Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 20: 16.12.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

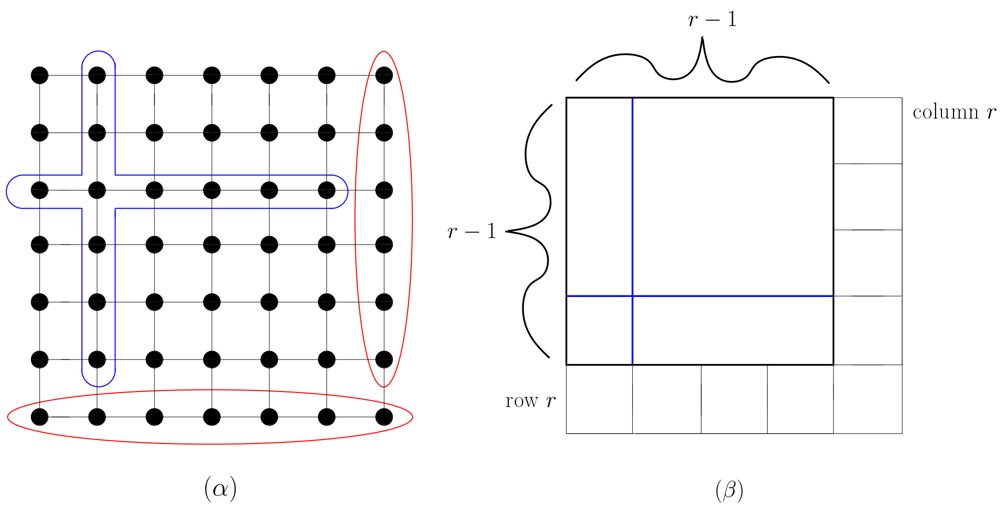
Γραφέας: Παναγιώτης Ρεπούσκος

20.1 Βασικές Ιδιότητες

Θεώρημα 20.1 *Για ένα πλέγμα* $\Gamma_{r\times r}$*, ισχύει ότι* $\mathrm{bn}(\Gamma_{r\times r}) \geq r+1$.

Απόδειξη:

Κατασκευάζουμε μία βάτο τάξης $r+1$. Ορίζουμε ένα σύνολο που περιέχει όλη τη γραμμή r και ένα σύνολο που περιέχει τις κορυφές της στήλης r, εκτός από την κορυφή (r,r) (βλ. Σχήμα 20.1 (α), τα σύνολα που περιγράφονται με κόκκινο). Ορίζουμε και $(r-1)^2$ «σταυρούς». Ο κάθε σταυρός αποτελείται από τους πρώτους $r-1$ κόμβους μιας από τις πρώτες $r-1$ γραμμές και από τους πρώτους $r-1$ κόμβους μιας από τις πρώτες $r-1$ στήλες (Σχήμα 20.1 (α): ένας σταυρός περιγράφεται με μπλε γραμμές).



Σχήμα 20.1: (α) Το πλέγμα $\Gamma_{7\times 7}$.

Για κάθε σύνολο ορίζεται το αντίστοιχο εναγόμενο υπογράφημα. Συνολικά φτιάξαμε βάτο με $(r-1)^2+2$ υπογραφήματα (είναι βάτος, επειδή όλοι οι σταυροί αγγίζονται ανά δύο μεταξύ τους και όλοι τους αγγίζουν τα αρχικά σύνολα, με την r γραμμή και στήλη).

Ένα σύνολο κρούσης για τη βάτο πρέπει να περιέχει τουλάχιστον $r-1$ κορυφές για να χτυπήσει όλους τους σταυρούς, αλλιώς χάνεται μια γραμμή και μια στήλη εξολοκλήρου (Σχήμα 20.1 (β)). Χρειαζόμαστε και για τα δύο κόκκινα σύνολα 2 κορυφές, γιατί είναι ξένα. Άρα, η τάξη της βάτου είναι τουλάχιστον $r-1+2=r+1$, δηλαδή $\mathrm{bn}(\Gamma_{r\times r}) \geq r+1$.

∎

Πόρισμα 20.1 *Για κάθε πλέγμα $\Gamma_{r\times r}$, ισχύει* $\mathrm{pw}(\Gamma_{r\times r}) = \mathrm{tw}(\Gamma_{r\times r}) = r$.

Απόδειξη: Ξέρουμε πως $\mathrm{tw}(\Gamma_{r\times r}) \leq \mathrm{pw}(\Gamma_{r\times r}) \leq r$. Άρα $\mathrm{tw}(\Gamma_{r\times r}) = r$.

∎

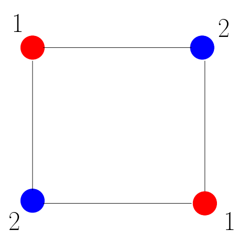
Παρατήρηση 20.1 *Έστω* $\omega'(G) = \max_t\{$*το* G *περιέχει το* K_t *ως έλασσον*$\}$. *Ισχύει* $\omega'(G) \geq \omega(G)$.

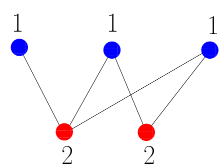
Βρήκαμε ότι υπάρχουν γραφήματα G τέτοια ώστε $\mathrm{bn}(G) >> \omega'(G)$. Για παράδειγμα, το πλέγμα περιέχει ως έλασσον μέχρι το K_4, αλλά το bn (αριθμός βάτου) του είναι μη φραγμένο.

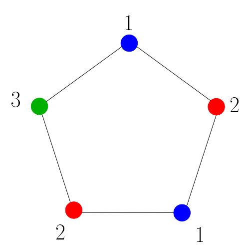
20.2 Χρωματισμός Γραφημάτων

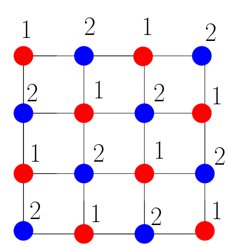
Ορισμός 20.1 k-*χρωματισμός του* G *είναι μία συνάρτηση* $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$, *τέτοια ώστε αν* $\{x, y\} \in E(G)$, *τότε* $f(x) \neq f(y)$. *Το* G *λέγεται* k-*χρωματίσιμο αν υπάρχει* k-*χρωματισμός. Ο χρωματικός αριθμός* $\chi(G)$ *είναι το ελάχιστο* k *τέτοιο ώστε το* G *να είναι* k-*χρωματίσιμο.*

Παράδειγμα 20.1 *Ο χρωματικός αριθμός διαφόρων γραφημάτων:*

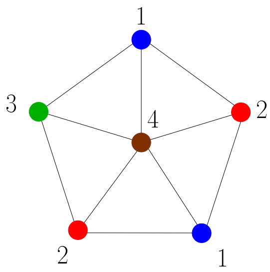
- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(C_4) = 2$ 

- G *διμερές*, $\chi(G) = 2$ 

- $\chi(\mathrm{C}_5) = 3$ 

- $\chi(\Gamma_{r\times r}) = 2$ *(το πλέγμα είναι διμερές γράφημα)* 

- $\chi(W_6) = 4$



Παρατήρηση 20.2 *Αν f είναι ένας k-χρωματισμός του G, τότε $\forall i \in \{1, ..., k\}$, το $f^{-1}(i)$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. $\chi(G)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός ανεξάρτητων συνόλων που χρειαζόμαστε για να καλύψουμε το $V(G)$.*

Πρόταση 20.1 *Αν το H είναι ένα υπογράφημα του G, τότε $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Παρατήρηση 20.3 *Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Πρόταση 20.2 *Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, όπου $\alpha(G)$ είναι το independence number του γραφήματος.*

Απόδειξη: Έστω $\chi(G) = k$. Ένας k-χρωματισμός του G ορίζει διαμέριση $V(G) = V_1 \cup ... \cup V_k$, όπου V_i ανεξάρτητο σύνολο, $i \in \{1, ..., k\}$.

$$\left.\begin{array}{l} |V_i| \leq \alpha(G) \\ |V(G)| = \sum\limits_{i=1}^{k} |V_i| \end{array}\right\} \implies |V(G)| \leq k \cdot \alpha(G) \Rightarrow k = \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

∎

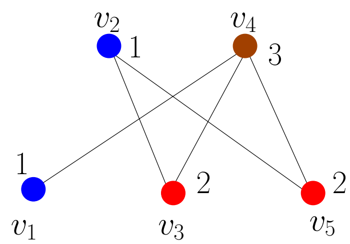
Πρόταση 20.3 *Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$, $U \subseteq V$, ισχύει $\chi(G) \leq \chi(G[U]) + \chi(G[V \setminus U])$.*

Απόδειξη: Χρωμάτισε το U χρησιμοποιώντας $\chi(G[U])$ χρώματα και το $V \setminus U$ με $\chi(G[V \setminus U])$ καινούργια χρώματα.

∎

Ορισμός 20.2 *Δίνεται διάταξη $v_1, ..., v_n$ του $V(G)$. Ο* άπληστος χρωματισμός (greedy coloring) *προκύπτει αναθέτοντας στο v_1 το χρώμα 1 και στο v_i, $i \in \{2, ..., n\}$, το χρώμα με το μικρότερο δείκτη που δεν έχει ανατεθεί στα στοιχεία του συνόλου $\{v_1, ..., v_{i-1}\} \cap N(v_i)$.*

Ορισμός 20.3 *Έστω $G = (V, E)$. Λέμε ότι το G είναι* k-εκφυλισμένο (k-degenerate), *αν κάθε υπογράφημα του έχει κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του k.*

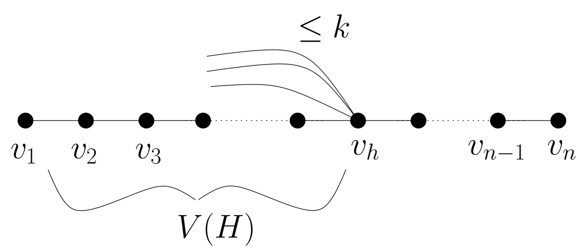


Σχήμα 20.2: Εφαρμογή του άπληστου χρωματισμού (Ορισμός 20.2) σε ένα γράφημα G. Το G είναι διμερές, οπότε $\chi(G) = 2$. Ο άπληστος χρωματισμός δεν δίνει βέλτιστο αποτέλεσμα.

Πρόταση 20.4 *Το G είναι k-εκφυλισμένο ανν υπάρχει διάταξη $v_1, ..., v_n$ του $V(G)$, τέτοια ώστε για κάθε $i \in \{2, ..., n\}$, η v_i έχει το πολύ k γείτονες ανάμεσα στις $v_1, ..., v_{i-1}$.*

Απόδειξη:

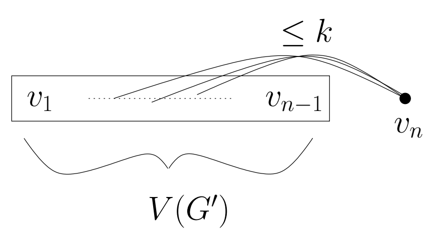
«$\Longleftarrow$» Αν υπάρχει τέτοια διάταξη, για οποιοδήποτε υπογράφημα H, θεώρησε τη μεγαλύτερη κορυφή v_h του $V(H)$ στη διάταξη (Σχήμα 20.3). Αυτή η κορυφή έχει το πολύ k γείτονες στο H, άρα το G είναι k-εκφυλισμένο.



Σχήμα 20.3: Η v_h έχει το πολύ k γείτονες προς τα αριστερά.

«$\Longrightarrow$» Έστω G k-εκφυλισμένο. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη κατάλληλης διάταξης με επαγωγή στο n. Αφού το G είναι k-εκφυλισμένο, υπάρχει $v \in V(G)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{d_G}(v) \leq k$.

Ονόμασε το v, v_n και όρισε $G' = G \setminus v_n$. Εύκολα, το G' ομοίως είναι k-εκφυλισμένο και από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει κατάλληλη διάταξη $v_1, ..., v_{n-1}$ του $V(G')$. Η διάταξη $v_1, ..., v_{n-1}, v_n$ ικανοποιεί τις ιδιότητες που απαιτούμε για το G (Σχήμα 20.4).

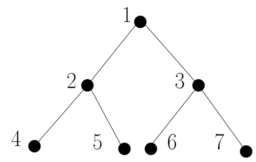


Σχήμα 20.4: Η διάταξη $v_1, ..., v_{n-1}, v_n$ του G.

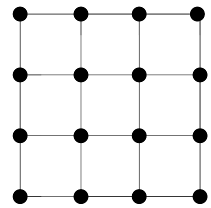
∎

Παράδειγμα 20.2 *Διάφορα k-εκφυλισμένα γραφήματα:*

- *Κάθε δέντρο είναι 1-εκφυλισμένο.*



- *Το $\Gamma_{r\times r}$ είναι 2-εκφυλισμένο (η γωνία έχει πάντα βαθμό 2).*



Ορισμός 20.4 *Ο* βαθμός εκφυλισμού (degeneracy) *ενός γραφήματος G ορίζεται ως* $\mathrm{dg}(G) = \min\{k \mid G\ k\text{-εκφυλισμένο}\}$

Παράδειγμα 20.3 *Για κάθε δάσος F ισχύει* $\mathrm{dg}(F) \leq 1$.

Παρατήρηση 20.4 *Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι* $\delta(G) \leq \mathrm{dg}(G) \leq \Delta(G)$.

Θεώρημα 20.2 *Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι* $\chi(G) \leq 1 + \mathrm{dg}(G)$.

Απόδειξη: Ονομάζουμε $k = \mathrm{dg}(G)$. Έστω διάταξη $v_1, ..., v_n$ του $V(G)$, τέτοια ώστε κάθε v_i, $i \in \{2, \ldots, n\}$, να έχει το πολύ k γείτονες ανάμεσα στις $v_1, ..., v_{i-1}$. Χρησιμοποιούμε τον άπληστο χρωματισμό (βλ. Ορισμό 20.2). Χρειαζόμαστε το πολύ $k + 1$ χρώματα, γιατί όταν ο αλγόριθμος χρωματίζει το v_i, το πολύ k χρώματα είναι απαγορευμένα.

∎

Πόρισμα 20.2 *Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι* $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Παράδειγμα 20.4

- $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$.
- $\chi(C_{2n+1}) = \Delta(C_{2n+1}) + 1 = 3$.