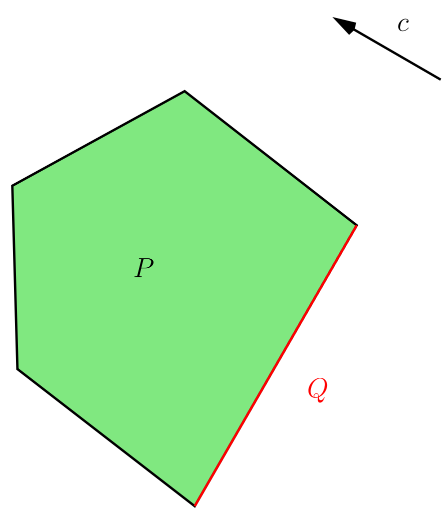
6.1 Σχέση Βελτιστοποίησης και Ακραίων Σημείων

Θεώρημα 6.1 *Ορίζουμε το γραμμικό πρόγραμμα* $\min\{c^T x \mid x \in P\}$, *όπου* P *πολύεδρο. Έστω το* P *έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο και έστω ότι υπάρχει βέλτιστη λύση. Τότε υπάρχει βέλτιστη λύση που είναι ακραίο σημείο του* P.

Απόδειξη. Έστω Q το σύνολο βέλτιστων λύσεων και $Q \neq \emptyset$. Θεωρούμε ότι $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$. Θέτουμε $v = \min_{x \in P} c^T x$. Ορίζουμε το σύνολο των βέλτιστων λύσεων $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b,\ c^T x = v\}$.



Σχήμα 6.1: Το σύνολο Q για το γραμμικό πρόγραμμα $\min\{c^T x \mid x \in P\}$.

Άρα το Q είναι πολύεδρο και ισχύει ότι $Q \subseteq P$. Άρα το Q δεν περιέχει ευθείες. Επομένως το Q έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο. Έστω x^* ένα ακραίο σημείο του Q. Ας υποθέσουμε ότι το x^* δεν είναι ακραίο σημείο του P.

Επομένως $\exists y, z \in P, y \neq x^*, z \neq x^*$, τέτοια ώστε $x^* = \lambda y + (1-\lambda) z$ με $\lambda \in (0,1)$.

$$v = c^T x^* = \lambda c^T y + (1-\lambda) c^T z. \tag{6.1}$$

Επίσης ξέρουμε ότι το v είναι το βέλτιστο κόστος, συνεπώς:

$$v \leq c^T y, \quad v \leq c^T z. \tag{6.2}$$

Από τις (6.1), (6.2) έχουμε: $v = c^T y = c^T z$ επομένως $y, z \in Q$ το οποίο είναι άτοπο γιατί το x^* είναι ακραίο σημείο του Q. Άρα το x^* είναι ακραίο σημείο του P. ∎

Θεώρημα 6.2 *Θεωρούμε το γραμμικό πρόγραμμα* $\min\{c^T x \mid x \in P\}$*, όπου το* P *πολύεδρο. Έστω ότι το* P *έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο. Τότε είτε το βέλτιστο κόστος είναι* $-\infty$*, είτε υπάρχει ακραίο σημείο του* P *το οποίο είναι βέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. Λέμε ότι το $x \in P$ έχει *βαθμό (rank)* k αν ακριβώς k γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί είναι ενεργοί στο x. Υποθέτουμε στο εξής ότι το βέλτιστο κόστος $\inf\{c^T x \mid x \in P\}$ του γραμμικού προγράμματος είναι πεπερασμένο.

Θεωρούμε ότι $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ και $x \in P$, τ. ώ. $\mathrm{rank}(x) = k < n$.

Ισχυρισμός 6.1 *Υπάρχει* $y \in P$*, τέτοιο ώστε* $\mathrm{rank}(y) > \mathrm{rank}(x)$ *και* $c^T y \leq c^T x$*.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Ορίζουμε $I = \{i \mid a_i^T x = b_i\}$.

Αφού $k < n$, $\mathrm{span}\{a_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{R}^n$, άρα $\exists\, d \neq 0$, τέτοιο ώστε $a_i^T d = 0\ \forall i \in I$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $c^T d \leq 0$ (αν όχι θεωρούμε $d := -d$).

Περίπτωση I: $c^T d < 0$.

Έστω ημιευθεία $y = x + \lambda d$, $\lambda > 0$. Όλα τα σημεία της ημιευθείας ικανοποιούν $a_i^T y = b_i\ \forall i \in I$. Αν όλη η ημιευθεία ανήκει στο P τότε $\lim_{\lambda \to \infty} c^T y = -\infty$. Άρα $\exists \lambda^* > 0$ και $j \notin I$, τέτοιο ώστε $a_j^T(x + \lambda^* d) = b_j$ και το σημείο $y^* = x + \lambda^* d$ ανήκει στο P. Θα έχουμε $c^T y^* < c^T x$. Παρατηρήστε ότι το a_j πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα a_i, $i \in I$.

Περίπτωση II: $c^T d = 0$.

Ομοίως, αλλά θεωρούμε τώρα την ευθεία $y = x + \lambda d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αφού το P δεν περιέχει ευθείες, για κατάλληλο $|\lambda^*|$, το $y = x + \lambda^* d$, θα «χτυπήσει» σε κάποιο καινούριο «τοίχωμα» δηλ. $a_j^T y = b_j, j \notin I$. Θα έχουμε ότι $c^T y^* = c^T x$. ∎

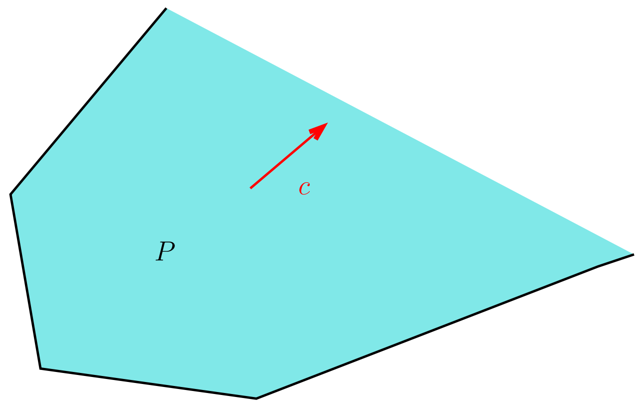
Επαναλαμβάνουμε όσες φορές χρειάζεται για να βρούμε σημείο w, τέτοιο ώστε $c^T w \leq c^T x$ και $\mathrm{rank}(w) = n$ οπότε το w είναι βασική εφικτή λύση.

Έστω $w^1, \ldots, w^r$ όλες οι βασικές εφικτές λύσεις στο P. Δείξαμε ότι $\forall x \in P$, $\exists w^i$, $i \in [r]$, τέτοιο ώστε $c^T w^i \leq c^T x$. Ορίζουμε $w^* = \arg\min_{x \in \{w^1, \ldots, w^r\}} c^T x$.

Ισχύει ότι $\forall x \in P$, $c^T w^* \leq c^T x$, άρα το το w^* είναι βέλτιστη λύση. ∎

Πόρισμα 6.1 *Έστω γραμμικό πρόγραμμα* $\min\{c^T x \mid x \in P\}$ *με το* P *να είναι μη κενό πολύεδρο. Τότε είτε το βέλτιστο κόστος είναι* $-\infty$*, είτε υπάρχει βέλτιστη λύση* $x^* \in P$*, τ. ώ.* $c^T x^* = \inf\{c^T x \mid x \in P\}$*.*

Το Πόρισμα 6.1 προκύπτει από το Θεώρημα 6.2, γιατί κάθε γραμμικό πρόγραμμα μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σε πρότυπη μορφή. Το αντίστοιχο πολύεδρο θα έχει πάντα ακραία σημεία. Η περίπτωση να απειρίζεται το βέλτιστο συμβαίνει όταν το πολύεδρο είναι μη φραγμένο κατά τη διεύθυνση κατά την οποία βελτιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση $c^T x$. Προκύπτει εύκολα ότι αυτή η διεύθυνση είναι η $-c$ για προβλήματα ελαχιστοποίησης και η c για προβλήματα μεγιστοποίησης. Στο Σχήμα 6.2 δίνεται ένα παράδειγμα μη φραγμένου πολυέδρου.



Σχήμα 6.2: Το πολύεδρο P είναι μη φραγμένο στη διεύθυνση c.

6.2 Απαλοιφή Fourier - Motzkin

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Η απαλοιφή Fourier - Motzkin είναι ένας αλγόριθμος για την εύρεση λύσης στο σύστημα

$$Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Αν και σαν αλγόριθμος δεν είναι αποδοτικός, έχει μεγάλη σημασία σαν θεωρητικό εργαλείο.

Το αρχικό σύστημα έχει n μεταβλητές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μεταθέτουμε τους περιορισμούς έτσι ώστε στις πρώτες m' γραμμές του πίνακα A το x_1 να έχει θετικούς συντελεστές, στις επόμενες $m''-m'$ γραμμές να έχει αρνητικούς συντελεστές και στις τελευταίες $m-m''$ οι συντελεστές να είναι 0. Άρα το σύστημα $Ax \leq b$ θα είναι ισοδύναμο με:

$$\begin{aligned} x_1 + (a_i')^T x' &\leq b_i' \quad & i \in \{1,\dots,m'\} \\ -x_1 + (a_i')^T x' &\leq b_i' \quad & i \in \{m'+1,\dots,m''\} \\ (a_i')^T x' &\leq b_i' \quad & i \in \{m''+1,\dots,m\}. \end{aligned}$$

όπου οι συμβολισμοί ορίζονται ως ακολούθως. Το διάνυσμα $x'^T = [x_2,\dots,x_n]$. Για $i \in \{1,\dots,m'\}$, $(a_i')^T = \frac{1}{a_{i1}}[a_{i2},\dots,a_{in}]$. Για $i \in \{m'+1,\dots,m''\}$, $(a_i')^T = -\frac{1}{a_{i1}}[a_{i2},\dots,a_{in}]$. Για $i \in \{m''+1,\dots,m\}$, $(a_i')^T = [a_{i2},\dots,a_{in}]$.

Οι παραπάνω ανισώσεις γράφονται ισοδύναμα ως εξής

$$\begin{aligned} & x_1 \leq -(a_i')^T x' + b_i' && i \in \{1,\dots,m'\} \\ & x_1 \geq (a_i')^T x' - b_i' && i \in \{m'+1,\dots,m''\} \\ & (a_i')^T x' \leq b_i' && i \in \{m''+1,\dots,m\}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα θα έχουμε

$$\begin{aligned} (a'_j)^T x' - b'_j \leq -(a'_i)^T x' + b'_i \quad & i \in \{1, \ldots, m'\},\ j \in \{m'+1, \ldots, m''\} \\ (a'_i)^T x' \leq b'_i \quad & i \in \{m''+1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (a'_j + a'_i)^T x' \leq b_i + b_j \quad & i \in \{1, \ldots, m'\},\ \ j \in \{m'+1, \ldots, m''\} \\ (a'_i)^T x' \leq b'_i \quad & i \in \{m''+1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε ένα καινούριο σύστημα της μορφής $A'x' \leq b'$, από το οποίο έχουμε απαλείψει τη μεταβλητή x_1. Οι ισοδυναμίες ισχύουν γιατί το $A'x' \leq b'$ έχει λύση $\bar{x}$ ανν έχει λύση και το αρχικό $Ax \leq b$. Δεδομένης της $\bar{x}$, για να βρούμε τιμή για τη μεταβλητή x_1 αρκεί να λύσουμε το παρακάτω, εγγυημένα εφικτό, σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 \leq -(a'_i)^T \bar{x} + b'_i \quad & i \in i \in \{1, \ldots, m'\} \\ x_1 \geq (a'_i)^T \bar{x} - b'_i \quad & i \in \{m'+1, \ldots, m''\}. \end{aligned}$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία και να απαλείψουμε όλες τις μεταβλητές εκτός από τη x_n. Λύνουμε το προκύπτον σύστημα μιας μεταβλητής, αν είναι εφικτό. Ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία, βρίσκουμε τιμές για τις $x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Παρατήρηση 6.1 *Σε κάθε στάδιο της απαλοιφής Fourier - Motzkin οποιαδήποτε από τις καινούριες ανισώσεις είναι κωνικός συνδυασμός των αρχικών $Ax \leq b$.*