Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 10: 12.11.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ευάγγελος Αναγνωστόπουλος, Πέτρος Μπαρμπαγιάννης & Σ. Κ.

10.1 Θεώρημα Minkowski-Weyl για πολύεδρα

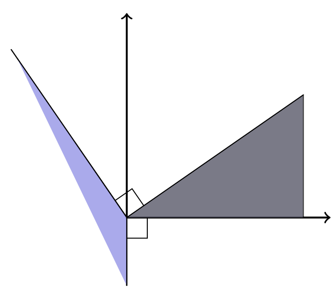
Ορισμός 10.1 *Αν το ζεύγος πινάκων (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος για έναν κώνο P, τότε και το ζεύγος πινάκων (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος για έναν κώνο P^*. Σε αυτή τη περίπτωση, ο κώνος P^* καλείται ο* δυϊκός (ή πολικός) *κώνος του P.*

Από τον Ορισμό 8.3 του ζεύγους διπλής περιγραφής προκύπτει ότι:

$$P^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid R^T y \leq 0\} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y = A^T \mu, \mu \geq 0\}$$

Άσκηση 10.1 *Δείξτε ότι $P^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in P, y^T x \leq 0\}$.*

Σχηματικά, ένα παράδειγμα ενός κώνου C με τον δυϊκό του C^* είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 10.1: Ένας κώνος C με τον δυϊκό του C^*.

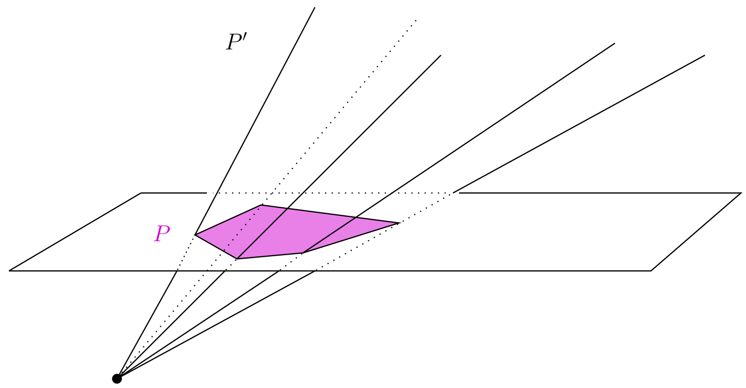
Προκύπτει εύκολα ότι $P = \mathbb{R}^d \Rightarrow P^* = \varnothing$.

Ορισμός 10.2 (Άθροισμα Minkowski) *Έστω δύο σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Το* άθροισμα Minkowski *των A και B ορίζεται ως το σύνολο $A + B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, b \in B, \;\; x = a + b\}$.*

Αν ένα από τα σύνολα A, B είναι το κενό σύνολο, τότε $A + B = \varnothing$.

Ορισμός 10.3 (Πολύτοπα) *Ένα σύνολο σημείων στο $\mathbb{R}^n$ καλείται* πολύτοπο *αν είναι το κυρτό κάλυμμα πεπερασμένων το πλήθος διανυσμάτων.*

Θεώρημα 10.1 (Θεώρημα Minkowski-Weyl για πολύεδρα) *Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολύεδρο ανν $P = Q + C$ για κάποιο πολύτοπο $Q \subset \mathbb{R}^n$ και κάποιον πεπερασμένα παραγόμενο κώνο $C \subseteq \mathbb{R}^n$.*



Σχήμα 10.2: Κώνος P' που προκύπτει από την ομογενοποίηση του πολυέδρου P.

Απόδειξη.
($\Rightarrow$): Έστω ένα πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Ορίζουμε τον πολυεδρικό κώνο P' που προκύπτει από την *ομογενοποίηση* του συστήματος $Ax \leq b$. Συγκεκριμένα

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : Ax - \lambda b \leq 0 \right\}.$$

Βλ. Σχήμα 10.2. Από το θεώρημα Minkowksi-Weyl για κώνους (Θεώρημα 9.4), ο P' παράγεται από πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων $\binom{x_1}{\lambda_1}, \binom{x_2}{\lambda_2}, \dots, \binom{x_m}{\lambda_m}$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι τα διανύσματα $\binom{x_i}{\lambda_i}$ έχουν $\lambda_i = 0$ ή $\lambda_i = 1$. Ορίζουμε:

$$Q = \text{conv}(\{x_i \mid i = 1, \dots, m \ \& \ \lambda_i = 1\})$$
$$C = \text{cone}(\{x_i \mid i = 1, \dots, m \ \& \ \lambda_i = 0\})$$

Θα δείξουμε ότι το αρχικό πολύεδρο P μπορεί να γραφεί ως $P = Q + C$.

$$x \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in P' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cone}(\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ \lambda_m \end{pmatrix} \right\}) \Leftrightarrow$$
$$\exists \rho_1, \dots, \rho_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ τ.ω. } \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

Υποχρεωτικά, $\sum\limits_{i|\lambda_i=1} \rho_i = 1$, επειδή $\lambda_i = 1$ ή $\lambda_i = 0$. Δηλαδή:

$$\sum_{1}^{m} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \sum_{i|\lambda_i=1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} + \sum_{i|\lambda_i\neq1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \overset{10.1}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{i|\lambda_i=1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}}_{\text{κυρτός συνδυασμός από το } Q} + \underbrace{\sum_{i|\lambda_i\neq1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}}_{\text{κωνικός συνδυασμός από το } C}$$

Οπότε $P = Q + C$.
($\Leftarrow$): Αντιστρόφως, έστω το σύνολο $P = Q + C$, όπου Q πολύτοπο και C πεπερασμένα παραγόμενος κώνος. Υπάρχουν $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t \in \mathbb{R}^n$ τ. ώ.

$$Q = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_m\})$$
$$C = \text{cone}(\{y_1, \dots, y_t\}).$$

Παίρνουμε ότι

$$x_0 \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}(\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}) := D \tag{10.2}$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα Minkowski-Weyl για κώνους (Θεώρημα 9.4), ο πεπερασμένα παραγόμενος κώνος D είναι και πολυεδρικός. Δηλαδή της μορφής

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mid Ax + \lambda b \leq 0 \right\} \text{ για κάποιον πίνακα } A, \text{ και διάνυσμα } b.$$

Επομένως

$$x_0 \in P \overset{10.2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow Ax_0 + b \leq 0 \Leftrightarrow Ax_0 \leq -b$$

Άρα το σύνολο P είναι πολύεδρο. ∎

Πόρισμα 10.1 (Θεώρημα πεπερασμένης βάσης για πολύτοπα) *Ένα σύνολο P είναι πολύτοπο ανν το P είναι ένα φραγμένο πολύεδρο, δηλαδή γράφεται ως $P = Q + C$, όπου $C = \{\vec{0}\}$.*

Η απόδειξη του επόμενου πορίσματος αφήνεται ως άσκηση.

Πόρισμα 10.2 *Αν P_1 και P_2 είναι πολύεδρα, το άθροισμα Minkowski $P_1 + P_2$ είναι επίσης πολύεδρο.*

Η αναπαράσταση ενός πολυέδρου P ως αθροίσματος πολυτόπου και κώνου ονομάζεται *V-περιγραφή ή εσωτερική περιγραφή*. Η αναπαράσταση του P ως τομή ημιχώρων, δηλ. ως $\{x \mid Ax \leq b\}$ ονομάζεται *H-περιγραφή ή εξωτερική περιγραφή*.

10.2 Χαρακτηριστικός κώνος, lineality space

Ορισμός 10.4 *Ο* χαρακτηριστικός κώνος (characteristic or recession cone) *ενός πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, P \neq \varnothing$, είναι ο κώνος*

$$\operatorname{rec}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x + y \in P, \ \forall x \in P\}$$

Άσκηση 10.2 *Αν $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, P \neq \varnothing$, να δειχθεί ότι $\operatorname{rec}(P) = \{y \mid Ay \leq 0\}$.*

Στην Πρόταση 10.1 κωδικοποιούμε βασικές ιδιότητες του χαρακτηριστικού κώνου.

Πρόταση 10.1 *Για ένα μη κενό πολύεδρο P ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $y \in \operatorname{rec}(P) \Leftrightarrow \exists x \in P$ *τ.ω.* $x + \lambda y \in P, \ \forall \lambda \geq 0$.

(ii) $P + \operatorname{rec}(P) = P$.

(iii) P *φραγμένο* $\Leftrightarrow \operatorname{rec}(P) = \{0\}$.

(iv) Αν $P = Q + C$*, όπου* Q *πολύτοπο και* C *πολυεδρικός κώνος, τότε* $C = \mathrm{rec}(P)$.

Απόδειξη. Η (i) προφανής λόγω της Άσκησης 10.2. Η (ii) προφανής λόγω της Άσκησης 10.2 και του γεγονότος ότι $0 \in \mathrm{rec}(P)$. Η (iii) ομοίως προφανής συνέπεια του Ορισμού 10.4.

Αποδεικνύουμε την (iv). Έστω $x \in Q, y \in C$. Για κάθε $\lambda \geq 0$, $x + \lambda y \in P$. Άρα από την (i) παίρνουμε ότι $y \in \mathrm{rec}(P)$.

Αντιστρόφως, έστω $y \in \mathrm{rec}(P)$. Χβτγ, $y \neq 0$, δηλ. το P δεν είναι φραγμένο. Θα δείξουμε ότι $y \in C$. Από τον ορισμό του y, για $x \in P$, ισχύει ότι $x + \alpha y \in P$, για κάθε $\alpha \geq 0$. Έστω $S = \{x_1, \ldots, x_q\}$ $T = \{y_1, \ldots, y_r\}$ τ. ώ. $Q = \mathrm{conv}(S)$ και $C = \mathrm{cone}(T)$. Ορίζουμε X και Y τους πίνακες με στήλες τα στοιχεία των S και T αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι $y \notin C$, δηλ. δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^r$, $\lambda \geq 0$, τ. ώ. $Y\lambda = y$. Από το Λήμμα του Farkas (Πόρισμα 7.1), υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$, τ. ώ. $u^T Y \geq 0^T$ και $u^T y < 0$. Επειδή $x + \alpha y \in P$, για κάθε $\alpha \geq 0$, υπάρχουν $\mu_\alpha \in \mathbb{R}^q$, $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}^r$, $\mu_\alpha \geq 0$, $\lambda_\alpha \geq 0$ τ. ώ. $x + \alpha y = X\mu_\alpha + Y\lambda_\alpha$ και $e^T \mu_\alpha = 1$, όπου $e \in \mathbb{R}^q$ είναι ένα διάνυσμα με q άσους. Έχουμε ότι

$$u^T(x + \alpha y) = u^T(X\mu_\alpha + Y\lambda_\alpha) \geq u^T X \mu_\alpha$$

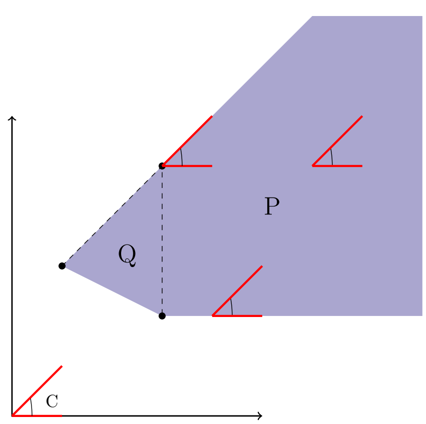
Για δεδομένα x, y καθώς $\alpha \to +\infty$ παίρνουμε $u^T(x + \alpha y) \to -\infty$. Όμως $u^T X\mu = \sum_{i=1}^q \mu_i u^T x_i$. Άρα στο γραμμικό πρόγραμμα

$$\min\{u^T X\mu \mid e^T\mu = 1,\ \mu \geq 0\}$$

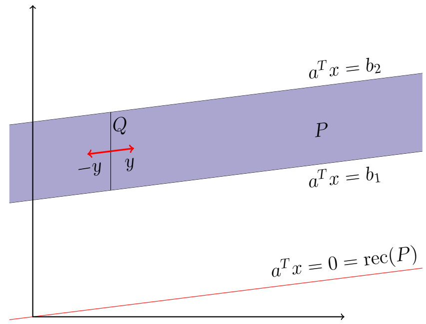
ελαχιστοποιούμε πάνω σε όλους τους κυρτούς συνδυασμούς του συνόλου των q αριθμών $\{u^T x_i \mid i \in [q]\}$. Επομένως υπάρχει $j^* \in [q]$ τ. ώ. $\min\{u^T X\mu \mid e^T\mu = 1,\ \mu \geq 0\} = u^T x_{j^*}$. Άρα η ποσότητα $u^T x_{j^*}$ είναι ένα πεπερασμένο κάτω φράγμα στο $u^T X\mu_\alpha$, άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι $y \in C$. ∎

Μια εναλλακτική απόδειξη της Ιδιότητας (iv) δίνεται στην Ενότητα 10.3.

Ορισμός 10.5 *Κάθε διάνυσμα* $x \in \mathrm{rec}(P) \setminus \{\vec{0}\}$ *καλείται* άπειρη διεύθυνση *του* P *ή* ακτίνα (ray).



Σχήμα 10.3: Η αποσύνθεση ενός πολυέδρου P σε συνιστώσες Q και C. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές για το πολύτοπο Q, αλλά ο κώνος C είναι μονοσήμαντα ορισμένος και συμπίπτει με το $\mathrm{rec}(P)$. Βλέπουμε επίσης και την ιδιότητα (i) του χαρακτηριστικού κώνου ότι, αν είμαστε μέσα στο P και προχωράμε σύμφωνα με τις διευθύνσεις του κώνου C, θα παραμένουμε πάντα μέσα στο πολύεδρο. Προφανώς εδώ $\mathrm{lin}(P) = \{\vec{0}\}$.



Σχήμα 10.4: Θεωρούμε το πολύεδρο $P = \{x \mid b_1 \le a^T x \le b_2\}$. Παρατηρούμε ότι $y \in \text{rec}(P) \Leftrightarrow -y \in \text{rec}(P)$. Άρα σε αυτή τη περίπτωση, $\text{lin}(P) = \text{rec}(P)$.

Ορισμός 10.6 *Το* lineality space *του πολυέδρου* $P = \{x \mid Ax \le b\}$ *ορίζεται ως το σύνολο* $\text{lin}(P) = \text{rec}(P) \cap -\text{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\} = \text{nullspace}(A)$.

Παρατηρήσεις:

- Τετριμμένα, $\forall P,\ \vec{0} \in \text{lin}(P)$.
- Για ένα διάνυσμα y, $y \in \text{lin}(P) \Leftrightarrow y \in \text{rec}(P)\ \&\ -y \in \text{rec}(P)$ (βλ. Σχήμα 10.4).
- Αν $\text{rec}(P) \supset \{\vec{0}\}$, τότε το P περιέχει ημιευθεία (ιδιότητα (iii) του χαρακτηριστικού κώνου).
- Αν $\text{lin}(P) \supset \{\vec{0}\}$, τότε το P περιέχει ευθεία (βλ. Σχήμα 10.4).

Ορισμός 10.7 *Αν για το πολύεδρο* P $\text{lin}(P) = \{\vec{0}\}$ *το* P *καλείται* μυτερό (pointed).

Ένα μη κενό πολύεδρο P είναι μυτερό ανν το P δεν περιέχει ευθεία (βλ. Σχήμα 10.3). Επιπλέον, με βάση το Θεώρημα 5.1, παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 10.2 *Ένα μη κενό πολύεδρο P έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο ανν το P είναι μυτερό.*

Από το Θεώρημα 10.1 και την Πρόταση 10.1(iv) προκύπτει ότι ένα πολύεδρο P μπορεί να γραφεί ως $P = Q + \text{rec}(P)$, όπου Q πολύτοπο. Για ένα μυτερό πολύτοπο P, το κυρτό κάλυμμα των κορυφών του P είναι πάντοτε μία εφικτή επιλογή για το Q.

Θεώρημα 10.2 *Έστω P ένα μυτερό πολύεδρο τ. ώ. $P = \text{conv}(X) + \text{cone}(Y)$. Τότε όλα τα ακραία σημεία του P ανήκουν στο X και αν το $x^j \in X$ δεν είναι ακραίο σημείο του P, τότε $P = \text{conv}(X \setminus \{x^j\}) + \text{cone}(Y)$.*

Από το Θεώρημα 10.2 και την Πρόταση 10.1(iv) προκύπτει άμεσα το ακόλουθο.

Πόρισμα 10.3 *Έστω P ένα μυτερό πολύεδρο τ. ώ.*

$$P = \text{conv}(X) + \text{cone}(Y) \tag{10.3}$$

Τότε $Y = \text{rec}(P)$ και το ελαχιστικό σύνολο X που ικανοποιεί την (10.3) είναι το σύνολο των ακραίων σημείων του P.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 10.2 αναβάλλεται για τη Διάλεξη 16. Εκεί θα γενικεύσουμε και το Πόρισμα 10.3 σε πολύεδρα που δεν είναι μυτερά.

10.3 Διαφορά Minkowski

Εναλλακτική απόδειξη της Πρότασης 10.1(iv). Έστω $y \in \mathrm{rec}(P)$, $y \neq 0$ Θα δείξουμε ότι $y \in C$. Από τον ορισμό του $\mathrm{rec}(P)$, για κάθε $x \in Q$, $x + y \in P$. Άρα $\{y\} + Q \subseteq P = Q + C$. Από την Πρόταση 10.3, $y \in C$. ∎

Πρόταση 10.3 *Έστω μη κενά πολύεδρα $A, Q, C \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν το Q είναι φραγμένο τότε η σχέση $A + Q \subseteq C + Q$ έχει ως συνέπεια ότι $A \subseteq C$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $a \in A$ για το οποίο $a \notin C$. Υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει το a από το C, δηλ. διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$, και αριθμός $\varepsilon > 0$, έ. ώ. $u^T a \geq u^T c + \varepsilon$, για κάθε $c \in C$. Παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup\{u^T(a' + q) \mid a' \in A,\ q \in Q\} &\geq \sup\{u^T(a + q) \mid q \in Q\} \\ &\geq \sup\{u^T(c + q) \mid c \in C,\ q \in Q\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

που έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση $A + Q \subseteq C + Q$. Σημειώνουμε ότι επειδή το Q είναι φραγμένο, $\sup\{u^T(a + q) \mid q \in Q\} \in \mathbb{R}$, άρα οι παραπάνω ανισότητες δεν μπορούν να εκφυλιστούν σε ισότητα. ∎

Η σχέση $\{y\} + Q \subseteq P$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, σημαίνει ότι το y ανήκει στη Διαφορά Minkowski $P \ominus Q$ η οποία ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 10.8 (Διαφορά Minkowski) *Έστω δύο σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Η* διαφορά Minkowski *των A και B ορίζεται ως το σύνολο $A \ominus B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \{x\} + B \subseteq A\}$.*

Παρατήρηση 10.1 *Γενικά $A \ominus B \neq A + (-B)$.*

Πρόταση 10.4 *Για μη κενά σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \ominus B \subseteq A + (-B)$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in A \ominus B$. Τότε $z + B \subseteq A$. Άρα για κάθε $b \in B$, υπάρχει $a \in A$, έ.ώ. $z + b = a \Rightarrow z = a - b$. ∎

Παρατηρήστε ότι για δύο σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

όπου απλοποιήσαμε το $A + \{b\}$ σε $A + b$. Μια ανάλογη ερμηνεία της διαφοράς Minkowski δίνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 10.5 *Έστω δύο σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι*

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b).$$

Απόδειξη. Έστω $z \in A \ominus B$. Τότε $z + B \subseteq A$. Άρα για κάθε $b \in B$, υπάρχει $a \in A$, έ.ώ. $z + b = a$, $z = a - b$. Επομένως για κάθε $b \in B$, $z \in (A - b)$. Αντιστρόφως, έστω $z \in \bigcap_{b \in B}(A - b)$. Τότε για κάθε $b \in B$, υπάρχει $a \in A$, έτσι ώστε $z = a - b$, άρα $a = z + b$. Δηλ., για κάθε $b \in B$, $z + b \in A$. Επομένως $z + B \subseteq A$ που σημαίνει $z \in A \ominus B$. ∎

Η απόδειξη της επομένης πρότασης παραλείπεται. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε στο [1].

Πρόταση 10.6 *Έστω A, B μη κενά, συμπαγή, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε $(A + B) \ominus B = A$.*

*10.4 Ορθογώνια αποσύνθεση πολυέδρου

Γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι αν S είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τότε το $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα Minkowski του S και του *ορθογώνιου συμπληρώματος* $S^\perp$. Το τελευταίο ορίζεται ως

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^T s = 0, \ \ \forall s \in S\}.$$

Μια αντίστοιχη ορθογώνια αποσύνθεση (orthogonal decomposition) ορίζεται και για οποιοδήποτε πολύεδρο όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί. Το θεώρημα εφαρμόζεται συνήθως για $S = \text{lin}(P)$.

Θεώρημα 10.3 *Έστω P ένα μη κενό πολύεδρο στο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε υπόχωρο S που περιέχεται στο $\text{lin}(P)$ έχουμε ότι*

$$P = (P \cap S^\perp) + S.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να αποσυνθέσουμε το $\mathbb{R}^n$ ως άθροισμα του S και του ορθογώνιου συμπληρώματος του $S^\perp$. Αν $x \in P$, υπάρχουν μοναδικά $z \in S^\perp$ και $y \in S$ τ. ώ. $x = z + y$. Επειδή $-y \in S$, και $S \subseteq \text{lin}(P)$ παίρνουμε ότι $-y \in \text{rec}(P)$ άρα $x - y \in P$. Επομένως $z = x - y \in P \cap S^\perp$. Άρα $P \subseteq (P \cap S^\perp) + S$.

Αντιστρόφως, αν $x \in (P \cap S^\perp) + S$, $x = z + y$, με $z \in P \cap S^\perp$ και $y \in S$. Άρα $z \in P$. Αφού $y \in S$, έχουμε ότι ότι $y \in \text{rec}(P)$, άρα $z + y \in P$. Επομένως $(P \cap S^\perp) + S \subseteq P$. ∎

Αναφορές

[1] Rolf Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Cambridge University Press, 2nd edition, 2014.