Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 12: 19.11.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Μανιάτης Σπυρίδων & Μυρισιώτης Δημήτριος & Σ. Κ.

12.1 Παραδείγματα (ακέραιων) πολυτόπων

Υπενθυμίζουμε το θεώρημα που αποδείχθηκε στο προηγούμενο μάθημα.

Θεώρημα 12.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \geq b^=\}$
2. $\dim(P) = n - \text{rank}(A^=)$

Υπενθυμίζουμε το Προβλημα του Σακιδιου (Knapsack Problem). Δίνονται n αντικείμενα, με αντίστοιχα βάρη και αξίες $\alpha_i, p_i \geq 0$ για κάθε $i \in [n]$, και σακίδιο χωρητικότητας $u \geq 0$. Εφικτή λύση για το πρόβλημα είναι οποιοδήποτε υποσύνολο των αντικειμένων $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i \in I} \alpha_i \leq u$. Μια βέλτιστη εφικτή λύση μεγιστοποιεί τη συνολική αξία των επιλεγμένων αντικειμένων. Μια λύση I μπορεί να αναπαρασταθεί και με το χαρακτηριστικό διάνυσμα του συνόλου I, με συντεταγμένες:

$$x_i^I = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in I \\ 0 & \text{αν } i \notin I \end{cases}$$

Παράδειγμα 12.1 (Πολύτοπο του Σακιδίου – Knapsack Polytope) *Το* Πολύτοπο του Σακιδίου *ορίζεται ως το κυρτό κάλυμα των εφικτών λύσεων σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος:*

$$P := \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^n \mid \alpha^T x \leq u\},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ και $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ποια είναι η διάσταση του πολυτόπου P;

Έστω $J \subseteq \{1, 2 \ldots, n\}$ με $J = \{i \mid \alpha_i > u\}$. Τότε, $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0 \text{ για κάθε } j \in J\}$ (γιατί είναι προφανές ότι μια εφικτή λύση δεν μπορεί να «βάζει» στο σακίδιο αντικείμενο με βάρος μεγαλύτερο της χωρητικότητας του σακιδίου).
Οι εξισώσεις $\{x_j = 0 \mid j \in J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες άρα έχουμε τη σχέση:

$$\dim(P) \leq n - |J|. \tag{12.1}$$

Αν βρούμε $n - |J| + 1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του P, θα έχουμε (εξ ορισμού της διάστασης) ότι $\dim \geq n - |J|$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (12.1), ότι $\dim(P) = n - |J|$, που απαντά στο ερώτημά μας.

Για κάθε $j \notin J$ ορίζουμε ως $e^j \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στη θέση της j-οστής συντεταγμένης και 0 σε όλες τις υπόλοιπες. Είναι φανερό ότι $e^j \in P$ για κάθε $j \notin J$ (γιατί το να βάλουμε στο σακίδιο μόνο ένα αντικείμενο του οποίου το βάρος δεν ξεπερνά τη χωρητικότητα του σακιδίου είναι εφικτή λύση).

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα του συνόλου $\{e^j \mid j \notin J\} \cup \{\vec{0}\} \subseteq P$ (ελέγξτε ότι το να μη βάλουμε τίποτα στο σακίδιο είναι εφικτή λύση, άρα $\vec{0} \in P$) είναι αφινικά ανεξάρτητα, καθώς τα διανύσματα του συνόλου $\{e^j - \vec{0} \mid j \notin J\} = \{e^j \mid j \notin J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 12.2 (Πολύτοπο των Μεταθέσεων – Permutahedron) *Ορίζουμε το* Πολύτοπο των Μεταθέσεων (permutahedron) $\Pi_n \subset \mathbb{R}^n$ *ως* $\text{conv}(S_n)$*, όπου*

$$S_n = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x \textit{ προκύπτει από μετάθεση των στοιχείων του διανύσματος } [1, 2, \dots, n-1, n]^T\}$$

Ποια είναι η διάσταση του πολυτόπου Π_n*;*

Θα αποδείξουμε ότι $\dim(\Pi_n) = n - 1$.

Είναι προφανές ότι κάθε διάνυσμα $x \in S_n$ (πάντα αθροίζονται τα ίδια στοιχεία) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2} \tag{12.2}$$

Την ίδια εξίσωση ικανοποιούν και όλα τα σημεία $x \in \Pi_n$ καθώς (εξ ορισμού) προκύπτουν ως κυρτοί συνδυασμοί των $x \in S_n$. Συνεπώς,

$$\Pi_n \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = \binom{n+1}{2} \right\}$$

και άρα $\dim(\Pi_n) \leq n - 1$.
Για να δείξουμε ότι $\dim(\Pi_n) = n - 1$, αρκεί να δείξουμε ότι αν όλα τα $x \in S_n$ ικανοποιούν κάποια, αυθαίρετα επιλεγμένη, εξίσωση, τότε αυτή είναι γραμμικά εξαρτημένη από την (12.2). Με άλλα λόγια,

$$\alpha^T x = \beta, \quad \forall x \in S_n \quad \Longrightarrow \quad \alpha^T x = \beta \text{ πολλαπλάσιο της (12.2)}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\alpha \neq \vec{0}$, γιατί η εξίσωση $0^T x = 0$ είναι γραμμικά εξαρτημένη από την (12.2) (αφού το $\vec{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα).

Πρώτα δείχνουμε ότι αν ισχύει $\alpha^T x = \beta$ για κάθε $x \in S_n$, τότε $\alpha_i = \alpha_j$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Αποδεικνύουμε ότι $\alpha_1 = \alpha_2$ και οι υπόλοιπες ισότητες δείχνονται με τον ίδιο τρόπο. Από την υπόθεση μας ότι $\alpha^T x = \beta$ για κάθε $x \in S_n$, έχουμε ότι:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3 + \dots + \alpha_n \cdot n = \beta \qquad (\text{εδώ έχουμε } x = [1, 2, \dots, n]^T \in \Pi_n)$$
$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3 + \dots + \alpha_n \cdot n = \beta \qquad (\text{εδώ έχουμε } x = [2, 1, \dots, n]^T \in \Pi_n)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

Συνεπώς, υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\lambda \alpha^T x = \lambda \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda \beta$$

και λόγω της (12.2), $\lambda\beta = \binom{n+1}{2}$, άρα η τυχαία εξίσωση που θεωρήσαμε είναι πολλαπλάσιο της (12.2). Άρα η (12.2) είναι η μοναδική (εννοώντας ότι οποιαδήποτε άλλη είναι γραμμικά εξαρτημένη από αυτήν) ισότητα (άμεση ή έμμεση) και από το Θεώρημα 12.1 παίρνουμε ότι $\dim(\Pi_n) = n - 1$, που είναι αυτό που θέλαμε.

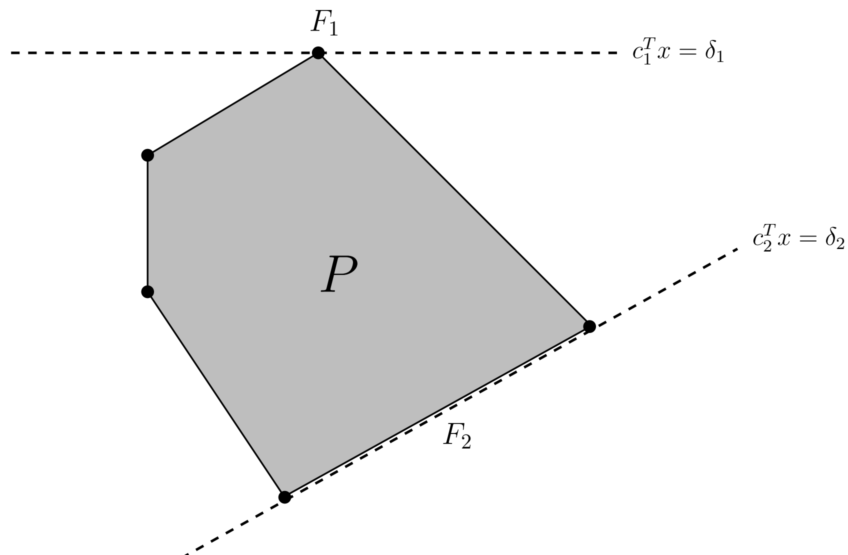
12.2 Όψεις και έδρες πολυέδρων

Ορισμός 12.1 *Έστω πολύεδρο* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. *Καλούμε* όψη (face) *του* P *κάθε σύνολο της μορφής*

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \delta\},$$

όπου $c^T x \leq \delta$ *έγκυρη ανισότητα για το* P. *Τότε λέμε ότι η ανισότητα* $c^T x \leq \delta$ ορίζει *την όψη* F. *Αν* $c \neq \vec{0}$, *τότε το υπερεπίπεδο* $\{x \mid c^T x = \delta\}$ *καλείται* υπερεπίπεδο στήριξης (supporting hyperplane).

Παρατήρηση 12.1 *Για ένα πολύεδρο* P, *τα σύνολα* $\emptyset$ *και* P *είναι πάντα όψεις του, που ορίζονται από τις έγκυρες ανισότητες* $\mathbf{0}^T x \leq 1$ *και* $\mathbf{0}^T x \leq 0$ *αντίστοιχα. Η ύπαρξη αυτών των δυο «τετριμμένων» όψεων οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.*



Σχήμα 12.1: Η όψη F_1 αντιστοιχεί σε κορυφή και η F_2 σε ακμή. Εδώ έχουμε συνολικά 12 όψεις, εκ των οποίων 10 είναι γνήσιες (5 αντιστοιχούν σε κορυφή και 5 σε ακμή).

Ορισμός 12.2 *Έστω πολύεδρο* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. *Μια όψη* F *του* P *καλείται* γνήσια (proper) *αν* $F \notin \{\emptyset, P\}$.

Ορισμός 12.3 *Οι μεγιστικές (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι* $\subseteq$*) γνήσιες όψεις του* P *καλούνται* έδρες (facets) *του* P. *Μια έγκυρη ανισότητα που ορίζει έδρα καλείται* εδραία ανισότητα (facet-defining inequality).

Ισχύει ότι για κάθε γνήσια όψη F του P, υπάρχει έδρα f του P τέτοια ώστε $F \subseteq f \subset P$.

Το επόμενο θεώρημα φανερώνει τη σχέση των όψεων ενός πολυέδρου με τις έγκυρες ανισότητες που τις ορίζουν. Συγκεκριμένα, κάθε όψη F του πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ αντιστοιχίζεται σε ένα υποσύνολο των γραμμών του A, που δηλώνει τις ισότητες που ικανοποιούν τα σημεία της F.

Θεώρημα 12.2 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και M το σύνολο δεικτών των γραμμών του A. Για $I \subseteq M$, ορίζουμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$*

$$F_I := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x = b_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } a_i^T x \leq b_i \text{ για κάθε } i \in M \setminus I\}.$$

Τότε το F_I είναι όψη του P και αντιστρόφως, αν F όψη του P διαφορετική από την κενή όψη $\emptyset$, τότε υπάρχει $I \subseteq M$ τέτοιο ώστε $F = F_I$.

Απόδειξη. Ορίζουμε διάνυσμα u ως εξής:

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in I \\ 0 & \text{αν } i \in M \setminus I \end{cases}$$

Ορίζουμε επίσης $c = u^T A$ και $\delta = u^T b$. Τότε η ανισότητα $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη για το P. Επίσης για κάθε $x \in P$ έχουμε ότι $c^T x = \delta$ αν και μόνο αν $a_i^T x = b_i$ για κάθε $i \in I$ (από την κατασκευή των c και δ). Δηλαδή, $F_I = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \delta\}$ και άρα F_I όψη του P.

Για το αντίστροφο, έστω το μη κενό $F = \{x \in P \mid c^T x = \delta\}$ που ορίζεται από την έγκυρη ανισότητα $c^T x \leq \delta$. Ισοδύναμα, το F είναι το σύνολο των βέλτιστων λύσεων για το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max\{c^T x \mid x \in P\} \tag{LP}$$

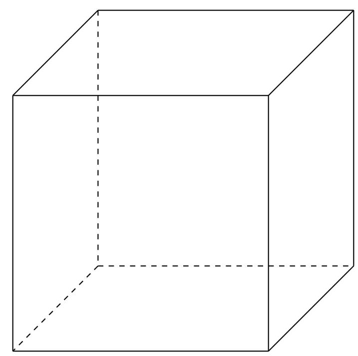
Το δυϊκό του (LP) είναι το

$$\min\{u^T b \mid u^T A = c^T,\ u \geq 0\} \tag{DLP}$$

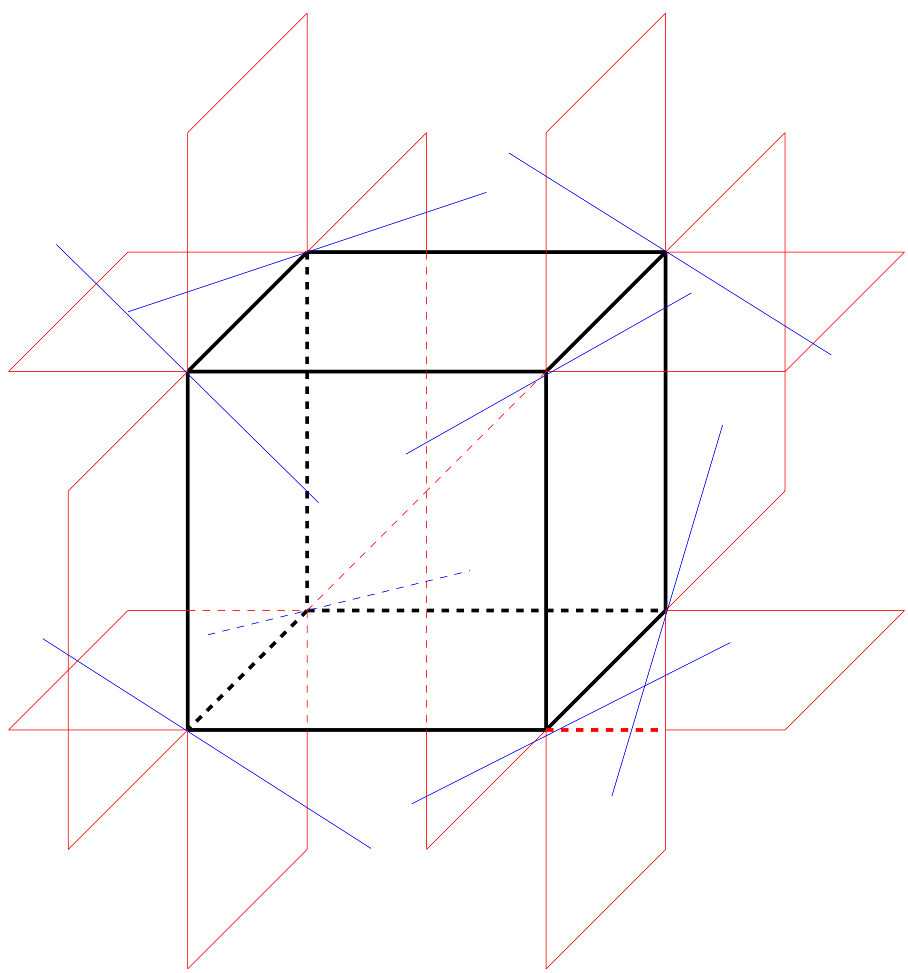
Το σύνολο των βέλτιστων λύσεων του (LP) είναι το σύνολο των σημείων του πολυέδρου P που ικανοποιούν τη συμπληρωματική χαλαρότητα (complementary slackness). Δηλ., για οποιαδήποτε βέλτιστη λύση u του (DLP), $u_i > 0$ συνεπάγεται $a_i^T x = b_i$. Παρατηρήστε ότι αν υπάρχουν πολλές βέλτιστες δυϊκές λύσεις δεν έχουν όλες απαραίτητα τις ίδιες μη μηδενικές μεταβλητές.

Έστω D το σύνολο των βέλτιστων λύσεων του (DLP). Ορίζουμε το σύνολο $I \subseteq M$ με $I = \{i \in M \mid u_i > 0 \text{ για κάποιο } u \in D\}$. Από συμπληρωματική χαλαρότητα, έχουμε ότι οι βέλτιστες λύσεις του (LP) είναι τα $x \in P$ για τα οποία ισχύει ότι $a_i^T x = b_i$, $\forall i \in I$. Επομένως $F = F_I$ για το I που ορίσαμε.

∎



Σχήμα 12.2: Ο γνωστός (τρισδιάστατος) κύβος έχει συνολικά 28 όψεις (2 τετριμμένες + 8 κορυφές + 12 ακμές + 6 έδρες), εκ των οποίων οι 6 είναι έδρες (facets).



Σχήμα 12.3: Ο κύβος του προηγούμενου σχήματος μαζί με τα υπερεπίπεδα που ορίζουν τις όψεις διάστασεις 0 και 2 (οι μπλε γραμμές που ορίζουν τις όψεις διάστασης 0, ή κορυφές του κύβου, αναπαριστούν μόνο την τομή του αντίστοιχου υπερεπιπέδου με την επιφάνεια του σχήματος).