν το G είναι k-συνεκτικό με $k \geq 1$ τότε το G είναι και $(k-1)$-συνεκτικό.*

Ορισμός 2.4 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Ορίζουμε ως* συνεκτικότητα *του γραφήματος τον μέγιστο ακέραιο k, έτσι ώστε το G να ειναι k-συνεκτικό. Η συνεκτικότητα του G συμβολίζεται με $\kappa(G)$.*

Ο ακόλουθος ορισμός είναι ισοδύναμος (γιατί;) με τον Ορισμό 2.4.

Ορισμός 2.5 *Ορίζουμε ως* συνεκτικότητα *του γραφήματος G τον ελάχιστο πληθικό αριθμό συνόλου $S \subseteq V$ έτσι ώστε το γράφημα $G - S$ να είναι μη συνεκτικό ή να αποτελείται απο μία μόνο κορυφή.*

Παράδειγμα 2.2 *Εξετάζουμε ως προς τη συνεκτικότητα την κλίκα K_n. Εφόσον στην κλίκα για κάθε κορυφή v, $d(v) = n - 1$, δεν υπάρχει διαχωριστής της κλίκας με μέγεθος μικρότερο ή ίσο του $n-2$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η συνεκτικότητα δεν μπορεί να είναι n γιατί απο τον Ορισμό 2.3 πρέπει $|V(G)| > \kappa(G)$. Επομένως $\kappa(K_n) = n - 1$.*

Παράδειγμα 2.3 *Έστω πλήρες διμερές γράφημα $G = (V, E)$ ισόμορφο με το $K_{m,n}$, $m \leq n$, όπου $V(G) = A \cup B$, $|A| = m$. Αν αφαιρέσουμε σύνολο κορυφών $S \subset V$ με $|S| < m$ τότε τα $A \setminus S$ και $B \setminus S$ είναι μη κενά και ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές του $a \in A \setminus S$ και $b \in B \setminus S$ υπάρχει μονοπάτι. Άρα $G - S$ συνεκτικό. Επομένως $\kappa(K_{m,n}) = m$.*

Παρατήρηση 2.2 *Παρατηρούμε ότι ένα δέντρο $G = (V, E)$ δεν είναι 2-συνεκτικό, διότι θα έπρεπε $\forall X \subseteq V$ με $|X| \leq 1$, το $G - X$ να είναι συνεκτικό. Όμως αν $|V| \geq 3$, το G περιέχει τουλάχιστον ένα αρθρικό σημείο.*

2.2 Συνεκτικότητα και βαθμοί

Ορίζουμε τους συμβολισμούς $\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ για τον ελάχιστο βαθμό και αντίστοιχα $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ για το μέγιστο βαθμό. Ο μέσος βαθμός $\overline{d}(G)$ ορίζεται με τον προφανή τρόπο ως $\sum_{v \in V} d_G(v)/n$.

Πρόταση 2.1 *Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\kappa(G) \leq \delta(G)$.*

Απόδειξη: Έστω $v \in V(G)$, τ.ω. $d_G(v) = \delta(G)$. Το σύνολο $N(v)$ είναι διαχωριστής του G αν $|V(G)| \geq \delta(G) + 2$. Αν $|V(G)| \leq \delta(G) + 1$, εξ ορισμού $\kappa(G) \leq \delta(G)$. ∎

Παράδειγμα 2.4 *Μπορεί $\kappa(G) \ll \delta(G)$. Θεωρήστε G που αποτελείται από δύο ξένα αντίγραφα του K_n.*

Θεώρημα 2.1 (Mader, 1972) *Κάθε γράφημα $G = (V, E)$ με μέσο βαθμό $\overline{d}(G) \geq 4k$ περιέχει ένα k-συνεκτικό υπογράφημα.*

Απόδειξη: Θέτουμε κατά τα συνήθη $|V| = n$ και $|E| = m$.

Για $k \in \{0, 1\}$ το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα. Για τη συνέχεια της απόδειξης παρατηρούμε ότι για $k \geq 2$ απο την υπόθεση $\overline{d}(G) \geq 4k$ έπονται οι εξής δύο σχέσεις:

$$n \geq 2k - 1 \tag{2.1}$$
$$m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1 \tag{2.2}$$

Για τη (2.1) έχουμε ότι : $n > \Delta(G) \geq \overline{d}(G) \geq 4k > 2k - 1$.
Για τη (2.2) έχουμε $m = \frac{\overline{d}(G)n}{2} \geq 2kn \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$. Αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για κάθε γράφημα G που ικανοποιεί τις (2.1) και (2.2). Συνεχίζουμε την απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος n των κορυφών του γραφήματος.

Επαγωγική βάση. $n = 2k - 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}(n + 1)$. Μέσω της (2.2) παίρνουμε ότι $m \geq \frac{1}{2}n(n - 1) = \binom{n}{2}$. Επομένως $G = K_n$, και αφού $2k - 1 \geq k + 1$, το G περιέχει σαν υπογράφημα το K_{k+1} το οποίο είναι k-συνεκτικό.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω $n \geq 2k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Υπάρχει κορυφή v με $d_G(v) \leq 2k-3$. Τότε το $G-v$ έχει n' κορυφές και m' ακμές, όπου $n' = n-1 \geq 2k-1$ και έτσι ικανοποιείται η (2.1). Επιπλέον $m' \geq m-(2k-3) \geq (2k-3)(n'-k+1)+1$ εφ' όσον $m \geq (2k-3)(n-k+1)+1$. Άρα στο $G-v$ ισχύει και η (2.2). Επομένως απο την επαγωγική υπόθεση το $G-v$ περιέχει ένα k-συνεκτικό υπογράφημα.

2. Έστω $\delta(G) \geq 2k-2$. Αν το G είναι k-συνεκτικό, έχουμε το ζητούμενο. Αν το G δεν είναι k-συνεκτικό, υπάρχει διαχωριστής $X \subseteq V(G)$ με $|X| < k$. Το $G-X$ να διαμερίζεται σε δύο υπογραφήματα με σύνολα κορυφών αντίστοιχα V_1, V_2 τ.ω. το γράφημα $G[V_1 \cup V_2]$ είναι μη συνεκτικό. Ορίζουμε $G_i = G[V_i \cup X]$, $i = 1, 2$. Παρατηρούμε ότι κάθε ακμή του G θα βρίσκεται είτε στο G_1 είτε στο G_2 είτε και στα δύο, δεν υπάρχει δηλαδή ακμή του $E(G)$ η οποία να έχει τη μία της κορυφή στο G_1 και την άλλη στο G_2. Έχουμε ακόμα ότι κάθε κορυφή στο $V_i, 1 \leq i \leq 2,$, έχει τουλάχιστον $\delta(G) \geq 2k-2$ γείτονες στο G_i. Επομένως $|G_1|, |G_2| \geq 2k-1$ και σε κάθε ένα απο τα δύο υπογραφήματα ισχύει η (2.1). Αν σε τουλάχιστον ένα απο τα $G_i, 1 \leq i \leq 2$, ισχύει η (2.2) τότε απο την επαγωγική υποθέση αυτό θα έχει k-συνεκτικό υπογράφημα και έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.

   Υποθέτουμε τώρα προς άτοπο ότι σε κανένα απο τα $G_i, 1 \leq i \leq 2$, δεν ισχύει η (2.2). Επομένως για $1 \leq i \leq 2$,
   $$|E(G_i)| \leq (2k-3)(|V(G_i)| - k + 1)$$
   οπότε
   $$m \leq |E(G_1)| + |E(G_2)| \leq (2k-3)(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 2k + 2) \leq (2k-3)(n-k+1)$$
   Άτοπο.

   Για την απόδειξη της τελευταίας ανισότητας χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη σχέση
   $$|V(G_1)| + |V(G_2)| - (k-1) \leq |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G_1) \cap V(G_2)| = n$$
   που με τη σειρά της ισχύει γιατί $|V(G_1) \cap V(G_2)| = |X| \leq k-1$.

$\blacksquare$