Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 1: 08.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σ. Κ.

1.1 Γραμμική και αφινική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλούνται *γραμμικά ανεξάρτητα* αν

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j = 0, \;\; \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_t = 0.$$

Το σύνολο $L \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι *γραμμικός υπόχωρος* αν $\forall x, y \in L, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in L$. Πολλές φορές, θα λέμε απλά «γραμμικός χώρος».

Παράδειγμα 1.1 *Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος.*

Ορισμός 1.1 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το* γραμμικό κάλυμμα *(linear hull) του X ορίζεται ως*

$$\mathrm{span}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 0, \; x_1, \dots, x_t \in X, \; , \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}\}.$$

Τα διανύσματα $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλούνται *αφινικά ανεξάρτητα (affinely independent)* αν

$$\left(\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j = 0, \;\; \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}, \;\; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 0\right) \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_t = 0.$$

Το σύνολο $L \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι *αφινικός υπόχωρος* αν $\forall x, y \in L, \lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda x + (1-\lambda) y \in L$. Πολλές φορές, θα λέμε απλά «αφινικός χώρος» ή «αφινικό σύνολο».

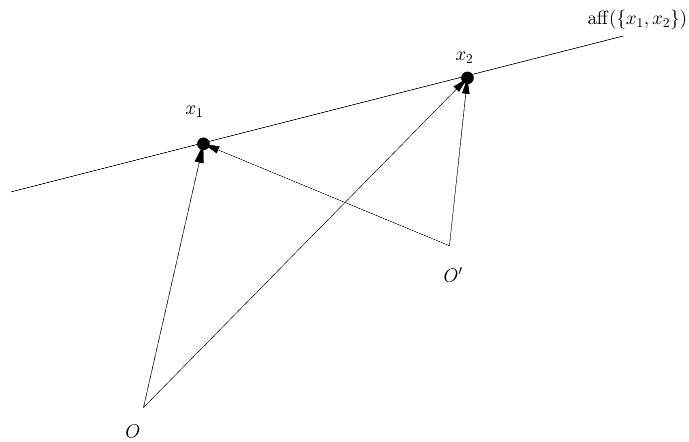
Παράδειγμα 1.2 *Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ είναι αφινικός υπόχωρος.*

Κάθε γραμμικός υπόχωρος είναι και αφινικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Στον ορισμό του αφινικού υπόχωρου χρησιμοποιήσαμε μια ειδική περίπτωση γραμμικού συνδυασμού. *Αφινικός συνδυασμός (affine combination)* των $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλείται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t, \;\; \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}, \;\; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1.$$

Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς της αφινικής ανεξαρτησίας και του αφινικού συνδυασμού. Στην πρώτη περίπτωση, οι συντελεστές αθροίζουν στο 0, στη δεύτερη στο 1.



Σχήμα 1.1: Το αφινικό κάλυμμα των x_1, x_2 είναι ανεξάρτητο από την αρχή των αξόνων O ή O'.

Ορισμός 1.2 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το αφινικό κάλυμμα (affine hull) του X ορίζεται ως*

$$\operatorname{aff}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 1,\ x_1, \ldots, x_t \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1\}.$$

Διαισθητικά, στους αφινικούς συνδυασμούς, μας είναι αδιάφορη η αρχή των αξόνων. Το αποτέλεσμα δεν αλλάζει αν κανείς μετατοπίσει τα διανύσματα, προσθέτοντας σε όλα το ίδιο διάνυσμα b. Π.χ., το αφινικό κάλυμμα δύο σημείων $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \neq x_2$, είναι η ευθεία που ορίζουν τα δύο σημεία. Πιο συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_2 - x_1) + x_1.$$

Επιβεβαιώστε ότι το παραπάνω άθροισμα δεν εξαρτάται από το ποιο σημείο επιλέγουμε ως αρχή των αξόνων. Βλέπε Σχήμα 1.1.

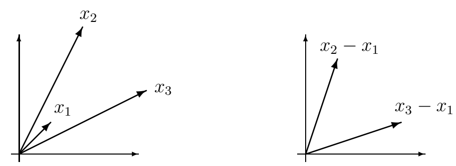
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $\operatorname{aff}(X)$ είναι το μικρότερο αφινικό σύνολο που περιέχει το X. Έστω A αφινικός υπόχωρος τ. ώ. $X \subseteq A$. Οποιοδήποτε $s \in \operatorname{aff}(X)$ είναι αφινικός συνδυασμός στοιχείων του X. Το A είναι κλειστό ως προς αφινικούς συνδυασμούς, άρα $s \in A$ και τελικά $\operatorname{aff}(X) \subseteq A$.

Οι επόμενες δύο προτάσεις εμβαθύνουν στην έννοια της αφινικής ανεξαρτησίας. Η απόδειξη τους αφήνεται σαν άσκηση.

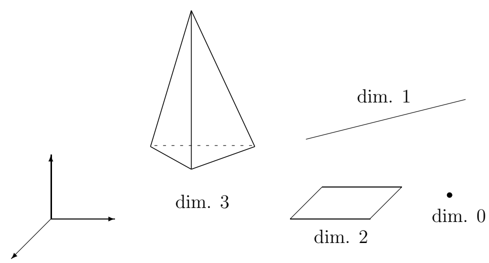
Πρόταση 1.1 *Έστω $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$ αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα και $w \in \mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $x_1 + w, \ldots, x_t + w$ είναι επίσης αφινικά ανεξάρτητα.*

Θεώρημα 1.1 *Τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν τα διανύσματα $x_2 - x_1, \ldots, x_t - x_1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του Θεωρήματος 1.1 βρίσκεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Τα διανύσματα x_1, x_2, x_3 είναι αφινικά ανεξάρτητα.



Σχήμα 1.3: Κάποια παραδείγματα συνόλων στο $\mathbb{R}^3$ και η διάσταση τους.

Μας ενδιαφέρουν οι αφινικοί χώροι, και όχι μόνο οι γραμμικοί, για τον ίδιο λόγο που μας ενδιαφέρουν συστήματα εξισώσεων της μορφής $Ax = b$, και όχι μόνο τα ομογενή συστήματα $Ax = 0$.

Η αφινική ανεξαρτησία είναι ο σωστός τρόπος να ορίσουμε τη διάσταση ενός συνόλου διανυσμάτων (σημείων).

Ορισμός 1.3 *Η* διάσταση *ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}^n$, συμβολίζεται $\dim(S)$, και ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός αφινικά ανεξάρτητων σημείων του S μείον 1.*

Στο Σχήμα 1.3 δίνονται κάποια παραδείγματα συνόλων στο $\mathbb{R}^3$ και η διάσταση τους.

1.2 Κυρτά σύνολα, κώνοι, πολύεδρα

Κυρτός συνδυασμός (convex combination) των $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλείται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+, \;\; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1.$$

Ορισμός 1.4 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το* κυρτό κάλυμμα *(convex hull) του X ορίζεται ως*

$$\mathrm{conv}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 1, \; x_1, \ldots, x_t \in X, \; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+, \; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1\}.$$

Ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$, καλείται *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, ισχύει $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. Αποδεικνύεται εύκολα πως το $\mathrm{conv}(X)$ είναι το ελαχιστικό κυρτό σύνολο που περιέχει το X.

Παράδειγμα 1.3 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Τα σύνολα $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ είναι κυρτά. Επίσης η μοναδιαία μπάλα $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ είναι κυρτό σύνολο.*

Κωνικός συνδυασμός (conic combination) των $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλείται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \geq 0.$$

Ορισμός 1.5 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το* κωνικό κάλυμμα *(conic hull) του X ορίζεται ως*

$$\mathrm{cone}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 1,\; x_1, \ldots, x_t \in X,\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \geq 0\}.$$

Ορισμός 1.6 *Ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$, καλείται* κώνος *αν για κάθε $x, y \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, ισχύει $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in C$.*

Καμιά φορά χρησιμοποιούμε τον όρο «κυρτός κώνος», αν και όπως δείχνει η επόμενη πρόταση είναι πλεονασμός.

Πρόταση 1.2 *Κάθε κώνος είναι κυρτό σύνολο.*

Παράδειγμα 1.4 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ είναι κώνος.*

Ορισμός 1.7 *Για $t \geq 1$, $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, ο κώνος $\mathrm{cone}(\{x_1, \ldots, x_t\})$ καλείται* πεπερασμένα παραγόμενος (finitely generated). *Για $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ο κώνος $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ καλείται* πολυεδρικός.

Αργότερα θα δούμε πως οι δύο έννοιες, πεπερασμένα παραγόμενος κώνος και πολυεδρικός συμπίπτουν. Ο χαρακτηρισμός «πολυεδρικός» πηγάζει από τον παρακάτω θεμελιώδη ορισμό.

Ορισμός 1.8 Πολύεδρο *είναι ένα σύνολο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.*