

Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 18: 9.12.2016

Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

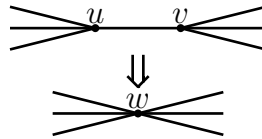
Γραφέας: Παναγιωτίδης Αλέξανδρος

Λήμμα 18.1 Έστω $(T = (I, F), \{X_i, i \in I\})$ δένδροαποσύνθεση του $G = (V, E)$ και K υποσύνολο του V τέτοιο ώστε το γράφημα $G[K]$ είναι κλίκα. Τότε, υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $K \subseteq X_i$.

Απόδειξη: Για κάθε κορυφή $u \in V$, ορίζουμε $T_u = \{i \in I \mid u \in X_i\}$. Τότε το σύνολο $W = \{T_u \mid u \in K\}$ είναι συνεκτικό υπόδενδρο του G από την Ιδιότητα 3 της δένδροαποσύνθεσης. Επιπλέον, για κάθε δύο κορυφές u και v στο K η ακμή $\{u, v\}$ ανήκει στο E και άρα από την Ιδιότητα 2, έχουμε ότι $V(T_u) \cap V(T_v) \neq \emptyset$. Συνεπώς, η οικογένεια δέντρων W ικανοποιεί την ιδιότητα Helly και όπως έχουμε δείξει $\bigcap_{u \in K} V(T_u) \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $K \subseteq X_{i_0}$. ■

Πρόταση 18.1 Έστω H έλασσον ενός γραφήματος G , τότε $\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G)$.

Απόδειξη: Οι διαγραφές ακμών και κορυφών δεν μπορούν να αυξήσουν το δενδροπλάτος. Θα μελετήσουμε την επίδραση των συνθλίψεων ακμών στο δενδροπλάτος. Έστω $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ δένδροαποσύνθεση του G και η σύνθλιψη της ακμής $\{u, v\}$ στην κορυφή w όπως φαίνεται στο Σχήμα 18.1.



Σχήμα 18.1: Σύνθλιψη ακμής.

Τότε, ορίζουμε

$$X'_t = \begin{cases} X_t, & \text{αν } u, v \notin X_t \\ X_t \setminus \{u, v\} \cup \{w\}, & \text{αν } u \text{ ή } v \in X_t \end{cases}$$

και ισχυριζόμαστε ότι το $(T, \{X'_t\}_{t \in V(T)})$ είναι δένδροαποσύνθεση του γραφήματος $H = G/\{u, v\}$. Οι Ιδιότητες 1 και 2 ισχύουν προφανώς και θα δείξουμε την Ιδιότητα 3. Έστω κορυφές p, r του δένδρου T και P το μονοπάτι από το p στο r στο T και s μια κορυφή στο μονοπάτι P . Θα δείξουμε ότι $X'_p \cap X'_r \subseteq X'_s$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w \in X'_p \cap X'_r$. Γνωρίζουμε ότι στην αρχική αποσύνθεση υπάρχει το u ή το v σε όλο το μονοπάτι, δηλαδή έχουμε ότι $u \in X_s$ ή $v \in X_s$, δηλαδή $w \in X'_s$. ■

Γνωρίζουμε ότι το δενδροπλάτος ενός δέντρου είναι 1.

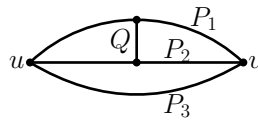
Πρόταση 18.2 Για γράφημα G έχουμε $\text{tw}(G) = 1$ αν και μόνο αν το G είναι δάσος.

Απόδειξη: Αν το G δεν είναι δάσος, τότε περιέχει ως έλασσον το K_3 , δηλαδή έχουμε $\text{tw}(G) \geq \text{tw}(K_3)$ και από το Λήμμα 18.1 έχουμε ότι $\text{tw}(K_3) = 2$. ■

Θεώρημα 18.1 Έστω γράφημα G , το δένδροπλάτος του G είναι μικρότερο ή ίσο του 2, $\text{tw}(G) \leq 2$ αν και μόνο αν το G δεν περιέχει το K_4 ως έλασσον.

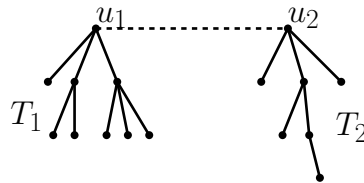
Απόδειξη: Από το Λήμμα 18.1 έχουμε ότι $\text{tw}(K_4) \geq 3$, άρα συνδυάζοντας το με την Πρόταση 18.1 παίρνουμε την " \Rightarrow " κατεύθυνση.

Θα δείξουμε την " \Leftarrow " κατεύθυνση. Έστω ότι το G δεν περιέχει το K_4 ως έλασσον, θα δείξουμε ότι το G δεν μπορεί να είναι 3-συνεκτικό. Αν το G είναι 3-συνεκτικό τότε από το Θεώρημα Menger υπάρχουν κορυφές $u, v \in V(G)$ με 3 εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια P_1, P_2 , και P_3 ανάμεσα τους. Το $G \setminus \{u, v\}$ είναι συνεκτικό, άρα υπάρχει μονοπάτι Q που συνδέει τα P_1 και P_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 18.2, δηλαδή το G περιέχει το K_4 ως έλασσον. Άτοπο.



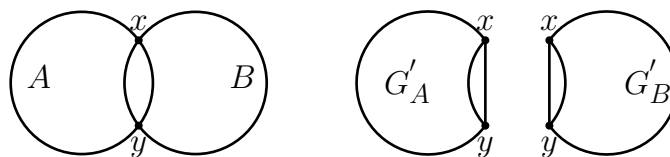
Σχήμα 18.2: Το K_4 .

1. Έστω ότι το G δεν είναι 2-συνεκτικό, τότε υπάρχει κάποιο αριθμικό σημείο. Έστω x ένα αριθμικό σημείο του G και G_1, G_2 οι δυο x -λοβοί που ορίζονται από το x . Έστω T_1 και T_2 δένδροαποσυνθέσεις των G_1 και G_2 αντίστοιχα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $x \in X_{u_i}$, όπου u_i η ρίζα του δένδρου T_i , για $i = 1, 2$. Επαγωγικά τα (T_1, \mathcal{X}_1) και (T_2, \mathcal{X}_2) είναι δένδροαποσυνθέσεις των G_1 και G_2 με πλάτος μικρότερο ή ίσο του 2 η κάθε μια. Ενώνοντας τα T_1 και T_2 μέσω της ακμής $\{u_1, u_2\}$ παίρνουμε $(T, \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2)$ δένδροαποσύνθεση του G με πλάτος μικρότερο ή ίσο του 2.



Σχήμα 18.3: Δένδροαποσυνθέσεις των G_1 και G_2 .

2. Έστω ότι το $\kappa(G) = 2$ και $\{x, y\}$ διαχωριστής του G με A, B τα δύο μέρη του γραφήματος $G \setminus \{x, y\}$. Ονομάζουμε $G_A = G[A \cup \{x, y\}]$ και $G_B = G[B \cup \{x, y\}]$ και αν η ακμή $\{x, y\}$ δεν υπάρχει στα G_A και G_B , ορίζουμε τα G'_A και G'_B ως τα G_A και G_B όπου έχουμε προσθέσει την ακμή $\{x, y\}$. Τα G'_A και G'_B είναι έλασσονα του G , άρα δεν περιέχουν το K_4 ως έλασσον. Επαγωγικά υπάρχουν δένδροαποσυνθέσεις (T_A, \mathcal{X}_A) και (T_B, \mathcal{X}_B) με πλάτος μικρότερο ή ίσο του 2 των G'_A και G'_B , αντίστοιχα. Από την Ιδιότητα 2 έχουμε ότι υπάρχει $u_A \in V(T_A)$ και $u_B \in V(T_B)$ τέτοια ώστε $\{x, y\} \subseteq X_{u_A} \cap X_{u_B}$. Ενώνοντας τα δύο δέντρα με την ακμή $\{u_A, u_B\}$ παίρνουμε δένδροαποσύνθεση για το G πλάτους μικρότερου ή ίσου του 2.

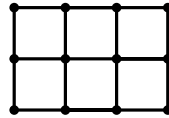


Σχήμα 18.4: Το 2-συνεκτικό γράφημα G και τα γράφηματα G'_A και G'_B .



Πόρισμα 18.1 Έστω εξωεπίπεδο γράφημα G , τότε $\text{tw}(G) \leq 2$.

Ορισμός 18.1 Το γράφημα $\Gamma_{n \times r} = (V_{n \times r}, E_{n \times r})$, όπου $V_{n \times r} = \{(i, j) \mid i \in [n], j \in [r]\}$ και $E_{n \times r} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} \mid (i_1, j_1), (i_2, j_2) \in V_{n \times r} \text{ και } (i_1 = i_2 \wedge |j_2 - j_1| = 1) \text{ ή } (j_1 = j_2 \wedge |i_2 - i_1| = 1)\}$ λέγεται $n \times r$ πλέγμα (σχάρα).



Σχήμα 18.5: Η $\Gamma_{3 \times 4}$ σχάρα.

Παρατήρηση 18.1 Για τη συνεκτικότητα του πλέγματος έχουμε ότι

$$\kappa(\Gamma_{n \times r}) \leq 2 = \delta(\Gamma_{n \times r}).$$

Παρατήρηση 18.2 Η μέγιστη κλίκα που περιέχεται σε ένα πλέγμα είναι το K_2 , δηλαδή έχουμε ότι

$$\omega(\Gamma_{n \times r}) = 2.$$

Παρατήρηση 18.3 Το K_4 περιέχεται ως έλασσον σε ένα πλέγμα και από το Θεώρημα Wagner δεν μπορεί να περιέχεται το K_5 , άρα η μέγιστη κλίκα που περιέχεται ως έλασσον σε ένα πλέγμα είναι το K_4 , δηλαδή

$$\omega'(\Gamma_{n \times r}) = 4.$$

Πρόταση 18.3 Έχουμε ότι το πλάτος μονοπατιού και το δένδροπλάτος ενός τετραγωνικού πλέγματος $\Gamma_{n \times n}$ φράσσεται από το n , δηλαδή έχουμε

$$\text{pw}(\Gamma_{n \times n}) \leq n \text{ και } \text{tw}(\Gamma_{n \times n}) \leq n.$$