Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 16: 10.12.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Λουκάς Κάβουρας & Στρατής Σκουλάκης & Σ. Κ.

16.1 Πολύεδρο μεταθέσεων

Θυμίζουμε τον ορισμό του πολυέδρου μεταθέσεων (permutahedron) ως Π_n=conv(S_n), όπου S_n οι μεταθέσεις του $[1, 2, \ldots, n]^T$. Από το Παράδειγμα 12.2, η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \binom{n+1}{2} \tag{16.1}$$

είναι έγκυρη για το Π_n.

Ορίζουμε τις ανισότητες

$$\sum_{i\in K} x_i \geq 1 + 2 + \ldots + k = \binom{k+1}{2}, \ \forall \varnothing \neq K \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \ |K| = k \geq 1. \tag{16.2}$$

Η (16.2) είναι έγκυρη ανισότητα και ισχύει με ισότητα αν $\{x_i \mid i \in K\} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Έστω $F_k = \{x \in \Pi_n \mid \sum_{i\in K} x_i = \binom{k+1}{2}\}$ όψη του Π_n. Θα δείξουμε ότι η F_k είναι έδρα.

Η F_k είναι γνήσια όψη και υποθέτουμε ότι δεν είναι έδρα. Άρα υπάρχει έδρα που την περιέχει, δηλαδή υπάρχει εδραία ανισότητα του Π_n, η $a^T x \geq b$ με $a \in$, $b \in \mathbb{R}$, τ.ώ. $a^T x = b$, $\forall x \in F_k \cap S_n$. Θα δείξουμε ότι η (16.2) ορίζει την ίδια όψη που ορίζει η ανισότητα $a^T x \geq b$, το οποίο συνεπάγεται ότι η F_k είναι έδρα.

Ισχυρισμός 16.1 *Αν $i, j \in K$ ή $i, j \in \{1, \ldots, n\}\backslash K$ τότε $a_i = a_j$.*

Απόδειξη. Έστω $i, j \in K$, $i \neq j$, και $\bar{x} \in F_k \bigcap S_n$. Από το διάνυσμα $\bar{x}$ παίρνουμε το διάνυσμα $\tilde{x}$ με την αντιμετάθεση $\bar{x}_i \leftrightarrow \bar{x}_j$. Άρα το $\tilde{x} \in F_k$ και $a^T \tilde{x} = b$. Επίσης $a^T x - a^T \tilde{x} = 0 \Rightarrow a_i(\bar{x}_i - \tilde{x}_i) + a_j(\bar{x}_j - \tilde{x}_j) = 0$. Τελικά, $(a_i - a_j)(\bar{x}_i - \bar{x}_j) = 0 \Rightarrow a_i = a_j$, αφού $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$. Παρόμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση $i, j \notin K$. ∎

Λόγω του Ισχυρισμού 16.1, υπάρχουν $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ έ. ώ. $a^T x = \lambda \sum_{i\in K} x_i + \lambda' \sum_{i\notin K} x_i$.

Ισχυρισμός 16.2 $\lambda \geq \lambda'$.

Απόδειξη. Διαλέγουμε $i \in K$, $j \notin K$, και από το $\bar{x} \in F_k \bigcap S_n$ παράγουμε το διάνυσμα $\tilde{x}$ με την αντιμετάθεση $\bar{x}_i \leftrightarrow \bar{x}_j$. Από το σύστημα $\begin{cases} a^T \bar{x} = b \\ a^T \tilde{x} \geq b \end{cases}$ προκύπτει $a^T \tilde{x} - a^T \bar{x} \geq 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda')(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \geq 0$. Επειδή $\bar{x}_j - \bar{x}_i > 0$ από κατασκευή, ισχύει και $\lambda - \lambda' \geq 0$. ∎

Πολλαπλασιάζοντας τη (16.1) με λ' και τη (16.2) με $\lambda - \lambda' \geq 0$ παίρνουμε ότι η ανισότητα

$$a^T x \geq \lambda' \binom{n+1}{2} + (\lambda - \lambda') \binom{k+1}{2} := \delta$$

είναι έγκυρη για το Π_n. Αφού η ανισότητα $a^T x \geq b$ είναι μη πλεονάζουσα για το Π_n, υποχρεωτικά $b \geq \delta$. Ας υποθέσουμε ότι $b > \delta$. Για οποιοδήποτε $\bar{x} \in F_k \bigcap S_n$, $a^T x = \delta$ άρα το $\bar{x}$ παραβιάζει την ανισότητα $a^T x \geq b$, άτοπο. Επομένως $b = \delta$.

Με βάση το Θεώρημα 15.2 η $a^T x \geq b$ και η (16.2) ορίζουν την ίδια έδρα.

Για κάθε διαφορετικό K η ανίσωση (16.2) ορίζει διακεκριμένη έδρα. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι το πολύεδρο που ορίζεται από την (16.1) και τις (16.2) έχει τις ίδιες κορυφές με το Π_n. Βλ. π.χ. [1, Κεφ. 7]. Άρα τελικά έχουμε έναν πλήρη χαρακτηρισμό του πολυέδρου Π_n των μεταθέσεων το οποίο έχει $n!$ κορυφές και $2^n - 2$ έδρες.

16.2 Ελαχιστικές όψεις

Έστω ένα πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $P \neq \varnothing$. Η $F \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται *ελαχιστική όψη* του P, αν F είναι όψη του P που δεν περιέχει γνήσια όψη και $F \neq \varnothing$. Θυμίζουμε ότι ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι *αφινικός υπόχωρος* αν $\mathrm{aff}(S) = S$.

Θεώρημα 16.1 (Hoffman-Kruskal) *Κάθε ελαχιστική όψη του μη κενού πολυέδρου P είναι αφινικός υπόχωρος που προκύπτει ως μετατόπιση (translate) του* $\mathrm{lin}(P)$.

Απόδειξη. Έστω η ελαχιστική όψη $F \neq \varnothing$. Η F ως μη κενό πολύεδρο δεν έχει γνήσια όψη ανν δεν έχει έδρες. Λόγω του Πορίσματος 13.2, η F δεν έχει έδρες ανν η F είναι αφινικός υπόχωρος. Τελικά η F είναι ελαχιστική όψη του P ανν η F είναι αφινικός υπόχωρος, δηλ. $F = \mathrm{aff}(F)$. Έπεται ότι $F = \{v\} + \mathrm{lin}(F)$ για κάποιο διάνυσμα $v \in F$ (γιατί;). Από το Πόρισμα 13.1, $\mathrm{lin}(F) = \mathrm{lin}(P)$. ∎

Στα Σχήματα 16.1, 16.2 και 16.3, έχουμε παραδείγματα του Θεωρήματος Hoffman-Kruskal στο επίπεδο.

Παρατήρηση 16.1 *Αν $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ πολύεδρο και F ελαχιστική όψη του, τότε* $\dim(F) = \dim(\mathrm{lin}(P)) = \dim(\{x \mid Ax = 0\}) = n - \mathrm{rank}(A)$.

Παρατήρηση 16.2 *Κάθε πολυεδρικός κώνος έχει μία μοναδική ελαχιστική όψη, η οποία είναι το lineality space του.*

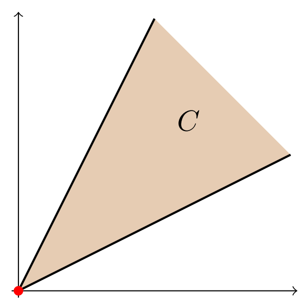
Πόρισμα 16.1 *Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ πολύεδρο, η όψη $F \neq \varnothing$ του P είναι ελαχιστική ανν $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$ για κάποιο υποσύστημα $A'x \leq b'$ του $Ax \leq b$ τ.ώ.* $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A)$.

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έστω F μη κενή όψη του P με $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$, όπου το σύστημα $A'x \leq b'$ αποτελείται από κάποιες από τις ανισώσεις του $Ax \leq b$ τ.ώ. $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank(A)}$. Τότε, η F είναι αφινικός υπόχωρος, επομένως δεν περιέχει γνήσια όψη. Άρα, η F είναι ελαχιστική όψη του P.

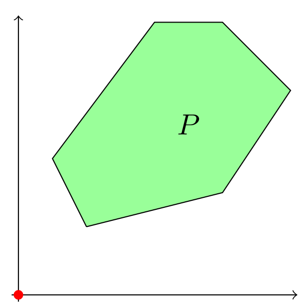
($\Rightarrow$)Έστω $A'x \leq b'$ να είναι το σύστημα όλων των ανισοτήτων του $Ax \leq b$, οι οποίες ικανοποιούνται με ισότητα από κάθε σημείο της F, και έστω $A''x \leq b''$ το σύστημα με τις υπόλοιπες ανισότητες του $Ax \leq b$. Από το Θεώρημα 12.2, $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b',\ A''x \leq b''\}$. Αν η F είναι ελαχιστική όψη τότε είναι και αφινικός υπόχωρος. Αφού F αφινικός υπόχωρος από το Θεώρημα 11.1(i) $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$, δηλ. για κάθε ανίσωση $a_i^T x \leq b_i$ από το $A''x \leq b''$, θα ισχύει $a_i^T \bar{x} < b_i, \forall \bar{x} \in F$. (Από το Λήμμα 13.1, οι $A''x \leq b''$ είναι πλεονάζουσες ανισότητες για το πολύεδρο F.) Επομένως, $\dim(\mathrm{F}) = n - \mathrm{rank}(A')$. Από την Παρατήρηση 16.1, $\dim(\mathrm{F}) = n - \mathrm{rank}(A) \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$. ∎

Ορισμός 16.1 (Εναλλακτικός ορισμός κορυφής) *Μία ελαχιστική όψη του πολυέδρου P διάστασης 0, καλείται κορυφή του P.*

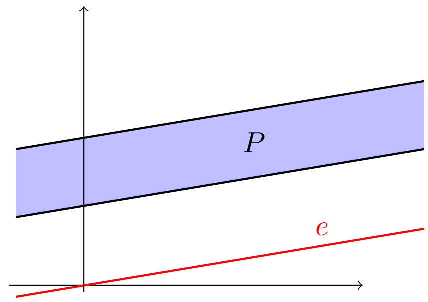
Παρατήρηση 16.3 *Απο το Θεώρημα 16.1 και τον Ορισμό 16.1 το πολύεδρο P έχει κορυφή, αν έχει όψη διάστασης 0 που είναι μετατόπιση του $\mathrm{lin}(P)$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν $\mathrm{lin}(P) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή όταν το P είναι μυτερό.*



Σχήμα 16.1: $\mathrm{lin}(C) = \vec{0}$



Σχήμα 16.2: $\mathrm{lin}(P) = \vec{0}$



Σχήμα 16.3: $\text{lin}(P) = e$

*16.3 Αποσύνθεση Πολυέδρου

16.3.1 Μυτερά και μη πολύεδρα

Αποδεικνύουμε το Θεώρημα 10.2 που έχουμε αφήσει σε εκκρεμότητα από τη Διάλεξη 10 και αφορά μυτερά πολύεδρα. Επαναλαμβάνουμε τη διατύπωση για λόγους πληρότητας.

Θεώρημα 16.2 (Θεώρημα 10.2) *Έστω P ένα μυτερό (pointed) πολύεδρο τ. ώ. $P = \text{conv}(X) + \text{cone}(Y)$. Τότε όλα τα ακραία σημεία του P ανήκουν στο X και αν το $x^j \in X$ δεν είναι ακραίο σημείο του P, ισχύει ότι $P = \text{conv}(X \setminus \{x^j\}) + \text{cone}(Y)$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 10.1(iv), $\text{cone}(Y) = \text{rec}(P)$. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι όλα τα ακραία σημεία του P ανήκουν στο X. Έστω v ένα ακραίο σημείο του P. Επειδή $P = \text{conv}(X) + \text{rec}(P)$ υπάρχουν $x \in \text{conv}(X)$, $y \in \text{rec}(P)$ τ. ώ. $v = x + y$. Αν $y = 0$, τελειώσαμε. Έστω $y \neq 0$. Για την ημιευθεία $r = \{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$, γνωρίζουμε ότι $r \subseteq P$. Αφού το v βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία και $v \neq x$, το v μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός δύο σημείων της r άρα και του P. Άτοπο αφού το v είναι ακραίο σημείο.

Απομένει να δείξουμε ότι αν το $x^j \in X$ δεν είναι ακραίο σημείο του P, τότε $P = \text{conv}(X \setminus \{x^j\}) + \text{cone}(Y)$. Θα δείξουμε την ισχυρότερη πρόταση $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$ όπου V το σύνολο των ακραίων σημείων του P. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη διάσταση t του P. Αν $t = 0$, ισχύει τετριμμένα. Έστω $t \geq 1$. Υπάρχουν $v_1, v_2 \in P$, και $0 < \lambda < 1$, τ. ώ.

$$x^j = \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2. \tag{16.3}$$

Επεκτείνουμε όσο γίνεται το ευθύγραμμο τμήμα $v_1 v_2$ και από τα δύο άκρα παραμένοντας εντός του P. Επειδή το P είναι μυτερό, υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Είτε καταλήγουμε με ευθύγραμμο τμήμα $v_1' v_2'$ (μπορεί $v_i = v_i'$, για $i \in \{1, 2\}$) είτε με ημιευθεία $v + \lambda y$ που περιέχει το x^j. Και στις δύο περιπτώσεις τα v_1', v_2' (αντίστοιχα το v) ικανοποιούν με ισότητα έναν επιπλέον, σε σύγκριση με το x^j, περιορισμό του P. Άρα βρίσκονται πάνω σε γνήσιες όψεις του P. Έστω στην πρώτη περίπτωση του ευθύγραμμου τμήματος, Q_1, Q_2 οι δύο όψεις που περιέχουν τα v_1', v_2' αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την Επαγωγική Υπόθεση στο πολύεδρο Q_1 μπορούμε να γράψουμε το v_1' ως στοιχείο του συνόλου

$$P = \text{conv}(X_{Q_1}) + \text{rec}(Q_1)$$

όπου X_{Q_1} το σύνολο των ακραίων σημείων του Q_1 με $X_{Q_1} \subseteq V$. Επίσης $\mathrm{rec}(Q_1) \subseteq \mathrm{rec}(P)$. Άρα $v'_1 \in \mathrm{conv}(V) + \mathrm{rec}(P)$. Ομοίως και $v'_2 \in \mathrm{conv}(V) + \mathrm{rec}(P)$. Από την (16.3) παίρνουμε το ζητούμενο για το x^j. Η δεύτερη περίπτωση, της ημιευθείας, αντιμετωπίζεται ομοίως. ∎

Η παρακάτω πρόταση γενικεύει το Πόρισμα 10.3 σε πολύεδρα που δεν είναι απαραίτητα μυτερά (pointed).

Θεώρημα 16.3 *Έστω $F_1, \dots, F_r$ οι ελαχιστικές όψεις του μη κενού πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και σημεία $x_i \in F_i$, $i = 1, \dots, r$. Τότε*

$$P = \mathrm{conv}(\{x_1, \dots, x_r\}) + \mathrm{rec}(P). \tag{16.4}$$

Αν $P = \mathrm{conv}(X) + \mathrm{rec}(P)$ το X πρέπει να περιέχει ένα σημείο από κάθε ελαχιστική όψη.

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\supseteq$ είναι προφανής. Αποδεικνύουμε ότι $P \subseteq \mathrm{conv}(\{x_1, \dots, x_r\}) + \mathrm{rec}(P)$ με επαγωγή στη διάσταση k του P. Έστω $t = \dim(\mathrm{lin}(P))$. Χβτγ υποθέτουμε ότι το σύστημα $Ax \leq b$ είναι ελαχιστική αναπαράσταση. Συμβολίζουμε ως συνήθως με $A^+x \leq b^+$ το υποσύστημα του $Ax \leq b$ που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις υποδηλούμενες ισότητες $A^= x \leq b^=$ και με $I^+, I^=$ τα αντίστοιχα σύνολα δεικτών.

Αν $k = t$ τότε $\dim(P) = n - \mathrm{rank}(A^=) = n - \mathrm{rank}(A)$ άρα για οποιοδήποτε $i \in I^+$, το $a_i^T x$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $a_j^T x$, $j \in I^=$. Επειδή το πολύεδρο είναι μη κενό, όλες οι ανισότητες του $A^+x \leq b^+$ είναι πλεονάζουσες και $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$. Επομένως το P είναι μια μετατόπιση του $\mathrm{lin}(P)$ κατά ένα διάνυσμα v. Από το Πόρισμα 16.1 το v ανήκει σε μια ελαχιστική όψη του P. Άρα το P περιέχεται στο δεξί μέλος της (16.4).

Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $k > t$. Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι κάθε έδρα του P περιέχεται στο δεξί μέλος της (16.4). Θεώρησε σημείο $x \in P$. Αν $x - x_1 \in \mathrm{rec}(P)$, τότε $x \in \{x_1\} + \mathrm{rec}(P)$, και άρα το x ανήκει στο δεξί μέλος της (16.4). Αν $x - x_1 \notin \mathrm{rec}(P)$, τότε υπάρχει κάποιο μέγιστο $\lambda \geq 0$, τέτοιο ώστε $x + \lambda(x - x_1) \in P$. Το σημείο $x + \lambda(x - x_1)$ ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις ανισότητες στο $A^+x \leq b^+$ με ισότητα, άρα ανήκει σε μία έδρα του P. Από την επαγωγική υπόθεση το δεξί μέλος της (16.4) περιέχει το $x + \lambda(x - x_1)$ άρα και το ίδιο το x (αφού το x βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το x_1 με το $x + \lambda(x - x_1)$).

Για το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος παρατηρούμε καταρχήν ότι αν ένα σημείο z μιας όψης F γράφεται ως *θετικός* κυρτός συνδυασμός των σημείων ενός πεπερασμένου υποσυνόλου S του P, τότε πρέπει $S \subseteq F$. Πράγματι, έστω $z = \sum_{i=1}^r \lambda_i s_i$ με $\lambda_i > 0$ για κάθε i και $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $k \in [r]$ $s_1, \dots, s_k \in P \setminus F$ και $s_{k+1}, \dots, s_r \in F$. Αν $F = \{x \in P \mid A'x = b'\}$ έχουμε ότι

$$A'z = d + \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i b'$$

όπου $d \neq \sum_{i=1}^k \lambda_i b'$.

Ας υποθέσουμε ότι $X \cap F_i = \varnothing$ για κάποιο $i \in [r]$. Θεωρήστε σημείο $v \in F_i$. Υπάρχουν $x \in \mathrm{conv}(X)$ και $y \in \mathrm{rec}(P)$, τ. ώ. $v = x + y$. Αν $y = 0$ τότε $v \in \mathrm{conv}(X)$ άτοπο. Έστω $y \neq 0$. Τότε το v μπορεί να γραφεί ως θετικός κυρτός συνδυασμός του x και ενός άλλου σημείου x' της ημιευθείας, όπου όμως $x \notin F_i$, άτοπο.

∎

Στη συνέχεια θα επαναδιατυπώσουμε την αποσύνθεση πολυέδρου ώστε να φανεί πιο καθαρά ο ρόλος του $\mathrm{lin}(P)$. Θα διατυπώσουμε πρώτα το θεώρημα αποσύνθεσης για κώνους.

16.3.2 Ακμές και ακραίες ακτίνες

Πρόταση 16.1 *Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $t = \dim(\text{lin}(P))$ και G μια όψη του P διάστασης $t+1$. Τότε υπάρχει υποσύστημα $A'x \leq b'$ του $Ax \leq b$ με $\text{rank}(A') = \text{rank}(A) - 1$ και (όχι απαραίτητα διακεκριμένες) ανισότητες $a_1^T x \leq \beta_1$, $a_2^T x \leq \beta_2$ από το $Ax \leq b$ τ. ώ.*

$$G = \{x \mid a_1^T x \leq \beta_1,\ a_2^T x \leq \beta_2,\ A'x = b'\}. \tag{16.5}$$

Απόδειξη. Θεωρήστε μια ελαχιστική αναπαράσταση $G = \{x \mid A''x \leq b'', A'x = b'\}$. Άρα το $A''x \leq b''$ δεν περιέχει υποδηλούμενες ισότητες και από το Θεώρημα 11.1 $\text{rank}(A') = n - \dim(G) = n - t - 1$. Θυμίζουμε ότι $\text{rank}(A) = n - \dim((\text{lin}(P)) = n - t$. Ισχυριζόμαστε ότι τα σύνολα $\{x \mid a_j^T x = \beta_j,\ A'x = b'\}$ όπου $a_j^T x \leq \beta_j$ ανήκει στο $A''x \leq b''$ αποτελούν παράλληλα υπερεπίπεδα στον αφινικό υπόχωρο $\{x \mid A'x = b'\}$. Προχωράμε στην απόδειξη του ισχυρισμου. Επειδή η αναπαράσταση είναι ελαχιστική, όλες οι γραμμές a_j^T του πίνακα A'' πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες από τις γραμμές του πίνακα A'. Θεωρούμε δύο τυχόντες περιορισμούς $a_1^T x \leq \beta_1$, $a_2^T x \leq \beta_2$ από το σύστημα $A''x \leq b''$. Επειδή

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A' \\ a_1 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} A' \\ a_2 \end{pmatrix} = \text{rank}(A)$$

υπάρχουν διάνυσμα u και αριθμός λ τ. ώ.

$$a_2^T = u^T A' + \lambda a_1^T.$$

Επομένως για x που ανήκουν στον υπόχωρο $\{x \mid A'x = b'\}$

$$a_2^T x \leq \beta_2 \Leftrightarrow u^T b' + \lambda a_1^T x \leq \beta_2.$$

Θέτοντας $u^T b'$ ίσο με μια σταθερά δ, παίρνουμε ότι για x που ανήκουν στον υπόχωρο $\{x \mid A'x = b'\}$

$$a_2^T x \leq \beta_2 \Leftrightarrow \lambda a_1^T x \leq \beta_2 - \delta.$$

Αν $\lambda \neq 0$, αποδείξαμε τον ισχυρισμό για την παραλληλία των υπερεπιπέδων. Αν $\lambda = 0$, η ανισότητα $a_2^T x \leq \beta_2$ είναι πλεονάζουσα.

Αφού καμία ανισότητα του $A''x \leq b''$ δεν είναι πλεονάζουσα, το πολύ δύο από αυτά τα υπερεπίπεδα είναι απαραίτητα για να ορίσουν την G ως τομή υποχώρων στο $\{x \mid A'x = b'\}$. ∎

Αν το πολύεδρο P είναι μυτερό (δηλ. $\text{lin}(P) = \{0\}$), $\dim(G) = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η G καλείται *ακμή* του P αν είναι ευθύγραμμο τμήμα και *ακραία ακτίνα (extreme ray)* του P αν είναι ημιευθεία. Από την (16.5) προκύπτει ότι το πολύεδρο G έχει πάντα το πολύ δύο έδρες, οι οποίες είναι ελαχιστικές όψεις του P. Δύο ελαχιστικές όψεις του P καλούνται *γειτονικές* αν περιέχονται στην ίδια όψη διάστασης $t+1$.

16.3.3 Αποσύνθεση πολυεδρικών κώνων

Έστω $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ ένας πολυεδρικός κώνος. Εύκολα βλέπουμε ότι η μόνη ελαχιστική του όψη είναι το $\text{lin}(C)$. Έστω $t = \dim(\text{lin}(C))$.

Έστω $G_1, \ldots, G_s$ οι όψεις διάστασης $t+1$ του C. Στην αποσύνθεση του C οι όψεις αυτές παίζουν τον ρόλο που παίζουν οι ελαχιστικές όψεις του P στο Θεώρημα 16.3. Αν $t = 0$, οι $G_1, \ldots, G_s$ είναι οι ακραίες ακτίνες του C. Από την Πρόταση 16.1 κάθε μία από τις G_i μπορεί να παρασταθεί ως

$$G_i = \{x \mid a_i^T x \leq 0,\ A'x = 0\}$$

όπου A' υποπίνακας του A και a_i^T γραμμή του A τ. ώ.

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A' \\ a_i \end{pmatrix} = n - t$$

και $\text{lin}(C) = \{x \mid a_i^T x = 0,\ A'x = 0\}$. Διαλέγουμε για κάθε $i = 1, \dots, s$, ένα διάνυσμα $y_i \in G_i \setminus \text{lin}(C)$. Τέτοια διανύσματα υπάρχουν πάντα αφού $\dim(G_i) > \dim(\text{lin}(C))$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ένας γραμμικός υπόχωρος διάστασης t είναι και πεπερασμένα παραγόμενος κώνος που παράγεται από $t+1$ διανύσματα. Διαλέγουμε λοιπόν $z_0, \dots, z_t$ τ. ώ. $\text{lin}(C) = \text{cone}(\{z_0, \dots, z_t\})$. Θα δείξουμε ότι

$$C = \text{cone}(\{y_1, \dots, y_s, z_0, \dots, z_t\}).$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $k - t$ όπου $k = \dim(C)$. Αν $k = t$, ισχύει. Στο επαγωγικό βήμα $k \geq t + 1$. Υπάρχει αναπαράσταση $C = \{x \mid A'''x \geq 0,\ A''x = 0\}$, όπου το σύστημα $A''x = 0$ περιέχει όλες τις υποδηλούμενες ισότητες και ο πίνακας A''' έχει ελάχιστο πλήθος γραμμών. Από την επαγωγική υπόθεση, κάθε έδρα του C περιέχεται στο σύνολο $\text{cone}(\{y_1, \dots, y_s, z_0, \dots, z_t\})$. Θεωρούμε $x \in C$. Έστω λ ο μεγαλύτερος αριθμός για τον οποίο $x - \lambda y_1 \in C$. Για $\lambda = 0$ ισχύει, άρα αυτό το λ, εάν υπάρχει, είναι μη αρνητικό. Επειδή $a_1^T x \leq 0$ και $a_1^T y_1 < 0$, πρέπει $-\lambda_1 a_1^T y_1 \leq -a_1^T x \Rightarrow \lambda \leq \frac{a_1^T x}{a_1^T y_1}$. Άρα το λ ορίζεται και είναι ίσο με

$$\min\{\frac{a_i^T x}{a_i^T y_1} \mid i : a_i^T y < 0\}$$

Οι ανισώσεις που ικανοποιούν $a_i^T y < 0$ ανήκουν όλες στο σύστημα $A'''x \leq 0$. Επομένως για τουλάχιστον μία γραμμή a^T του A''' θα έχουμε ότι $a^T(x - \lambda y_1) = 0$. Άρα το $x - \lambda y_1$ ανήκει σε έδρα του C και από την επαγωγική υπόθεση ανήκει στο σύνολο $\text{cone}(\{y_1, \dots, y_s, z_0, \dots, z_t\})$. Συνεπώς το x θα ανήκει στο ίδιο σύνολο. Δείξαμε την ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 16.4 *Έστω $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ ένας πολυεδρικός κώνος και $t = \dim(\text{lin}(C))$. Έστω $G_1, \dots, G_s$ οι όψεις διάστασης $t+1$ του C και $y_i \in G_i \setminus \text{lin}(C)$, $i = 1, \dots, s$. Αν $z_0, \dots, z_t$ είναι διανύσματα τ. ώ. $\text{lin}(C) = \text{cone}(\{z_0, \dots, z_t\})$ ισχύει ότι*

$$C = \text{cone}(\{y_1, \dots, y_s, z_0, \dots, z_t\}). \tag{16.6}$$

Εάν ο πολυεδρικός κώνος C είναι μυτερός (pointed) η Πρόταση 16.4 μας λέει ότι παράγεται από ένα σύνολο σημείων $y_1, \dots, y_s$, ένα από κάθε μία από τις s ακραίες ακτίνες του C.

16.3.4 Γενική αποσύνθεση πολυέδρου

Από τα Θεωρήματα 16.3 και 16.4 προκύπτει το τελικό μας θεώρημα που περιγράφει την αποσύνθεση ενός πολυέδρου στην πλήρη γενικότητα της.

Θεώρημα 16.5 *Έστω $F_1, \dots, F_r$ οι ελαχιστικές όψεις του μη κενού πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και σημεία $x_i \in F_i$, $i = 1, \dots, r$. Αν $t = \dim(\text{lin}(P))$, και $G_1, \dots, G_s$ οι όψεις διάστασης $t+1$ του $\text{rec}(P)$, διαλέγουμε $y_i \in G_i \setminus \text{lin}(P)$, $i = 1, \dots, s$. Τότε*

$$P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_r\}) + \text{cone}(\{y_1, \dots, y_s\}) + \text{lin}(P). \tag{16.7}$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\text{lin}(\text{rec}(P)) = \text{lin}(P)$. Η (16.7) προκύπτει άμεσα από τις (16.4), (16.6). ∎

Η αναπαράσταση του P που δίνεται στην (16.7) δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη, γιατί δεν είναι μοναδική (βρείτε σχετικό παράδειγμα). Εάν όμως ζητήσουμε να αποσυνθέσουμε το πολύεδρο σύμφωνα με το Θεώρημα 10.3 ως $P = Q + \text{lin}(P)$ όπου $Q \subseteq \text{lin}(P)^{\perp}$, τότε αποδεικνύεται ότι $Q = P \cap \text{lin}(P)^{\perp}$, τα σημεία $x_1, \ldots, x_r$ αντιστοιχούν στα ακραία σημεία του Q, τα $y_1, \ldots, y_s$ πρέπει να ανήκουν ένα σε κάθε μία ακραία ακτίνα του $\text{rec}(Q)$. Σε αυτή την περίπτωση η αναπαράσταση είναι μοναδική, με την εξαίρεση της κλιμάκωσης (scaling) των σημείων $y_1, \ldots, y_s$ κατά ένα θετικό αριθμό.

Αναφορές

[1] G. Lancia and P. Serafini. *Compact Extended Linear Programming Models.* EURO Advanced Tutorials on Operational Research. Springer, 2018.