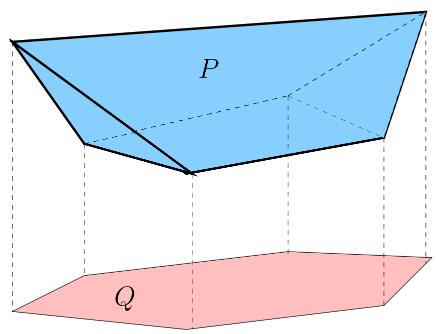
Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού
Διάλεξη 7: 04.11.2014   Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
Γραφείς: Ζυγομήτρος Ευάγγελος, Μπάκας Δημήτριος, Σ. Κ.

7.1 Εφαρμογές της απαλοιφής Fourier - Motzkin

Δεδομένου ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}^n$ και ενός γραμμικού υπόχωρου L του $\mathbb{R}^n$, η *ορθογώνια προβολή* του S επί του L είναι το σύνολο των σημείων $u \in L$ για τα οποία υπάρχει $v \perp L$, $v \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $u + v \in S$. Μας ενδιαφέρουν ορθογώνιες προβολές επί του $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0,\ i \in [n] \setminus M\}$ όπου $M \subseteq [n]$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{proj}_x(S)$ το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^M \mid \exists z \in \mathbb{R}^{[n]\setminus M} \text{ τ. ώ. } \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in S\}.$$



Σχήμα 7.1: Το Q είναι η προβολή του $P \subseteq \mathbb{R}^3$ στο επίπεδο, δηλ. στον υπόχωρο $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

Έστω το πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$. Αν με έναν γύρο του αλγορίθμου Fourier - Motzkin απαλείψουμε τη μεταβλητή x_1, θα έχουμε υπολογίσει μια αναπαράσταση του συνόλου $\mathrm{proj}_{x'}(P)$ όπου $x'^T = (x_2, \ldots, x_n)$. Γενικά, η απαλοιφή Fourier - Motzkin μπορεί να υπολογίσει την προβολή του αρχικού πολυέδρου σε οποιοδήποτε υποσύνολο των μεταβλητών. Έχουμε αποδείξει λοιπόν κατασκευαστικά το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 7.1 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ όπου $P = \{\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid Ax + Bz \le b\}$. Το σύνολο $\mathrm{proj}_x(P)$ είναι επίσης πολύεδρο.*

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ένας αφινικός μετασχηματικός ενός πολυέδρου είναι επίσης πολύεδρο.

Θεώρημα 7.2 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$, πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^m$. Το σύνολο $Q = \{Ax + b \mid x \in P\}$ είναι επίσης πολύεδρο.*

Απόδειξη. Γράφουμε $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^n \colon Ax + b = y,\ x \in P\}$. Τότε $Q = \mathrm{proj}_y\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid Ax + b = y,\ x \in P\}$. Από το Θεώρημα 7.1, το Q είναι πολύεδρο. ∎

Ας δούμε μια άλλη απλή εφαρμογή της απαλοιφής Fourier-Motzkin. Θεωρούμε το γραμμικό πρόγραμμα $\min\{c^T x \mid Ax \le b\}$ και το σύνολο T των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης στις εφικτές λύσεις:

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \colon c^T x = t, Ax \le b\}.$$

Από Fourier-Motzkin το σύνολο T είναι πολύεδρο που ορίζεται από ένα πεπερασμένο σύστημα (μη αυστηρών!) γραμμικών ανισότητων με μόνη μεταβλητή την t. Ανάλογα με τη μορφή αυτού του συστήματος συμπεραίνουμε άμεσα ότι υπάρχουν οι εξής δυνατότητες για το T:

1. $T = \varnothing$. Δηλ. το γραμμικό πρόγραμμα είναι ανέφικτο.
2. Το T είναι μη κενό και μη φραγμένο από κάτω, δηλ. είναι της μορφής $\{t \in \mathbb{R} \mid -\infty \le t \le b\}$ με $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Άρα το γραμμικό πρόγραμμα είναι εφικτό και μη φραγμένο.
3. Το T είναι μη κενό και φραγμένο από τα κάτω, δηλ. είναι της μορφής $\{t \in \mathbb{R} \mid a \le t \le b\}$ με $a \in \mathbb{R}$ και $a \le b \le +\infty$. Άρα το γραμμικό πρόγραμμα είναι εφικτό και φραγμένο και υπάρχει εφικτή λύση x τ. ώ. $c^T x = \inf\{c^T x \mid Ax \le b\} = a$.

Τα παραπάνω τα γνωρίζαμε ήδη από το Πόρισμα 6.1, αλλά η απόδειξη μέσω Fourier-Motzkin είναι εξαιρετικά απλή.

*7.2 Επεκταμένες Διατυπώσεις

Το Θεώρημα 7.1 μας έδωσε ότι ένα σύνολο $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ της μορφής

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^k \colon Ax + Bz \le b\}$$

είναι πολύεδρο.

Συμβαίνει για κάποια πολύεδρα η περιγραφή τους σε έναν χώρο με επιπλέον, βοηθητικές, μεταβλητές να είναι απλούστερη από την αρχική, δηλ. μικρότερου μεγέθους. Σε αυτή την περίπτωση η πορεία μας είναι αντίστροφη. Εκκινούμε από ένα σύνολο X και ψάχνουμε να βρούμε αναπαράσταση του σε χώρο μεγαλύτερης διάστασης.

Ορισμός 7.1 *Αν*

$$P = \{\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid Ax + Bz \le b\}$$

και $\mathrm{proj}_x(P) = X$, *λέμε ότι το σύστημα* $Ax + Bz \le b$ *που ορίζει το* P *είναι μια* επεκταμένη διατύπωση (extended formulation) *για το σύνολο* X.

Ας πάρουμε ως παράδειγμα το σύνολο $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$. A priori δεν είναι προφανές ότι το X είναι πολύεδρο. Με λίγη σκέψη βλέπουμε όμως ότι

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \leq 1,\ \forall(\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n)\}, \tag{7.1}$$

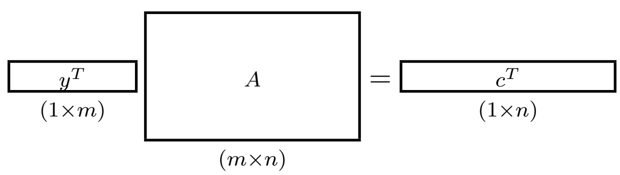
άρα το X είναι πολύεδρο. Η αναπαράσταση (7.1) περιέχει 2^n ανισότητες και μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε μία από αυτές είναι απαραίτητη. Χρησιμοποιώντας επιπλέον μεταβλητές βρίσκουμε ότι

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^n\colon -z_i \leq x_i \leq z_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} z_i \leq 1\}. \tag{7.2}$$

Άρα υπάρχει επεκταμένη διατύπωση για το X με $2n$ μεταβλητές και μόλις $2n+1$ ανισότητες.

7.3 Λήμματα Farkas

Έστω $y \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων $y^T A = c^T$ με $c \in \mathbb{R}^n$.



Ισχύει ότι $y^T A = [y^T A_1,\ y^T A_2,\ \ldots,\ y^T A_n]$ όπου A_j, $j \in [n]$, η j-οστή στήλη του πίνακα A. Επομένως:

$$\begin{aligned} y^T Ax = {} & (y_1 A_{11} + y_2 A_{21} + \ldots + y_m A_{n1})x_1 + (y_1 A_{12} + y_2 A_{22} + \ldots + y_m A_{n2})x_2 + \ldots \\ & + (y_1 A_{1n} + y_2 A_{2n} + \ldots + y_m A_{nn})x_n. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, το $y^T A$ ορίζει γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του A, δηλ. $y^T A = \sum_{i=1}^m y_1 a_i^T$, όπου a_i^T, $i \in [m]$, η i-οστή γραμμή του πίνακα A. Άρα, για $y \geq 0$, η ανισότητα $y^T Ax \leq y^T b$ είναι κωνικός συνδυασμός των m ανισοτήτων $Ax \leq b$.

Θεώρημα 7.3 (Λήμμα Farkas για ανισότητες) *Το σύστημα* $Ax \leq b$ *έχει λύση ανν* $\nexists$ *διάνυσμα* $y \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε* $y \geq 0$, $y^T A = 0^T$, $y^T b < 0$.

Απόδειξη. Ευθύ $\Longrightarrow$: Υποθέτουμε πως $\exists\ \tilde{x}$, $A\tilde{x} \leq b$. Έστω οτι $\exists\ \tilde{y} \geqslant 0$ τέτοιο ώστε $\tilde{y}^T A = 0^T$ και $\tilde{y}^T b < 0$. Τότε, έχουμε $0 > \tilde{y}^T b \geqslant \tilde{y}^T(A\tilde{x}) = (\tilde{y}^T A)\tilde{x} = 0$. Άτοπο.

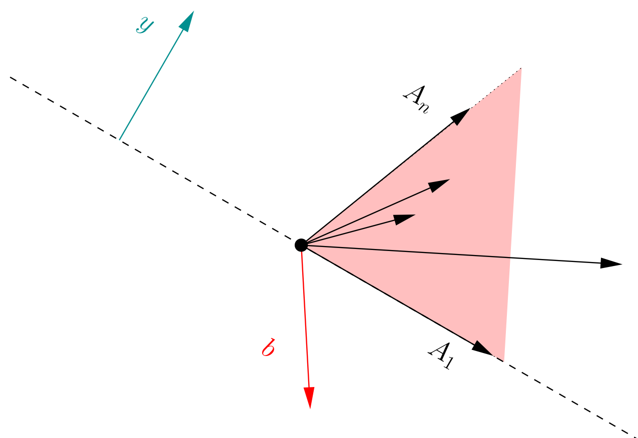
Αντίστροφο $\Longleftarrow$: Έστω οτι το σύστημα $Ax \leq b$ δεν έχει λύση. Εφαρμόζοντας απαλοιφή Fourier-Motzkin, απαλείφουμε όλες τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ και καταλήγουμε σε ένα ισοδύναμο ανέφικτο σύστημα $A'x \leq b'$. Αφού δεν υπάρχουν μεταβλητές το $A'x \leq b'$ πρέπει να είναι της μορφής $0 \leq b'$. Επειδή είναι ανέφικτο, υπάρχει i τέτοιο ώστε $b'_i < 0$. Από την Παρατήρηση 6.1 κάθε ανισότητα του συστήματος $0 \leq b'$ είναι κωνικός συνδυασμός των ανισοτήτων του αρχικού συστήματος $Ax \leq b$. Επομένως υπάρχει $y \geq 0$, τ. ώ. η ανισότητα $0 \leq b'_i$ να ταυτίζεται με την $y^T Ax \leq y^T b$. Άρα $y^T A = 0$ και $y^T b = b'_i < 0$. ∎

Πόρισμα 7.1 (Λήμμα Farkas για ισότητες, 1894) *΄Εστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση $x \geq 0$ ανν $\nexists$ διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0^T, \;\; y^T b < 0$.*

Ακολουθεί μια γεωμετρική ερμηνεία του Πορίσματος. Παρατηρούμε ότι

$$Ax = b, \; x \geq 0 \text{ έχει λύση } \Leftrightarrow b \in \text{cone}(A_1, \ldots, A_n).$$

Επομένως το σύστημα είναι ανέφικτο αν και μόνο αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο (με normal y) που διαχωρίζει το b από τον κώνο.



Σχήμα 7.2: Το υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = y^T A_1\}$ διαχωρίζει τον κώνο που παράγουν οι στήλες του A απο το b.

Στο Σχήμα 7.2 παρατηρούμε οτι

$$y^T A \geq 0 \Leftrightarrow [y^T A_1, \ldots, y^T A_n] \geq 0^T, \text{ ενώ } y^T b < 0.$$

Θα αποδείξουμε το Πόρισμα 7.1 στην επόμενη διάλεξη.