Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 23: 11 & 12.01.2017 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Ιωάννης Μπαρούμας & Σ. Κ.

23.1 Κατασκευή Mycielski (συνέχεια)

Θεώρημα 23.1 *Αν ένα γράφημα G δεν περιέχει τρίγωνα και $\chi(G) = k$, η κατασκευή του Mycielski παράγει γράφημα G' που δεν περιέχει τρίγωνα με $\chi(G') = k + 1$.*

Απόδειξη: Έστω γράφημα G χωρίς τρίγωνα και $\chi(G) = k$. Αφού $\{u_i\}_{i\in[n]}$ ανεξάρτητο στο G' και δεν υπάρχουν ακμές από το $V(G)$ στο w, στο G' δεν υπάρχουν τρίγωνα που να περιέχουν το w. Οποιοδήποτε τρίγωνο περιέχει μια κορυφή u_i, πρέπει να έχει δύο άλλες κορυφές στο $V(G)$ και αυτές θα ήταν γειτονικές του v_i. Άρα ο G θα περιείχε τρίγωνο, που δεν ισχύει.

Ένας k-χρωματισμός του G επεκτείνεται σε $(k-1)$-χρωματισμό του G', θέτοντας $f(u_i) = f(v_i)$ και $f(w) = k + 1$. Άρα $\chi(G') \leq k + 1$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει k-χρωματισμός του G'. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(w) = k$, που περιορίζει τις τιμές του g στο $\{u_i\}_{i\in[n]}$ στο $[k-1]$.

Έστω $A := \{v_i : g(v_i) = k\}$. Θα κατασκευάσουμε $(k-1)-$χρωματισμό του G. Για κάθε $v_i \in A$, αλλάζουμε το χρώμα του σε $g(u_i)$. Το g αποτελεί νόμιμο χρωματισμό, άρα το A είναι ανεξάρτητο σύνολο στο G', άρα και στο G. Αρκεί να ελέγξουμε τις ακμές $\{v_i, v'\}, v' \in V(G \setminus A)$ και $v_i \in A$. Αν $\{v_i, v'\} \in E(G)$, τότε $\{u_i, v'\} \in E(G')$, άρα $g[u_i] \neq g[v']$. Άρα η αλλαγή χρώματος του v_i από k σε $g[u_i]$ δεν δημιουργεί πρόβλημα. Τελικά βρήκαμε $(k-1)$-χρωματισμό του G, άτοπο. ∎

Παρατήρηση 23.1 *Έστω $M_2 = K_2$ με $\chi(M_2) = 2$. Σε i βήματα έχουμε M_{i+2} με $\chi(M_{i+2}) = 2+i$. Όμως $\omega(M_{i+2}) = 2$ και $\chi(G) >> \omega(G)$.*

Εικασία 23.1 (Hadwiger, 1943) *Αν $\chi(G) \geq t$, το G περιέχει το K_t ως έλασσον.*

23.2 Χρωματισμός και περιφέρεια

Ορισμός 23.1 Περιφέρεια (girth) *ενός γραφήματος είναι το μήκος του μικρότερου κύκλου που περιέχεται σε αυτό.*

Γραφήματα με μεγάλη περιφέρεια τοπικά μοιάζουν με δέντρα. Θα δείξουμε όμως ότι υπάρχουν γραφήματα με μεγάλη περιφέρεια και μεγάλο χρωματικό αριθμό. Η απόδειξη θα κάνει χρήση της *πιθανοτικής μεθόδου.*

Η πιθανοτική μέθοδος απόδειξης στην θεωρία γραφημάτων δουλεύει ως εξής. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός γραφήματος με μια συγκεκριμένη ιδιότητα P ορίζουμε μια κατανομή πιθανότητας πάνω σε όλα τα γραφήματα. Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει γράφημα με την ιδιότητα P το οποίο έχει μη μηδενική πιθανότητα σε αυτή την κατανομή.

Έστω X και Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύουν τα εξής:
(i) $E[X] = \sum_x xPr(X = x)$.
(ii) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
(iii) Ανισότητα του Markov: Για $X \geq 0$ ισχύει $Pr(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}, \forall a > 0$.
(iv) Union Bound: $Pr(A \cup B) \leq Pr(A) + Pr(B)$.

Θεώρημα 23.2 (Erdős, 1959) *Για οποιεσδήποτε σταθερές k και l, υπάρχει γράφημα G με $\chi(G) > k$ και περιφέρεια μεγαλύτερη του l.*

Απόδειξη: Έστω $G_{n,p}$ τυχαίο γράφημα με n κορυφές όπου κάθε ακμή περιλαμβάνεται ανεξάρτητα, με πιθανότητα p, όπου $p = n^{\lambda-1}, \lambda \in \left(0, \frac{1}{l}\right)$.

Ορίζουμε τυχαία μεταβλητή X, η οποία ισούται με τον αριθμό των κύκλων μήκους το πολύ l στο $G_{n,p}$. Ισχύει ότι ο αριθμός των κύκλων μήκους i είναι μικρότερος ή ίσος του n^i.

Έχουμε $E[X] \leq \sum_{i=3}^{l} n^i p^i = \sum_{i=3}^{l} n^{\lambda i} < 2n^{\lambda l}$. Επειδή $\lambda l < 1$ για αρκετά μεγάλο n ισχύει ότι $2n^{\lambda l} < \frac{n}{4}$.

Από Ανισότητα Markov έχουμε: $Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] \leq \frac{E[X]}{\frac{n}{2}}$. Για αρκετά μεγάλο n έχουμε:

$$Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n}{2}} \Rightarrow Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2} \tag{23.1}$$

Ορίζουμε $a = \left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil$. Τότε $Pr\left[\alpha(G) \geq a\right] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \overset{1}{\leq} \binom{n}{a} e^{-p\binom{a}{2}} \leq n^a e^{-p\frac{a(a-1)}{2}} \overset{2}{\leq} n^a e^{-3\ln n\left(\frac{a-1}{2}\right)} = n^a n^{-3\frac{a-1}{2}} \to 0$. Τελικά για αρκετά μεγάλο n ισχύει ότι:

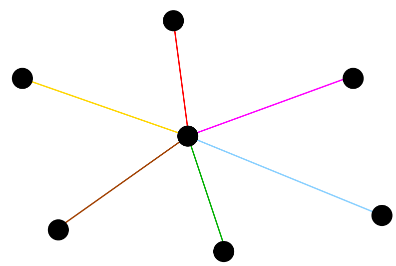
$$Pr\left[\alpha(G) \geq a\right] < \frac{1}{2}. \tag{23.2}$$

Από τις (23.1), (23.2) έχουμε $Pr\left[X \geq \frac{n}{2} \text{ ή } \alpha(G) \geq a\right] < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Άρα με μη μηδενική πιθανότητα υπάρχει γράφημα G με αριθμό κύκλων μήκους το πολύ l μικρότερο από $\frac{n}{2}$ και $\alpha(G) < a$. Σβήνοντας μια κορυφή από κάθε κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του l παίρνουμε γράφημα G' με $|G'| \geq \frac{n}{2}$. Έχουμε $\text{girth}(G') > l$ και $\alpha(G') < a$. Τότε, $\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{1-\lambda}\ln n} = \frac{n^\lambda}{6\ln n} > k$ για αρκετά μεγάλο n.
■

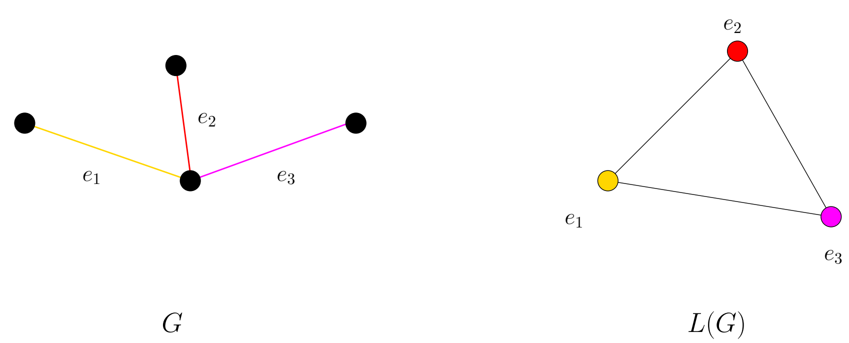
[1] Χρησιμοποιούμε την ανισότητα $1 + x \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.
[2] $a \geq \frac{3}{p} \ln n \Rightarrow pa \geq 3 \ln n \Rightarrow e^{-pa} \leq e^{-3\ln n}$.

23.3 Ακμοχρωματισμός Γραφημάτων

Ορισμός 23.2 $k-$ακμοχρωματισμός (k-edge-coloring) *του G είναι μια συνάρτηση $f : E(G) \to [k]$ τέτοια ώστε ακμές που μοιράζονται κορυφή να έχουν διαφορετικό χρώμα. Το G λέγεται k-*ακμοχρωματίσιμο *αν έχει k-ακμοχρωματισμό. Ο* ακμοχρωματικός αριθμός *του G* (edge-chromatic number ή chromatic index) *συμβολίζεται με $\chi'(G)$ και είναι ίσος με το ελάχιστο k τέτοιο ώστε το G να είναι k-ακμοχρωματίσιμο.*



Σχήμα 23.1: $\chi'(K_{1,6}) = 6$ αφού όλες οι ακμές μοιράζονται μια κοινή κορυφή.



Σχήμα 23.2: Ο ακμοχρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι ίδιος με τον χρωματικό αριθμό του γραμμικού του γραφήματος.

Παρατηρήσεις

(i) $\chi'(G) = \chi(L(G))$.
(ii) $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
(iii) Αν $\Delta(G) = \Delta$ τότε $\Delta(L(G)) \leq 2(\Delta - 1) \Rightarrow \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \overset{(i)}{\Rightarrow} \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1 \Rightarrow \Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

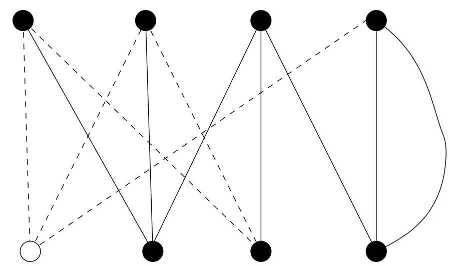
Θεώρημα 23.3 (Vizing, 1964) *Για κάθε απλό γράφημα G ισχύει ότι $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Θεώρημα 23.4 (Holyer, 1980) *Δεδομένου ενός γραφήματος G ο υπολογισμός του $\chi'(G)$ είναι NP-hard πρόβλημα.*

Παρατήρηση 23.2 *Ένας ακμοχρωματισμός του G ορίζει διαμέριση του $E(G)$ σε ταιριάσματα (ανεξάρτητα σύνολα ακμών).*

Θεώρημα 23.5 (Kőnig, 1916) *Αν G διμερές πολυγράφημα, τότε $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Hall προκύπτει ότι κάθε διμερές κανονικό πολυγράφημα H έχει τέλειο ταίριασμα. Επαγωγικά στο $\Delta(H)$, παίρνουμε $\Delta(H)$-ακμοχρωματισμό. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε διμερές πολυγράφημα G με $\Delta(G) = k$ υπάρχει k-κανονικό διμερές γράφημα H που είναι υπεργράφημα του G.



Σχήμα 23.3: Με μαύρο χρώμα συμβολίζουμε τις ακμές και τις κορυφές του αρχικού γραφήματος, ενώ διακεκομμένες είναι οι ακμές που προσθέτουμε στα ζεύγη του G'.

Αν το G έχει άνισα μέρη, προσθέτουμε κορυφές στο μικρότερο έτσι ώστε να εξισωθούν. Αν το G' που προκύπτει δεν είναι κανονικό, κάθε μέρος περιέχει κορυφή με βαθμό μικρότερο του $\Delta(G') = \Delta(G)$. Προσθέτουμε μια ακμή ανάμεσα στο ζεύγος. Συνεχίζουμε μέχρι το γράφημα να γίνει k-κανονικό (Βλ. Σχήμα 23.3). ∎