Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 17: 8.12.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Κωνσταντίνος Ρήγγας

17.1 Δενδροαποσύνθεση και δενδροπλάτος

Ορισμός 17.1 Δενδροαποσύνθεση *του* $G = (V, E)$ *είναι ένα ζεύγος* $(T = (I, F), \{X_i \mid i \in I\})$ *όπου το* T *είναι δένδρο και* $\{X_i \mid i \in I\}$ *είναι οικογένεια υποσυνόλων του* V *τ. ώ.*

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = V$.
2. $\forall \{u, w\} \in E$, $\exists i \in I$ *τ. ώ.* $v \in X_i$ *και* $w \in X_i$.
3. *Έστω* $v \in V$ *και* $i, j \in I$ *τ. ώ.* $v \in X_i$ *και* $v \in X_j$. *Για κάθε* $s \in I$ *που βρίσκεται στο* i-j *μονοπάτι στο* T *πρέπει* $v \in X_s$. *Ισοδύναμα, για κάθε* $i, j \in I$ *και* $s \in I$ *που βρίσκεται στο* i-j *μονοπάτι στο* T, $X_i \cap X_j \subseteq X_s$.

Αν αντικαταστήσουμε την τρίτη συνθήκη του ορισμού με την παρακάτω

> Για κάθε $v \in V$, το σύνολο $\{i \in I \mid v \in X_i\}$ ενάγει ένα συνεκτικό υπογράφημα (υποδέντρο) του T

παίρνουμε ισοδύναμο ορισμό.

Ορισμός 17.2 *Το* πλάτος *της δενδροαποσύνθεσης* $(T = (I, F), \{X_i | i \in I\})$ *είναι το* $\max_{i \in I}\{|X_i| - 1\}$. *Το* δενδροπλάτος (treewidth) *του* G *ορίζεται ως το ελάχιστο πλάτος μιας δενδροαποσύνθεσης του* G *και το συμβολίζουμε με* $\mathrm{tw}(G)$.

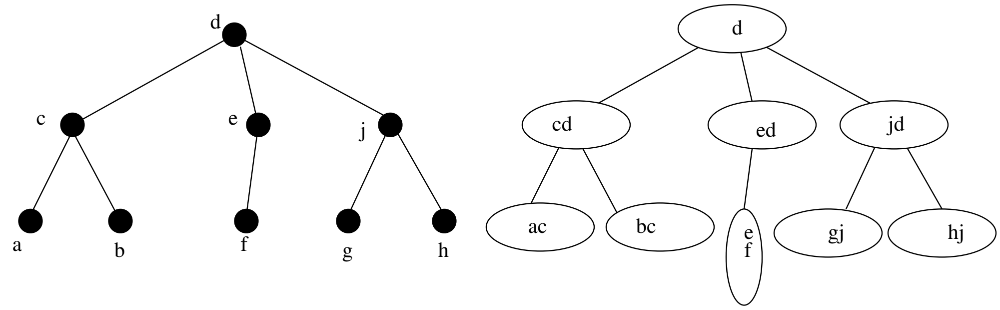
Πρόταση 17.1 $\forall G$, $\mathrm{tw}(G) \leq \mathrm{pw}(G)$.

Απόδειξη: Κάθε αποσύνθεση μονοπατιού είναι και δενδροαποσύνθεση. ∎

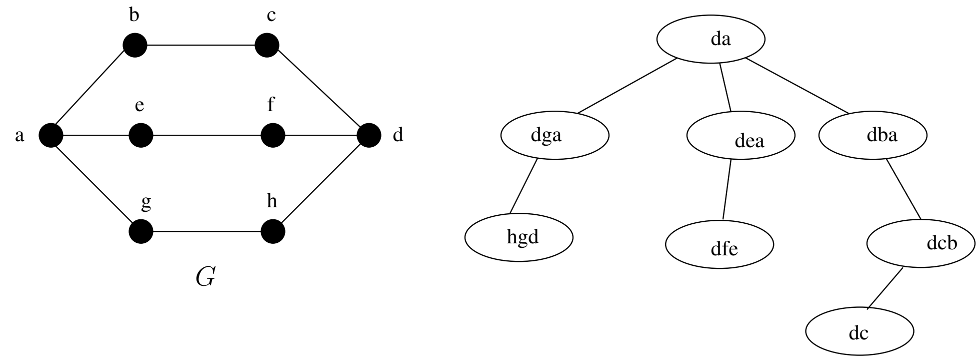
Πρόταση 17.2 *Για κάθε δεντρο* T, *που περιέχει τουλάχιστον μία ακμή*, $\mathrm{tw}(T) = 1$.

Απόδειξη: Ρίζωσε αυθαίρετα το T. Το δέντρο της αποσύνθεσης είναι ένα δέντρο με ρίζα που αποτελεί ισομορφικό αντίγραφο του T. Κάθε τσάντα X_v περιέχει το $v \in V(T)$. Επιπλέον, αν το v δεν είναι η ρίζα, το X_v περιέχει και τον πατέρα του v στο T. Επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται οι Ιδιότητες 1 έως 3 του ορισμού της δενδροαποσύνθεσης. ∎

Δείτε το Σχήμα 17.1 για ένα παράδειγμα δενδροαποσύνθεσης δέντρου και το Σχήμα 17.2 για ένα ακόμη παράδειγμα.



Σχήμα 17.1: Δέντρο και μια δενδροαποσύνθεση του με πλάτος 1.



Σχήμα 17.2: Γράφημα G και μια δενδροαποσύνθεση του με πλάτος 2. Αποδεικνύεται ότι $\mathrm{pw}(G) = 3$.

17.2 Βασικές ιδιότητες

Λήμμα 17.1 *Έστω $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ μια δενδροαποσύνθεση του G και $u, v \in V(G)$ τ. ώ. $\{u, v\} \in E(G)$. Αν $u \in X_p$ και $v \in X_r$ για $p, r \in V(T)$, τότε υπάρχει q στο μοναδικό p-r μονοπάτι του T τ. ώ. $u, v \in X_q$.*

Απόδειξη: Έστω P το p-r μονοπάτι στο T. Από την Ιδιότητα 2 του Ορισμού 17.1 υπάρχει s τ. ώ. $u, v \in X_s$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s \notin V(P)$. Έστω Q το μονοπάτι του T από το s στο $V(P)$ και q η μοναδική κορυφή του $V(P) \cap V(Q)$. Από την Ιδιότητα 3, $u \in X_q$ και $v \in X_q$. ∎

Από το Λήμμα 17.1 και την Ιδιότητα 3 του Ορισμού 17.1 συμπεραίνουμε ότι κάθε τσάντα του p-r μονοπατιού P περιέχει το u ή το v.

Λήμμα 17.2 *Έστω $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ δενδροαποσύνθεση του G και $e = \{a, b\}$ ακμή του T. Το δάσος $T \setminus e$ αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, την T_a που περιέχει το a και την T_b που περιέχει το b. Αν ορίσουμε $A := \bigcup_{t \in V(T_a)} X_t$ και $B := \bigcup_{t \in V(T_b)} X_t$ τότε $\partial A, \partial B \subseteq X_a \cap X_b$. Ισοδύναμα (A, B) είναι διαχωρισμός (separation) του G με διαχωριστή (separator) $X_a \cap X_b$.*

Παρατήρηση 17.1 *Αν υποθέσουμε ότι $\forall i, j \in V(T)$, $X_i \nsubseteq X_j$, κάθε X_i όπου το i δεν είναι φύλλο του T είναι διαχωριστής του G. Κάθε υποδέντρο του $T \setminus \{i\}$ περιέχει στις τσάντες του τουλάχιστον μια* *κορυφή του* $V(G) \setminus X_i$. *Καμιά απο αυτές τις κορυφές* u *δεν μπορεί να έχει ακμή στον* G *«προς» κορυφή* v *του* $V(G)$ *που «βρίσκεται» σε διαφορετικό υποδέντρο, γιατί από το Λήμμα 17.1 θα έπρεπε τουλάχιστον μια από τις* u, v *να ανήκει στο* X_i.

Πόρισμα 17.1 *Για κάθε γράφημα* G, $\mathrm{tw}(G) \geq \kappa(G)$.