Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 5: 22.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

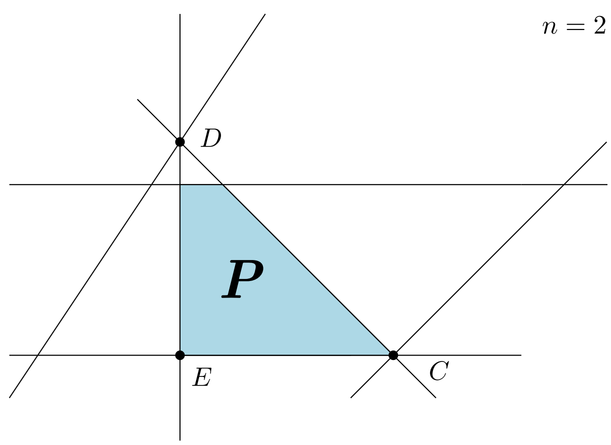
Γραφείς: Ζακυνθινού Λυδία, Τζιώτης Ισίδωρος, Σ. Κ.

5.1 Εκφυλισμένες βασικές λύσεις

Το αντίστροφο της επόμενης πρότασης δεν ισχύει εν γένει.

Πρόταση 5.1 *Έστω πολύεδρο σε πρότυπη μορφή και βασικές λύσεις x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$. Τότε οι αντίστοιχες βάσεις B_1, B_2 είναι διακεκριμένοι πίνακες.*

Ορισμός 5.1 *Μία βασική λύση $x \in \mathbb{R}^n$ ενός πολυέδρου $P \subset \mathbb{R}^n$ καλείται* εκφυλισμένη *αν περισσότεροι από n περιορισμοί είναι ενεργοί στο x.*

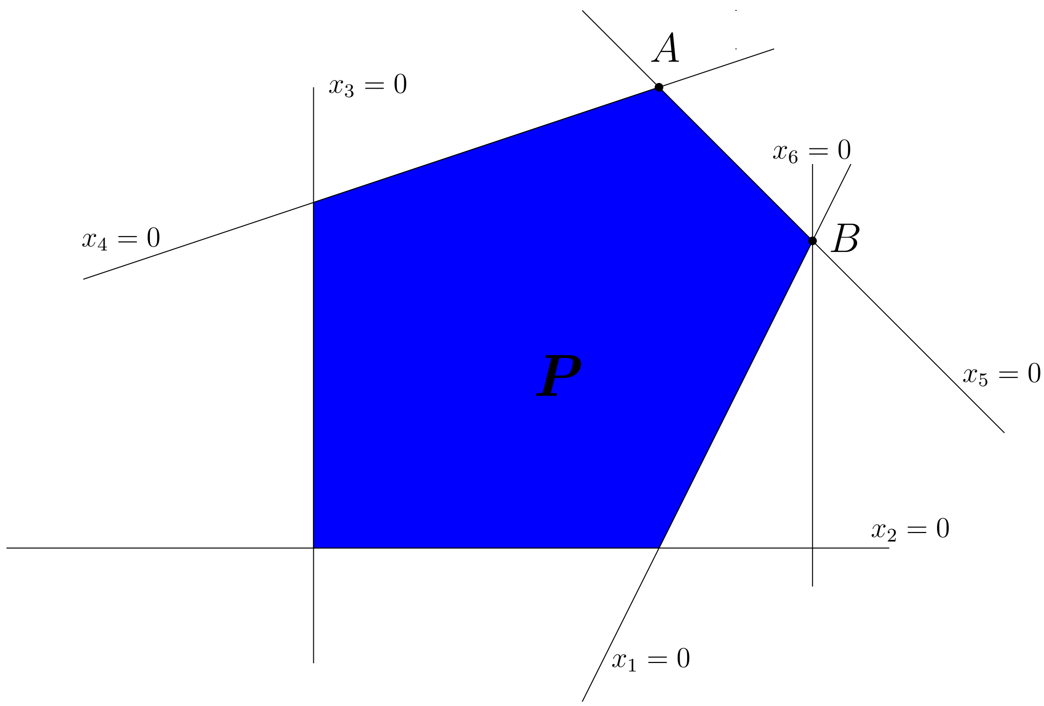


Σχήμα 5.1: Οι C, D είναι εκφυλισμένες και η E μη εκφυλισμένη βασική λύση (Παράδειγμα από [1]).

Παρατήρηση 5.1 *Έστω πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και x μία βασική λύση. Η x είναι εκφυλισμένη βασική λύση αν περισσότερες από $n - m$ συντεταγμένες του x είναι μηδέν. Δηλαδή υπάρχουν βασικές μεταβλητές που είναι μηδέν.*

Ορισμός 5.2 *Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ και έστω το υποσύστημα $A^= x \leq b^=$ του οποίου οι περιορισμοί ικανοποιούνται με ισότητα για κάθε σημείο $x \in P$. Οι περιορισμοί αυτοί ονομάζονται* υποδηλούμενες ισότητες *του συστήματος.*

Για το Παράδειγμα 5.1 και τις Παρατηρήσεις 5.2, 5.3 που ακολουθούν, υποθέτουμε χάριν απλότητας ότι καμία ανισότητα της μορφής $x_i \geq 0$, $i \in [n]$, δεν είναι υποδηλούμενη ισότητα.

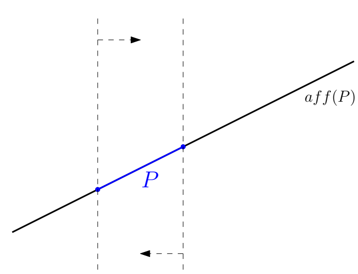


Σχήμα 5.2: Παράδειγμα πολυτόπου $P \subseteq \mathbb{R}^6$ [1]. Η B είναι εκφυλισμένη β.ε.λ.

Παράδειγμα 5.1 (Πηγή: [1]) *Στο Σχήμα 5.2 απεικονίζεται πολύτοπο P ορισμένο σε πρότυπη μορφή με $n = 6, m = 4$. Γιατί υποθέσαμε ότι η διάσταση του πολυτόπου είναι 2;*

Η ακόλουθη Παρατήρηση 5.2 θα αποδειχθεί στη Διάλεξη 11. Για την ώρα ας τη δεχτούμε μέσω ενός παραδείγματος.

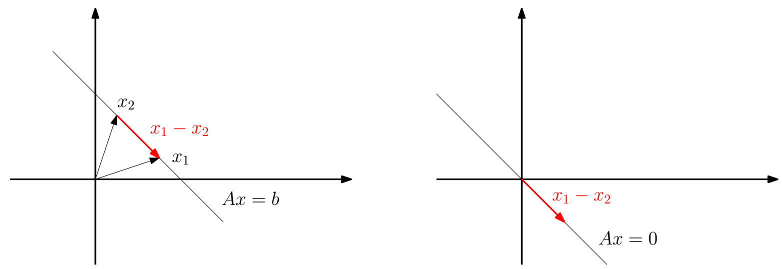
Παρατήρηση 5.2 *Οι ανισότητες του συστήματος δεν επηρεάζουν τους αφινικούς συνδυασμούς. Δηλαδή $\mathrm{aff}(P) = \mathrm{aff}(\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}) = \mathrm{aff}(\{x \mid Ax = b\})$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του Σχήματος 5.3.*



Σχήμα 5.3: Παρότι το P είναι φραγμένο από ανισότητες, ο ελάχιστος αφινικός υπόχωρος που περιέχει το P δεν επηρεάζεται από αυτές.

Παρατήρηση 5.3 *Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$. Από τον Ορισμό 1.3 η διάσταση* $\dim(\mathrm{P})$ *είναι ίση με:*

$\max\{\#\text{αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του } P\} - 1 =$ *(Παρατήρηση 5.2)*
$\max\{\#\text{αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του } \{x \mid Ax = b\}\} - 1 =$ *(Άσκηση)*
$\max\{\#\text{γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του } \{x \mid Ax = 0\}\} =$
$n - rank(A) =$ *(full rank hypothesis)*
$n - m$



Σχήμα 5.4: Παράδειγμα στο οποίο $\max\{\#\text{αφ.ανεξ.διαν. του } \{x \mid Ax = b\}\} - 1 = 2 - 1 = \max\{\#\text{γρ.ανεξ.διαν. του } \{x \mid Ax = 0\}\}$

Άρα στο Παράδειγμα 5.1, η διάσταση του πολυτόπου είναι όντως $n - m = 2$ όπως φαινόταν στο Σχήμα 5.2.

- Το σημείο A του πολυτόπου είναι μη εκφυλισμένη βασική λύση γιατί έχει $2 \leq n - m$ συντεταγμένες στο 0, τις x_4 και x_5. Αυτές είναι και οι μη βασικές μεταβλητές της λύσης.
- Αντίθετα, το σημείο B είναι εκφυλισμένη βασική λύση αφού έχει $3 > n - m$ συντεταγμένες στο 0, τις x_1, x_5 και x_6. Εδώ μπορούμε να διαλέξουμε οποιεσδήποτε δύο εξ αυτών ως βασικές, δηλαδή έχουμε $\binom{3}{2}$ επιλογές για τη βάση. Δεν υπάρχει a priori εγγύηση ότι όλες οι επιλογές δίνουν έγκυρη βάση, δηλαδή έναν πίνακα με full column rank.

Παρατήρηση 5.4 *Το αν μια λύση είναι εκφυλισμένη ή όχι εξαρτάται από τη συγκεκριμένη αλγεβρική αναπαράσταση του πολυτόπου.*

Για παράδειγμα, αν x^* είναι μία μη εκφυλισμένη βασική λύση του πολυτόπου $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε ακριβώς $n - m$ συντεταγμένες της είναι 0. Η ίδια λύση στο ίδιο πολύτοπο εκφρασμένο στη μορφή $P' = \{x \mid Ax \geq b, -Ax \geq -b, x \geq 0\}$ ικανοποιεί $2m + (n - m) = n + m > n$ περιορισμούς με ισότητα, άρα από τον Ορισμό 5.1 είναι εκφυλισμένη.

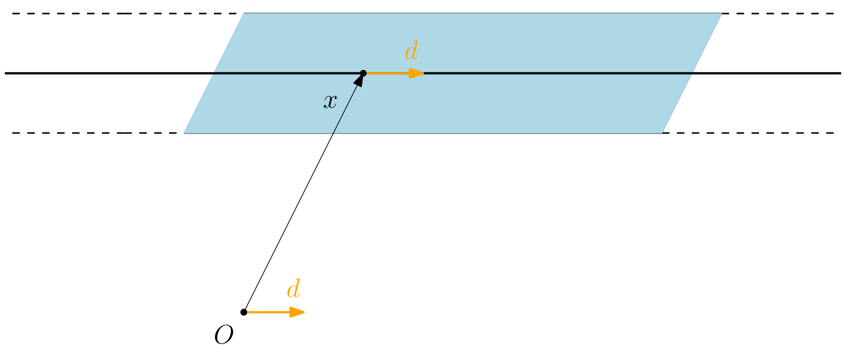
5.2 Πολύεδρα χωρίς ακραία σημεία

Παρατήρηση 5.5 *Υπάρχουν πολύεδρα χωρίς ακραία σημεία.*

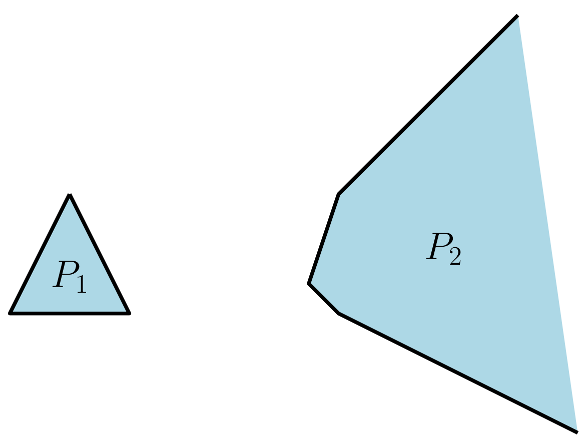
Παράδειγμα 5.2

1. $P = \{x \mid a^T x = b\}$ *(ευθεία)*
2. $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ *Αν* $m < n$, *ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος* 3.2 *το πολύτοπο δεν έχει ακραία σημεία.*

Ορισμός 5.3 *Έστω πολύεδρο* $P \subseteq \mathbb{R}^n$. *Το* P περιέχει μία ευθεία *αν υπάρχει σημείο* $x \in P$ *και μη μηδενικό διάνυσμα* $d \in \mathbb{R}^n$ *τέτοια ώστε:* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x + \lambda d \in P$.



Σχήμα 5.5: Παράδειγμα πολυτόπου του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει ευθεία, με σημείο x και διάνυσμα d όπως στον Ορισμό 5.3



Σχήμα 5.6: Το πολύεδρο P_1 δεν περιέχει ευθεία και το ίδιο ισχύει για το P_2 παρότι είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα 5.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b, i = 1, \ldots, m\}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

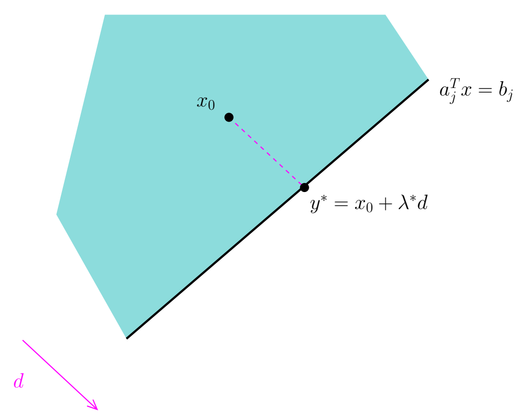
(i) Το P έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο.

(ii) Το P δεν περιέχει ευθεία.

(iii) Υπάρχουν n διανύσματα στο σύνολο $\{a_1, \ldots, a_m\}$ τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.
(ii) $\Longrightarrow$ (i)
Έστω τυχόν $x_0 \in P$, $I = \{i \mid a_i^T x_0 = b_i\}$ και $A_I = \bigcup_{i \in I} \{a_i\}$. Αν το A_I περιέχει n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε το x_0 είναι β.ε.λ. και κατ' επέκταση ακραίο σημείο. Αν το παραπάνω δεν ισχύει τότε έχουμε $\text{span}(A_I) \subset \mathbb{R}^n$ και άρα υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα d τέτοιο ώστε $\forall i \in I, a_i^T d = 0$.

Ορίζουμε ευθεία $y = x_0 + \lambda d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι $\forall i \in I, a_i^T y = a_i^T(x_0 + \lambda d) = a_i^T x_0 + \lambda a_i^T d = a_i^T x_0 = b_i$. Όμως αφού δεν υπάρχει ευθεία στο πολύεδρο P, μεταβάλλοντας κατάλληλα το λ θα παραβιάσουμε έναν περιορισμό (Σχήμα 5.7). Υπάρχει οριακή τιμή λ^* τ. ώ. $x_0 + \lambda^* d \in P$ και κάποιος περιορισμός j γίνεται ενεργός έτσι ώστε $a_j^T(x_0 + \lambda^* d) = b_j, j \notin I$.



Σχήμα 5.7: Ο περιορισμός $a_j^T x \geq b_j$ είναι ενεργός για το σημείο $y^* = x_0 + \lambda^* d$ της ευθείας.

Ισχυρισμός 5.1 *Το διάνυσμα $a_j \notin \text{span}(A_I)$.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Ισχύει ότι $j \notin I \Rightarrow a_j^T x_0 \neq b_j$. Αφού $a_j^T(x_0 + \lambda^* d) = b_j$, παίρνουμε $a_j^T d \neq 0$. Το διάνυσμα d είναι κάθετο στο $\text{span}(A_I)$, άρα το a_j δεν μπορεί να ανήκει στο $\text{span}(A_I)$. ∎

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε διαδοχικά σημεία που ικανοποιούν όλο και περισσότερους γραμμικά ανεξάρτητους περιορισμούς με ισότητα. Όταν το πλήθος τους γίνει n, έχουμε βρει β.ε.λ. δηλαδή ακραίο σημείο.

(i) $\Longrightarrow$ (iii)
Προκύπτει με τετριμμένο τρόπο από τον ορισμό του ακραίου σημείου.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $a_1, \ldots, a_n$ γραμμικά ανεξάρτητα και υποθέτουμε ότι για κάποιο $d \neq 0$ ορίζεται ευθεία $L = \{x + \lambda d \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ με $L \subseteq P$. Άρα $\forall i$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i \tag{5.1}$$

Αν $a_i^T d > 0$ η (5.1) θα παραβιάζεται για κατάλληλο $\lambda < 0$ ενώ αντίστοιχα αν $a_i^T d < 0$ η (5.1) θα παραβιάζεται για κατάλληλο $\lambda > 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $a_i^T d = 0$, δηλαδή υπάρχει $d \neq 0$ το οποίο είναι κάθετο στο $\text{span}(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\})$. Άρα $\text{span}(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}) \subset \mathbb{R}^n$, άτοπο. ∎

Από το Θεώρημα 5.1 παίρνουμε άμεσα το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 5.1 *Κάθε μη κενό φραγμένο πολύεδρο και κάθε πολύεδρο σε πρότυπη μορφή έχουν τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο.*

*5.3 Εξάλειψη των εκφυλισμένων λύσεων

Όπως αναλύουμε στο Φυλλάδιο 01, η ύπαρξη εκφυλισμένων λύσεων μπορεί να οδηγήσει στον μη τερματισμό του Αλγορίθμου Simplex. Με κατάλληλη διαταραχή (perturbation) του δεξιού μέλους των περιορισμών μπορούμε να εξαλείψουμε τις εκφυλισμένες βασκές λύσεις. Ξεκινώντας από το σύστημα

$$Ax \leq b$$

προσθέτουμε στο δεξί μέλος διάνυσμα $p_\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)^T$ και παίρνουμε το

$$Ax \leq b + p_\varepsilon. \tag{5.2}$$

Θυμηθείτε τον Ορισμό 3.3 (ορισμός εφικτής βάσης).

Λήμμα 5.1 *Κάθε εφικτή λύση του $Ax \leq b$ είναι εφικτή και για το $Ax \leq b + p_\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Αν το B είναι μη εφικτή βάση για το $Ax \leq b$, το B είναι μη εφικτή βάση για το $Ax \leq b + p_\varepsilon$ για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής. Έστω B μια μη εφικτή βάση, δηλ. το διάνυσμα $A_B^{-1}b_B$ δεν είναι εφικτή λύση. Επομένως υπάρχει $i \in [m] \setminus B$ και $\delta > 0$ έ. ώ.

$$a_i^T(A_B^{-1}b_B) \geq b_i + \delta.$$

Θεωρώντας το σύστημα με το διαταραγμένο δεξί μέλος, για τον iστό περιορισμό και κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ παίρνουμε ότι

$$a_i^T A_B^{-1}(b_B + p_{\varepsilon B}) \geq b_i + \delta + A_B^{-1}p_{\varepsilon B} > b_i.$$

(Με $p_{\varepsilon B}$ συμβολίσαμε τον περιορισμό του p_ε στις θέσεις που ορίζει το σύνολο δεικτών B.) Άρα η B δεν είναι εφικτή βάση για το $Ax \leq b + p_\varepsilon$. ∎

Θεώρημα 5.2 *Αν το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό, το σύστημα (5.2) δεν έχει εκφυλισμένες βασικές λύσεις.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα (5.2) έχει μια εκφυλισμένη βασική λύση $x^* \in \mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί στη βάση B. Δηλαδή $x^* = A_B^{-1}(b_B + p_{\varepsilon B})$. Τότε υπάρχει δείκτης $i \in [m] \setminus B$ έ. ώ.

$$a_i^T x^* = b_i + \varepsilon^i. \tag{5.3}$$

Η παράσταση $a_i^T x^* - b_i - \varepsilon^i$ είναι ένα πολυώνυμο με μεταβλητή ε. Το πολυώνυμο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν γιατί ο συντελεστής του όρου ε^i ισούται με -1 (παρατηρήστε ότι το ε^i δεν εμφανίζεται στο $p_{\varepsilon B}$). Το πολυώνυμο έχει ένα πεπερασμένο πλήθος ριζών. Αν το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό δεν ταυτίζεται με καμία ρίζα του $a_i^T x^* - b_i - \varepsilon^i$, για $i \in [m] \setminus B$. Άρα η (5.3) δεν ισχύει, άτοπο. ∎

Ο αλγόριθμος Simplex δοκιμάζει μια ακολουθία βασικών εφικτών λύσεων μέχρι να καταλήξει στη βέλτιστη. Αν τον τρέξουμε με είσοδο το διαταραγμένο σύστημα (5.2), σύμφωνα με το Λήμμα 5.1 θα δοκιμάσει μια ακολουθία βασικών εφικτών λύσεων του $Ax \le b$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2 καμία από αυτές δεν θα είναι εκφυλισμένη.

Αναφορές

[1] D. P. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization.* Athena Scientific, 1997.