Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 13 : 02.12.2014 & Διάλεξη 14: 03.12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Αλέξανδρος Αγγελόπουλος & Ιωάννης Ψαρρός & Σ. Κ.

13.1 Όψεις και έδρες πολυέδρων (συνέχεια)

Πρόταση 13.1 *Έστω P πολύεδρο. Τότε:*

(i) *Ο αριθμός των όψεων του P είναι πεπερασμένος.*

(ii) *Κάθε όψη F του P είναι πολύεδρο.*

(iii) *Η τομή όψεων του P είναι όψη.*

(iv) *Έστω F όψη του P. Οι όψεις του πολυέδρου F είναι ακριβώς οι όψεις του P που περιέχονται στο F.*

Απόδειξη. Όλες οι προτάσεις προκύπτουν με κατάλληλη εφαρμογή του Θεωρήματος 12.2. ∎

Πόρισμα 13.1 *Αν P πολύεδρο και F μία γνήσια όψη του, τότε:*

(i) $\mathrm{lin}(F) = \mathrm{lin}(P)$

(ii) $\dim(F) < \dim(P)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

(i) Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{lin}(P) = \{y \mid Ay = 0\}$ και από το Θεώρημα 12.2 ότι υπάρχει υποσύνολο $I \subseteq M$ των ανισοτήτων τέτοιο ώστε

$$F = \{x \mid A^I x = b^I,\ A^{M\setminus I} x \leq b^{M\setminus I}\} \tag{13.1}$$

Το F όμως είναι πολύεδρο και $\mathrm{lin}(F) = \{y \mid A^I y = 0,\ A^{M\setminus I} y = 0\} = \{y \mid Ay = 0\} = \mathrm{lin}(P)$.

(ii) Επειδή $F \subseteq P$, παίρνουμε ότι $\mathrm{aff}(F) \subseteq \mathrm{aff}(P)$.

Από την Πρόταση 11.1, υπάρχει $\bar{x} \in P$ τ.ω. $A^= \bar{x} = b^=$ και $A^+ \bar{x} < b^+$. Λόγω της (13.1) και του Θεωρήματος 11.1(i) παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{aff}(F) = \{x \mid A^I x = b^I\},\ \mathrm{aff}(P) = \{x \mid A^= x = b^=\}.$$

Επίσης $F \subset P \implies I \supset I^=$. Πράγματι, αν $I = I^=$ τότε $F = P$. Αν $I \subset I^=$, οι υποδηλούμενες ισότητες με δείκτες στο $I^= \setminus I$ ανήκουν στο $A^{M\setminus I}$ και άρα και πάλι $F = P$.

Αφού $I \supset I^=$ παίρνουμε ότι $\bar{x} \notin \mathrm{aff}(F)$. Συνεπώς $\mathrm{aff}(F) \subset \mathrm{aff}(P)$. Από τον Ισχυρισμό 11.1 προκύπτει ότι $\dim(F) < \dim(P)$.

∎

13.2 Πλεονάζουσες ανισότητες, έδρες

Ορισμός 13.1 *Μια ανισότητα $c^T x \leq \delta$ που ανήκει στο $Ax \leq b$ καλείται* πλεονάζουσα (redundant) *αν είναι έγκυρη ανισότητα του $A_{-c}x \leq b_{-c}$, όπου με A_{-c} συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την γραμμή που αντιστοιχεί στον περιορισμό $c^T x \leq \delta$.*
Οι ανισότητες του $Ax \leq b$ οι οποίες δεν είναι πλεονάζουσες, καλούνται μη πλεονάζουσες (irredundant).

Ορισμός 13.2 *Έστω $P \neq \varnothing$ και $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Το σύστημα $Ax \leq b$ καλείται* ελαχιστική αναπαράσταση *του P αν δεν περιέχει καμία πλεονάζουσα ανισότητα.*

Θα αποδείξουμε εδώ δύο λήμματα τα οποία βοηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος 13.1 που διατυπώνεται στη συνέχεια.

Λήμμα 13.1 *Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \leq b\} \neq \varnothing$ τ.ώ. $\forall i \in I^+$ το $a_i^T x \leq b_i$ είναι μη πλεονάζουσα ανισότητα. Τότε για κάθε i, υπάρχει $x^i \in P$ τ.ω. $a_i^T x^i = b_i$ και $a_j^T x^i < b_j$, $\forall j \in I^+ \setminus \{i\}$.*

Απόδειξη. Έστω $i \in I^+$. Ορίζουμε (όπως και πριν) το υποσύστημα $A^+_{-i}x \leq b^+_{-i}$. Επειδή η ανισότητα $a_i^T x \leq b$ είναι μη πλεονάζουσα, το σύστημα:

$$\begin{aligned} A^= x &= b^= \\ A^+_{-i} x &\leq b^+_{-i} \\ a_i^T x &> b_i \end{aligned}$$

έχει λύση (έστω $\bar{x}^i$): εάν ήταν αδύνατο, τότε για κάθε λύση του $\left\{\begin{matrix} A^= x = b^= \\ A^+_{-i} x \leq b^+_{-i} \end{matrix}\right\}$ έπεται ότι $a_i^T x \leq b_i$, άρα η τελευταία είναι πλεονάζουσα ανισότητα, άτοπο.

Από την Πρόταση 11.1 υπάρχει $\bar{x} \in P$ τ.ω. $A^+\bar{x} < b^+$. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $\{\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}^i \mid \lambda \in [0,1]\}$ Η τομή αυτού του ευθύγραμμου τμήματος με την όψη $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$ είναι το σημείο x^i με τη ζητούμενη ιδιότητα, βλ. και Σχήμα 13.1. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $a_i^T \bar{x}^i = b_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, και $a_i^T \bar{x} = b_i - \delta$, $\delta > 0$, η κατάλληλη τιμή του λ ορίζεται μονοσήμαντα από τα ε, δ. ∎

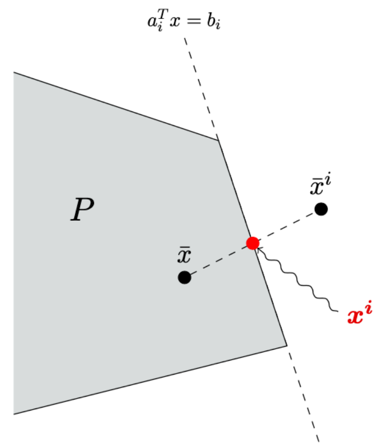
Λήμμα 13.2 *Έστω P μη κενό πολύεδρο και $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση αυτού. Για κάθε $i \in I^+$, η όψη $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$ έχει διάσταση $\dim(P) - 1$.*

Απόδειξη. Αφού $i \in I^+$ τότε και $F \subset P$, ειδάλλως η $a_i^T x = b_i$ θα ήταν υποδηλούμενη ισότητα. Το Πόρισμα 13.1 μας δίνει ότι $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$.

Από το Λήμμα 13.1, οι υποδηλούμενες ισότητες του συστήματος

$$\begin{aligned} a_j^T x &= b_j \quad j \in I^= \cup \{i\} \\ a_j^T x &\leq b_j \quad j \in I^+ \setminus \{i\} \end{aligned}$$

είναι ακριβώς το σύνολο $I_F = I^= \cup \{i\}$. Άρα $\mathrm{aff}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x = b_j,\ j \in I^= \cup \{i\}\}$. Επίσης $\mathrm{rank}(\begin{bmatrix} A^= \\ a_i^T \end{bmatrix}) \leq \mathrm{rank}(A^=) + 1$ και συνεπώς, από το Θεώρημα 11.1 $\dim(F) \geq \dim(P) - 1$.



Σχήμα 13.1: Λήμμα 13.1. Κοντά σε μια όψη του πολυέδρου.

Τελικά προκύπτει το ζητούμενο: $\dim(F) = \dim(P) - 1$. ∎

Θεώρημα 13.1 *Έστω P πολύεδρο και $P \neq \varnothing$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η όψη F του P είναι έδρα $\Leftrightarrow$ $F \neq \varnothing$ και $\dim(F) = \dim(P) - 1$.*

(ii) *Για κάθε έδρα F του P, κάθε σύστημα ανισοτήτων που αναπαριστά το P περιέχει μια ανισότητα που ορίζει την F.*

(iii) *Αν $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση του P, τότε κάθε ανισότητα του $A^+x \leq b^+$ είναι εδραία (facet-defining).*

Απόδειξη.

(ii) Έχουμε $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Έστω F μια έδρα του P. Επειδή F όψη, από Θεώρημα 12.2 έχουμε ότι $\exists I \subseteq M$ (θυμίζουμε ότι M είναι το σύνολο δεικτών των ανισοτήτων $Ax \leq b$), έτσι ώστε $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i, \forall i \in I\}$. Αφού $F \neq P$, όπως είδαμε και στην απόδειξη του Πορίσματος 13.1, προκύπτει ότι $I \setminus I^= \neq \varnothing$. Έστω $k \in I \setminus I^=$, $F' = \{x \in P \mid a_k^T x = b_k\}$, $F \subseteq F' \subset P$. Αφού F μεγιστική όψη, $F = F'$. Επομένως η F ορίζεται από την ανισότητα $a_k^T x \leq b_k$.

(i) $(\Leftarrow)$. Έστω $F \neq \varnothing$ όψη του P και $\dim(F) = \dim(P) - 1$. Προς άτοπο, έστω F' γνήσια όψη του P τ.ω. $F \subset F' \subset P$. Από την Πρόταση 13.1 (iii) έχουμε ότι η F είναι γνήσια όψη της F'. Και από το Πόρισμα 13.1 (ii) έπεται ότι $\dim(F) < \dim(F') < \dim(P)$, αδύνατο.

$(\Rightarrow)$. Έστω F έδρα του P και $Ax \leq b$ μια ελαχιστική αναπαράσταση του P. Από (ii) υπάρχει $i \in I^+$ τ.ω. $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$. Από το Λήμμα 13.2, $\dim(F) = \dim(P) - 1$.

(iii) Άμεση συνέπεια του (i) και του Λήμματος 13.2.

∎

Πόρισμα 13.2 *Έστω πολύεδρο $P \neq \emptyset$ και $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση του P. Το P έχει $|I^+|$ διακεκριμένες έδρες, τις $F_i = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$, $\forall i \in I^+$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 13.1, για κάθε $i \in I^+$ το F_i είναι έδρα του P και αυτές είναι όλες οι έδρες του P. Επίσης, $\forall i, j \in I^+$, $i \neq j$ ισχύει ότι $F_i \neq F_j$ καθώς από το Λήμμα 13.1 υπάρχουν x^i, x^j τ.ω. $x^i \in F_i \setminus F_j$, $x^j \in F_j \setminus F_i$.

∎

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 13.2 *Οι ανισότητες του $A^+x \leq b^+$ είναι μη πλεονάζουσες στο $Ax \leq b$ αν και μόνο αν για κάθε διακεκριμένες $a_1^T x \leq b_1$ και $a_2^T x \leq b_2$ από το $A^+x \leq b^+$ υπάρχει διάνυσμα $x \in P$ τέτοιο ώστε $a_1^T x = b_1$ και $a_2^T x < b_2$.*

13.3 Το πολύτοπο των ανεξάρτητων συνόλων

Έστω γράφημα $G = (V, E)$, με $|V| = n$. Το $V' \subseteq V$ καλείται *ανεξάρτητο σύνολο (independent set ή stable set)* αν το εναγόμενο γράφημα $G[V']$ δεν περιέχει ακμές.

Ορίζουμε $\mathrm{STAB}(G) = \mathrm{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x$ χαρακτηριστικό διάνυσμα ανεξάρτητου συνόλου στο $G\}$. Προφανώς, τα διανύσματα $e_1, e_2, ..., e_n, \vec{0}$ ανήκουν στο $\mathrm{STAB}(G)$. Όμως είναι και αφινικά ανεξάρτητα, γεγονός το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$\dim(\mathrm{STAB}(G)) = n + 1 - 1 = n.$$

Έστω, τώρα, K μια μεγιστική κλίκα στο G. Η ανισότητα

$$\sum_{v \in K} x_v \leq 1$$

είναι έγκυρη για το $\mathrm{STAB}(G)$ (το πολύ μια κορυφή από κάθε μεγιστική κλίκα μπορεί να ανήκει στο ανεξάρτητο σύνολο). Θα δείξουμε ότι είναι και εδραία ανισότητα.

Ορίζουμε $F_K = \{x \in \mathrm{STAB}(G) \mid \sum_{v \in K} x_v = 1\}$. Θα δείξουμε ότι $\dim(F_K) = n - 1$, άρα F_K έδρα.

Κάθε $v \in V \setminus K$ περιέχεται σε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2, με κάποια από τις κορυφές του K. Συνολικά έχουμε $|V \setminus K|$ τέτοια ανεξάρτητα σύνολα.

Επίσης κάθε $w \in K$ ορίζει το ανεξάρτητο μονοσύνολο $\{w\}$. Συνολικά έχουμε $|K|$ τέτοια ανεξάρτητα σύνολα.

Ορίσαμε $|V| = n$ σημεία του $\mathrm{STAB}(G)$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα και αφινικά ανεξάρτητα. Άρα $\dim(F_K) \geq n - 1$. Επειδή $F_K \subset \mathrm{STAB}(G)$ (και F_K γνήσια όψη) έχουμε $\dim(F_K) = n - 1$.

Παρατήρηση 13.1 *Αν K μη μεγιστική κλίκα τότε $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ δεν είναι εδραία.*

Η απόδειξη της Παρατήρησης 13.1 βρίσκεται στις σημειώσεις της επόμενης διάλεξης.