Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 8: 05.11.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ζυγομήτρος Ευάγγελος & Μπάκας Δημήτριος & Σ. Κ.

8.1 Λήμμα του Farkas για ισότητες

Θεώρημα 8.1 (Λήμμα Farkas για ισότητες) *Το σύστημα* $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *έχει λύση* $x \geq 0$ *ανν* $\nexists$ *διάνυσμα* $y \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε* $y^T A \geq 0^T,\ \ y^T b < 0$.

Απόδειξη. Το $Ax = b,\ x \geq 0$ έχει λύση ανν το $A'x \leq b'$ έχει λύση $x \in \mathbb{R}^m$

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ο A' έχει $2m+n$ γραμμές.

Απο Λήμμα Farkas για ανισότητες, το $A'x \leq b'$ έχει λύση ανν $\nexists\ y' \in \mathbb{R}^{2m+n}$, τέτοιο ώστε

$$y' \geq 0,\ (y')^T A' = 0^T,\ (y')^T b' < 0. \tag{8.1}$$

Πιο αναλυτικά,

$$y' \geq 0,\ (y')^T A' = 0^T,\ (y')^T b' < 0 \iff y' \geq 0,\ (y')^T \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} = 0^T,\ (y')^T \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} < 0$$

όπου

$$(y')^T = [\underbrace{y_A}_{m},\ \underbrace{y_{-A}}_{m},\ \underbrace{y_I}_{n}]$$

Άρα έχουμε

$$(y')^T A' = 0^T \iff y_A^T A - y_{-A}^T A = y_I^T \geq 0^T,\ \text{αφού } y' \geq 0$$
$$y_A^T b - y_{-A}^T b < 0.$$

Επομένως, αν θέσουμε $y = y_A - y_{-A}$ ισχύει ότι

$$y^T A \geq 0^T,\ \ y^T b < 0. \tag{8.2}$$

Παρατηρήστε ότι δεδομένου διανύσματος y που ικανοποιεί την (8.2) μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε y' που ικανοποιεί τη συνθήκη (8.1). Αρκεί να ορίσουμε αυθαίρετα $y'_A, y'_{-A} \geq 0$, τ. ώ. $y = y'_A - y'_{-A}$. Άρα το $A'x \leq b'$ έχει λύση ανν $\nexists\ y$ που ικανοποιεί την (8.2). ■

Ορισμός 8.1 Έγκυρη ανισότητα *για το* P *είναι μια ανισότητα που ικανοποιείται από όλα τα σημεία του* P.

Πόρισμα 8.1 *Έστω πολύεδρο* $P = \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$. *Τότε κάθε* $x \in P$ *ικανοποιεί* $c^T x \leq \delta$ *ανν* $\exists\, y \geq 0$ *τ.ω.* $y^T A = c^T$ *και* $y^T b \leq \delta$.

Απόδειξη. Αν $\exists$ τέτοιο y, τότε $\forall x$, $Ax \leq b \Rightarrow y^T(Ax) \leq y^T b \Rightarrow c^T x \leq y^T b \Rightarrow c^T x \leq \delta$.

Αντιστρόφως, έστω $c^T x \leq \delta$ έγκυρη ανισότητα. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει y με τις ζητούμενες ιδιότητες, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{aligned} &y^T A = c^T \\ &y^T b + \lambda = \delta \\ &y \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση. Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} y^T \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & \delta \end{bmatrix},\ y \geq 0,\ \lambda \geq 0$$

δεν έχει λύση.

Προφανώς μπορούμε να γράψουμε το $\begin{bmatrix} y^T \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & \delta \end{bmatrix}$ ως $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \delta \end{bmatrix}$.

Από το Θεώρημα 8.1, υπάρχει διάνυσμα $\begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix}$ όπου

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} z^T & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \geq \begin{bmatrix} 0^T & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z^T & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \delta \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c^T & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}\right\}$$

Πρέπει $\mu \geq 0$.

<u>Περίπτωση 1</u> $\mu = 0$

Τότε $Az \geq 0$ και $c^T z < 0$. Γνωρίζουμε ότι $\exists\, x_0$ τ.ω. $Ax_0 \leq b$. Για αρκετά μεγάλο $\tau \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 \leq b \\ -\tau A z \leq 0 \end{aligned}\right\} \implies A(x_0 - \tau z) \leq b \qquad \text{και} \qquad \left.\begin{aligned} c^T x_0 \leq \delta \\ -\tau c^T z > 0 \end{aligned}\right\} \implies c^T(x_0 - \tau z) > \delta.$$

Δεν ισχύει η αρχική υπόθεση ότι η $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα, καταλήξαμε σε άτοπο.

<u>Περίπτωση 2</u> $\mu > 0$

$$\left.\begin{aligned} Az + b\mu \geq 0 \\ c^T z + \delta\mu < 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} -Az - b\mu \leq 0 \\ -c^T z - \delta\mu > 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} -\mu^{-1}Az - b \leq 0 \\ -\mu^{-1}c^T z - \delta > 0 \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} A(-\mu^{-1}z) \leq b \\ c^T(-\mu^{-1}z) > \delta. \end{aligned}$$

Άτοπο, παραβιάζεται πάλι η έγκυρη ανισότητα.

∎

8.2 Δυϊκότητα

Θεωρούμε το ακόλουθο ζεύγος γραμμικών προγραμμάτων:

$$\begin{array}{rr} \max c^T x & \min b^T y \\ Ax \le b & y^T A = c^T \\ & y \ge 0 \\ & \\ \text{ΠΡΩΤΕΥΟΝ} & \text{ΔΥΪΚΟ} \end{array} \tag{8.3}$$

Θεώρημα 8.2 (Ασθενής Δυϊκότητα) *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Αν $\tilde{x}$ εφικτό για $Ax \le b$ και $\tilde{y}$ εφικτό για $y \ge 0$, $y^T A = c^T$, τότε $c^T \tilde{x} \le b^T \tilde{y}$.*

Απόδειξη. $c^T \tilde{x} = (\tilde{y}^T A)\tilde{x} = \tilde{y}^T (A\tilde{x}) \le \tilde{y}^T b$. ∎

Πόρισμα 8.2 *Δίνεται το ζεύγος πρωτεύοντος–δυϊκού* (8.3).

(i) Αν το πρωτεύον είναι μη φραγμένο, το δυϊκό είναι ανέφικτο.

(ii) Αν το δυϊκό είναι μη φραγμένο, το πρωτεύον είναι ανέφικτο.

Απόδειξη.

(i) Έστω $\tilde{y}$ μία λύση του δυϊκού. Τότε η ποσότητα $\tilde{y}^T b$ δεν φράσσεται από κάτω από κανένα πραγματικό αριθμό. Άτοπο.

(ii) Ομοίως.

∎

Παρατηρήστε ότι το Πόρισμα 8.2 δεν αποκλείει την περίπτωση το πρωτεύον να ειναι εφικτό και φραγμένο και το δυϊκό ανέφικτο. Στο Θεώρημα 8.4 παρακάτω θα χαρακτηρίσουμε επακριβώς τους συνδυασμούς που μπορούν να προκύψουν.

Θεώρημα 8.3 (Ισχυρή Δυϊκότητα, Von Neumann 1947) *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Τότε*

$$\max\{c^T x \mid Ax \le b\} = \min\{y^T b \mid y^T A = c^T,\ y \ge 0\}$$

υπό τη συνθήκη ότι και τα δύο σύνολα είναι μη κενά.

Απόδειξη. Επειδή και το πρωτεύον και το δυϊκό είναι εφικτά από το Πόρισμα 8.2 έχουμε ότι

$$\sup\{c^T x \mid Ax \leq b\} \leq \inf\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T A = c^T\} \tag{8.4}$$

και υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\delta = \sup\{c^T x \mid Ax \leq b\}.$$

Από την (8.4), έχουμε $\delta \leq \inf\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T A = c^T\}$. Από τον ορισμό του δ, $Ax \leq b \implies c^T x \leq \delta$. Από το Πόρισμα 8.1 έχουμε ότι $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για $\{x \mid Ax \leq b\}$ ανν $\exists\ y \geq 0$ τέτοιο ώστε $y^T A = c^T$ και $y^T b \leq \delta$. Από την (8.4) παίρνουμε ότι

$$\min\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T A = c^T\} = \delta$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $\exists\ x:\ Ax \leq b,\ c^T x \geq \delta$, δηλαδή $\exists\ x:\ Ax \leq b,\ -c^T x \leq -\delta$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο x. Από το Λήμμα του Farkas για ανισότητες (Θεώρημα 7.4), $\exists\ z \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$, τ.ω.

$$z^T A - \lambda c^T = 0^T, \quad z^T b - \lambda\delta < 0$$

Από υπόθεση, $\exists\ x_0$ τέτοιο ώστε $Ax_0 \leq b$, άρα $\lambda > 0$ (αν $\lambda = 0$ από Λήμμα Farkas για ανισότητες, $Ax \leq b$ ανέφικτο). Έστω $y := \frac{z}{\lambda}$, τότε $y \geq 0$. Άρα, $y^T A = c^T$ και $y^T b < \delta$. Άτοπο, γιατί γνωρίζουμε από την 8.4 ότι $\inf\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T = c^T\} \geq \delta$.

Άρα, $\delta = \max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$. ∎

Είμαστε πλέον σε θέση να χαρακτηρίσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για τις λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού.

Θεώρημα 8.4 *Δεδομένου του ζεύγους πρωτεύοντος–δυϊκού (8.3) ακριβώς μία από τις ακόλουθες τέσσερεις καταστάσεις μπορεί να συμβεί:*

1. *Το πρωτεύον και το δυϊκό είναι και τα δύο ανέφικτα.*
2. *Το πρωτεύον είναι ανέφικτο και το δυϊκό μη φραγμένο.*
3. *Το δυϊκό είναι ανέφικτο και το πρωτεύον μη φραγμένο.*
4. *Τόσο το πρωτεύον όσο και το δυϊκό έχουν εφικτές λύσεις και οι βέλτιστες τιμές τους είναι ίσες.*

Απόδειξη. Υπάρχουν τέσσερεις δυνατές περιπτώσεις ανάλογα με το ποια από τα γραμμικά προγράμματα του ζεύγους είναι εφικτά. Θα δείξουμε ότι και οι τέσσερεις καταλήγουν σε μία από τις καταστάσεις του θεωρήματος.

Περίπτωση 1: Το πρωτεύον και το δυϊκό είναι και τα δύο ανέφικτα. Δίνουμε ένα παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης.

$$\begin{array}{rr} \min x_1 & \max y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 & y_1 - y_2 = 1 \\ -x_1 - x_2 \geq 1 & y_1 - y_2 = 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \\ \text{ΠΡΩΤΕΥΟΝ} & \text{ΔΥΪΚΟ} \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι αν επιβάλλουμε επιπλέον $x_1, x_2 \geq 0$ το πρωτεύον παραμένει ανέφικτο αλλά το δυϊκό γίνεται μη φραγμένο. Παίρνουμε τότε ένα παράδειγμα της Κατάστασης 2. Εύκολα πάντως μπορεί να κατασκευαστεί ζεύγος πρωτεύοντος–δυϊκού με περιορισμό μη αρνητικότητας σε όλες τις μεταβλητές και να είναι και τα δύο ανέφικτα.

<u>Περίπτωση 2:</u> Το πρωτεύον είναι ανέφικτο και το δυϊκό εφικτό. Έστω $\bar{y}$ μια εφικτή λύση για το δυϊκό. Από το Λήμμα του Farkas για ανισότητες (Θεώρημα 7.4), υπάρχει $\hat{y}$ τ. ώ. $\hat{y}^T A = 0$, $\hat{y}^T b < 0$, και $\hat{y} \geq 0$. Έστω η οικογένεια των λύσεων $y = \bar{y} + \lambda\hat{y}$, $\lambda \geq 0$. Για κάθε λ το y είναι εφικτή λύση για το δυϊκό αφού

$$y^T A = (\bar{y} + \lambda\hat{y})^T A = c^T + \lambda \cdot 0 = c^T$$

και

$$y = \bar{y} + \lambda\hat{y} \geq 0.$$

Η αντικειμενική τιμή του y είναι $b^T y = b^T(\bar{y} + \lambda\hat{y}) = b^T\bar{y} + \lambda b^T\hat{y}$. Αφού $\hat{y}^T b < 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} b^T y = -\infty$. Άρα αν το πρωτεύον είναι ανέφικτο, τότε το δυϊκό είναι μη φραγμένο.

<u>Περίπτωση 3:</u> Το πρωτεύον είναι εφικτό και το δυϊκό ανέφικτο. Επειδή η έννοια του πρωτεύοντος και του δυϊκού είναι συμμετρικές (το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον) η Περίπτωση 3 είναι όμοια με τη 2. Δίνουμε πάντως μια απόδειξη.

Έστω $\bar{x}$ μια εφικτή λύση για το πρωτεύον. Αφού το δυϊκό είναι ανέφικτο, από το Λήμμα του Farkas για ισότητες (Θεώρημα 8.1) υπάρχει $\hat{x}$ τ. ώ. $A\hat{x} \geq 0$, $c^T\hat{x} < 0$. Θεωρήστε τη λύση $x = \bar{x} - \lambda\hat{x}$, $\lambda \geq 0$. Για κάθε λ το x είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον αφού

$$Ax = A(\bar{x} - \lambda\hat{x}) \leq b - \lambda A\hat{x} \leq b.$$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο x ισούται με $c^T x = c^T(\bar{x} - \lambda\hat{x}) = c^T\bar{x} - \lambda c^T\hat{x}$. Αφού $c^T\hat{x} < 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} c^T x = +\infty$. Άρα αν το δυϊκό είναι ανέφικτο, το πρωτεύον είναι μη φραγμένο.

<u>Περίπτωση 4:</u> Το πρωτεύον και το δυϊκό είναι και τα δύο εφικτά. Από το Θεώρημα 8.3 οι βέλτιστες τιμές τους είναι ίσες. ∎