Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 22: 22.12.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Ιωσήφ Μουλίνος

22.1 Χρωματισμός επιπέδων γραφημάτων

Παρατήρηση 22.1 *Για κάθε επίπεδο γράφημα G, υπάρχει $v \in V(G)$ τ.ω. $d(v) \leq 5$.*

Απόδειξη: Λόγω της επιπεδότητας, από τη σχέση του Euler παίρνουμε

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 \Rightarrow \sum_{v \in V(G)} d(v) \leq 6|V(G)| - 12 < 6|V(G)|.$$

∎

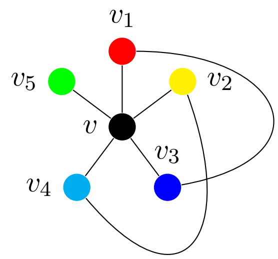
Πρόταση 22.1 *Κάθε επίπεδο γράφημα G είναι 5-εκφυλισμένο, άρα $\chi(G) \leq 6$.*

Θεώρημα 22.1 (Heawood, 1890) *Για κάθε επίπεδο γράφημα G, $\chi(G) \leq 5$.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο $|V(G)|$.
Για $|V(G)| \leq 5$, προφανές.
Υποθέτουμε $|V(G)| > 5$. Έστω $v \in V(G)$, $d(v) \leq 5$. Από την επαγωγική υπόθεση $\chi(G \setminus v) \leq 5$, δηλαδή υπάρχει νόμιμος χρωματισμός $f : V(G) \setminus \{v\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Αν $d(v) < 5$, η f μπορεί να επεκταθεί στο v, αναθέτοντας $f(v) \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{f(u) : \{u, v\} \in E(G)\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d(v) = 5$. Καθορίζουμε εμβάπτιση του G στην οποία οι γείτονες του v, $N(v) = v_1, ..., v_5$ χρωματίζονται από την f με τα χρώματα 1,...,5 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, $f(v_i) = i$, $1 \leq i \leq 5$. (Αν $|f(N(v))| < 5$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε.)
Για $1 \leq i \neq j \leq 5$, έστω G_{ij} το υπογράφημα του $G \setminus v$ που ενάγεται από τα χρώματα i και j. Κάνοντας αντιμετάθεση των χρωμάτων σε οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του G_{ij}, παίρνουμε νόμιμο χρωματισμό στο $G \setminus v$.

Περίπτωση 1: Για κάποια $1 \leq i \neq j \leq 5$ η συνιστώσα K του G_{ij} που περιέχει το v_i δεν περιέχει το v_j. Αντιμεταθέτοντας τα χρώματα i, j εντός της K παίρνουμε νόμιμο χρωματισμό, απομακρύνοντας το χρώμα i από τους γείτονες του v. Μπορούμε τότε να χρωματίσουμε το v με το χρώμα i.
Περίπτωση 2: Για κάθε $1 \leq i \neq j \leq 5$, η συνιστώσα του G_{ij} που περιέχει το v_i, περιέχει και το v_j. Έστω P_{ij} το v_i-v_j μονοπάτι στο G_{ij}. Οι κορυφές του P_{ij} είναι χρωματισμένες εναλλάξ με i και j. Θεωρούμε τα μονοπάτια P_{13} και P_{24} τα οποία όπως προκύπτει από το Θεώρημα Jordan τέμνονται. Επειδή το G είναι ενεπίπεδο, τέμνονται σε κορυφή u. Όμως τότε η u είναι χρωματισμένη με δύο διαφορετικά χρώματα, άτοπο (Σχήμα 22.1). ∎

Το παρακάτω θεώρημα ήταν εικασία από το 1852. Στις γνωστές του αποδείξεις γίνεται ευρεία χρήση υπολογιστή.



Σχήμα 22.1: Η 2η περίπτωση της απόδειξης του Θ. Heawood καταλήγει σε άτοπο λόγω επιπεδότητας.

Θεώρημα 22.2 (Θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων [Appel, Haken, 1977]) *Για κάθε επίπεδο γράφημα G, $\chi(G) \leq 4$.*

22.2 Κατασκευή Mycielski

Η μη ύπαρξη μεγάλης κλίκας δεν συνεπάγεται άνω φράγμα στον χρωματικό αριθμό. Υπάρχουν γραφήματα G με αυθαίρετα μεγάλο χρωματικό αριθμό, για τα οποία $\omega(G) = 2$.

Ορισμός 22.1 (Κατασκευή του Mycielski, 1955) *Δημιουργία ακολουθίας γραφημάτων ως εξής:*

Είσοδος: *Γράφημα M_i που δεν περιέχει το K_3 ως υπογράφημα, $\chi(M_i) = i$.*
Έξοδος: *Γράφημα M_{i+1} που δεν περιέχει το K_3 ως υπογράφημα, $\chi(M_{i+1}) = i + 1$.*

Αρχικοποίηση: $M_2 = K_2$.
Υλοποίηση: *Αν $M_i = G$, $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$,*
$M_{i+1} = G'$ *όπου* $V(G') = \{v_1, ..., v_n\} \cup \{u_1, ..., u_n\} \cup \{w\}$.
$U = \{u_1, ..., u_n\}$ *ανεξάρτητο σύνολο.*
$N'_G(u_i) = N_G(v_i) \cup \{w\}$, $N'_G(w) = U$ *και* $E(G') \cap E(G) = E(G)$,
δηλ. οι ακμές του G διατηρούνται στο G'.

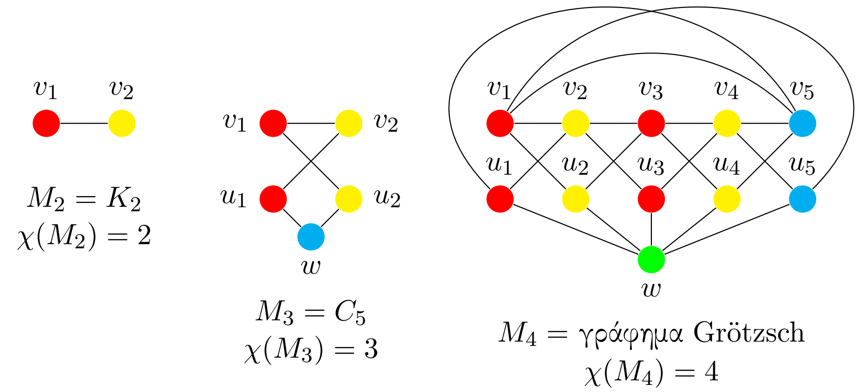
Ιδιότητες: Το M_i είναι $(i-1)$-συνεκτικό και $|V(M_i)| = 3 \cdot 2^{i-2} - 1$.

Στον εξωτερικό κύκλο του M_4 (Σχήμα 22.3) χρειάζονται 3 χρώματα, επίσης 3 χρώματα απαιτούνται για τον χρωματισμό των u_i και αναπόφευκτα στο w απαιτείται τέταρτο χρώμα.

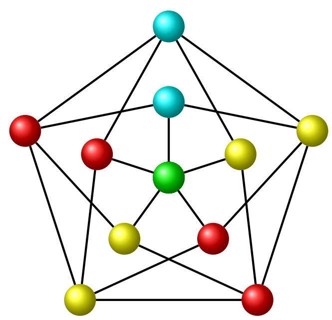
Το παρακάτω θεώρημα θα το αποδείξουμε στην επόμενη διάλεξη.

Θεώρημα 22.3 *Αν γράφημα G δεν περιέχει τρίγωνα και $\chi(G) = k$, η κατασκευή του Mycielski παράγει γράφημα G' που δεν περιέχει τρίγωνα με $\chi(G') = k + 1$.*

Εικασία 22.1 (Hadwiger, 1943) *Αν $\chi(G) \geq t$, ο G περιέχει το K_t ως έλασσον $\Leftrightarrow$ Αν το G δεν περιέχει το K_{t+1} ως έλασσον, τότε $\chi(G) \leq t$.*



Σχήμα 22.2: Τα 3 πρώτα γραφήματα της ακολουθίας Mycielski.



Σχήμα 22.3: Συνήθης εμβάπτιση στο επίπεδο του γραφήματος Grötzsch (M_4).

Αν ισχύει η Εικασία του Hadwiger, προκύπτει ως πόρισμα και το Θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων, καθώς από το Θεώρημα Wagner γνωρίζουμε ότι ένα επίπεδο γράφημα G δεν περιέχει ως έλασσον το K_5.