Γραφείς: Λιβιεράτος Ιωάννης, Πετροπαναγιωτάκη Μαρία, Σ. Κ.

18.1 Θεώρημα του Πολυτόπου των Ταιριασμάτων

Έχουμε ξεκινήσει την απόδειξη του εξής θεωρήματος:

Θεώρημα 18.1 (The Matching Polytope Theorem [1]) *Για ένα μη κενό γράφημα G ισχύει ότι $M(G) = P(G)$.*

Το πολύτοπο $M(G)$ το ορίσαμε ως

$$M(G) = \text{conv}\{\chi^M \in \{0,1\}^{|E|} \mid \chi^M \text{ χαρακτηριστικό διάνυσμα ταιριάσματος } M \text{ του } G\}.$$

$P(G)$ είναι το πολύτοπο που ορίζουν οι (18.1), (18.2),(18.3).

$$x(\delta(v)) \le 1 \qquad \forall v \in V \tag{18.1}$$

$$x(\gamma(S)) \le \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall S \subseteq V, \text{με } |S| \text{ περιττό} \tag{18.2}$$

$$x_e \ge 0 \qquad \forall e \in E \tag{18.3}$$

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι αν

$$w^T x \le t \tag{18.4}$$

μια εδραία ανισότητα του $M(G)$ και M^* το σύνολο των ταιριασμάτων που ικανοποιούν την (18.4) με ισότητα, τότε κάποια ανισότητα του $P(G)$ ικανοποιείται με ισότητα από τα στοιχεία του M^*. Στο προηγούμενο μάθημα, δείξαμε ότι αυτό ισχύει αν $\exists e \in E$ τέτοια ώστε $w_e < 0$ (Περίπτωση 1) ή αν $\exists v \in V$ η οποία καλύπτεται από κάθε ταίριασμα του M^* (Περίπτωση 2).

Περίπτωση 3. Έστω $w_e \ge 0$, $\forall e \in E$ και ότι $\forall v \in V$ υπάρχει ταίριασμα στο M^* που δεν καλύπτει το v. Ορίζουμε $G' = (S, E')$ όπου

$$E' = \{e \in E \mid w_e > 0\} \ne \varnothing$$

$$S = \{v \in V \mid \exists e \in E' : v \in e\}.$$

Ισχυρισμός 18.1 *G' συνεκτικό γράφημα.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω G' μη συνεκτικό. Τότε υπάρχουν ξένα, μη κενά, υπογραφήματα G_1, G_2 του G' με $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G')$ και $E(G_1) \cup E(G_2) = E(G') = E'$. Επίσης από τον ορισμό του S, το G' δεν περιέχει απομονωμένες κορυφές, άρα $E(G_i) \ne \varnothing$, $i = 1, 2$.

Ορίζουμε για $i=1,2$ τα διανύσματα $g^i \in \mathbb{R}^{|E(G)|}$ όπου

$$g_e^i = \begin{cases} w_e & e \in E\left(G_i\right) \\ 0 & e \in E(G) \setminus E(G_i) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $E(G_1) \cup E(G_2) = E'$ και $E' = \{e \in E \mid w_e > 0\}$ ισχύει ότι:

$$g^1 + g^2 = w. \tag{18.5}$$

Έστω η αντικειμενική συνάρτηση $\left(g^i\right)^T \cdot x$, $i=1,2$. Ορίζουμε ως x^i το χαρακτηριστικό διάνυσμα που την μεγιστοποιεί, δηλαδή

$$x^i = \underset{x \in M(G)}{\arg\max}\{\left(g^i\right)^T \cdot x\}$$

Τις αντίστοιχες τιμές του μεγίστου της αντικειμενικής συνάρτησης τις συμβολίζουμε με h^i, $i=1,2$, δηλαδή

$$h^i = \left(g^i\right)^T \cdot x^i.$$

*Παρατήρηση **1i**:*

$$h^1 + h^2 = t \tag{18.6}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του M^*, $\exists x^0 \in M^*$ τέτοιο ώστε $w^T x^0 = t$. Τότε, από την (18.4)

$$t = w^T x^0 = \left(g^1\right)^T x^0 + \left(g^2\right)^T x^0 \leq h^1 + h^2.$$

Άρα, αρκεί πλέον να δείξουμε ότι $h^1 + h^2 \leq t$.

Μπορούμε να υποθέσουμε, λόγω του ορισμού του g^i, ότι το x^i $(i=1,2)$ έχει μη μηδενικές συντεταγμένες μόνο στις θέσεις που αντιστοιχούν στις ακμές του G_i. Επίσης, τα x^1 και x^2 είναι ταιριάσματα και επειδή τα G_1 G_2 ξένα υπογραφήματα, το $x_1 + x_2$ είναι ταίριασμα στο G'. Έχουμε:

$$h^1 + h^2 = \left(g^1\right)^T x^1 + \left(g^2\right)^T x^2 = \left(g^1 + g^2\right)^T \left(x^1 + x^2\right) = w^T \left(x^1 + x^2\right) \leq t.$$

$\square$

Οι ανισότητες

$$(g^1)^T x \leq h^1 \tag{18.7}$$

$$(g^2)^T x \leq h^2 \tag{18.8}$$

είναι έγκυρες ανισότητες για το πολύτοπο $M(G)$. Δείξαμε ότι η εδραία ανισότητα (18.4) είναι άθροισμα των (18.7), (18.8) όπου επιπλέον τα διανύσματα g^1, g^2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ας υποθέσουμε ότι $A'x \leq b'$ είναι το σύστημα που απομένει από μια ελαχιστική H-αναπαράσταση του $M(G)$ αν αφαιρέσουμε την (18.4). Τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} A'x &\leq b' \\ (g^1)^T x &\leq h^1 \\ (g^2)^T x &\leq h^2 \end{aligned}$$

είναι πλήρης αναπαράσταση του $M(G)$ όπου όμως καμία ανισότητα δεν είναι θετικό πολλαπλάσιο της (18.4). Από το Πόρισμα 15.1, η (18.4) δεν είναι εδραία ανισότητα, ΆΤΟΠΟ. Επομένως το γράφημα G' είναι συνεκτικό. Εδώ ολοκηρώνεται η απόδειξη του Ισχυρισμού 18.1. $\blacksquare$

Ισχυρισμός 18.2 *Κανένα ταίριασμα του M^* δεν παραλείπει δύο ή περισσότερες κορυφές του G'.*

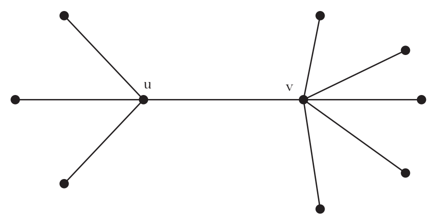
Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω ότι υπάρχει $M_1 \in M^*$ που δεν καλύπτει τις $u, v \in V(G') = S$, με $u \neq v$. Τα u, v, M_1 επιλέγονται έτσι ώστε

$$d_{G'}(u,v) = \min\{d_{G'}(r,w) \mid r, w \in S \text{ και υπάρχει ταίριασμα του } M^* \text{ που δεν τις καλύπτει}\}.$$

Με $d_{G'}(x,y)$ συμβολίζουμε την απόσταση (μήκος συντομότερου μονοπατιού) των κορυφών x, y στο G'.

*Παρατήρηση **2i*** : $d_{G'}(u,v) \geq 2$.

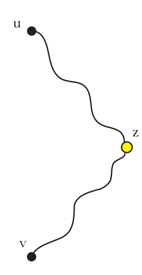
Απόδειξη. Έστω $d_{G'}(u,v) = 1$. Βλ. Σχήμα 18.1



Σχήμα 18.1: Απεικόνιση για την Παρατήρηση **2i**.

Παρατηρούμε ότι καμία από τις ακμές του E' που προσπίπτουν στα u, v δεν ανήκει στο M_1, αφού το M_1 δεν καλύπτει τις u, v. Άρα $M_1 \cup \{\{u,v\}\}$ ταίριασμα. Έχουμε $w_{\{u,v\}} > 0$ και $M_1 \in M^*$, δηλαδή το ταίριασμα M_1 ικανοποιεί με ισότητα την (18.4). ΆΤΟΠΟ, γιατί τότε το ταίριασμα $M_1 \cup \{u,v\}$ την παραβιάζει. □

Άρα $d_{G'}(u,v) \geq 2$. Από τον Ισχυρισμό 18.1 G' συνεκτικό, άρα $\exists z \in S - \{u,v\}$ κορυφή στο συντομότερο μονοπάτι που ενώνει τις v και u στο G'.



Ορίζουμε ως M_i-covered μια κορυφή που καλύπτεται από το ταίριασμα M_i και ως M_i-free μια κορυφή που δεν καλύπτεται από το M_i $(i = 1, 2)$.

Εξ ορισμού του z, $d_{G'}(z,u) < d_{G'}(u,v)$. Άρα η z είναι M_1-covered. Από υπόθεση, $\exists M_2 \in M^*$ τέτοιο ώστε η z είναι M_2-free. Με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι z είναι M_1-covered, καταλήγουμε στο ότι οι u και v είναι M_2-covered.

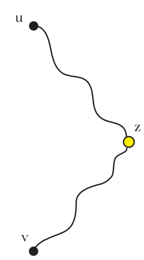
Από τον ορισμό του ταιριάσματος, ο εναγόμενος (induced) βαθμός μιας κορυφής σε ένα ταίριασμα είναι το πολύ 1. Δηλαδή, αν $M \subseteq E$ είναι ταίριασμα, στο γράφημα $H = (V, M)$

$$\deg_H(v) = \begin{cases} 1, & \text{αν } v\ M\text{-covered} \\ 0, & \text{αν } v\ M\text{-free.} \end{cases}$$

Άρα, στο γράφημα $G^* = (S, E^*)$ με $E^* = M_1 \cup M_2$, έχουμε $\deg(u) = \deg(v) = \deg(z) = 1$. Επίσης, οποιαδήποτε άλλη κορυφή θα έχει βαθμό το πολύ δύο. Θεωρούμε τις συνεκτικές συνιστώσες του G^* που περιέχουν τις u, v. Έστω ότι περιέχουν κύκλο. Οι κορυφές u, v δεν ανήκουν στον κύκλο γιατί $\deg(u) = \deg(v) = 1$. Τότε όμως $\exists u' \in V(G^*) : \deg(u') = 3$, αδύνατο. Αφού οι συνεκτικές συνιστώσες δεν περιέχουν κύκλο είναι μονοπάτια και μάλιστα μήκους τουλάχιστον ένα.

*Παρατήρηση **2ii:*** Υπάρχει συνεκτική συνιστώσα P (μονοπάτι του G^*) που περιέχει την u ή/και την v και δεν περιέχει την z.
Απόδειξη.

1. Έστω v, u στο ίδιο μονοπάτι.



   Τότε η z δεν ανήκει σε αυτό γιατί θα ήταν βαθμού 2.

2. Έστω u, v σε διαφορετικά μονοπάτια και z και στα δύο. Τότε z σημείο τομής των μονοπατιών, αδύνατο αφού τα δύο μονοπάτια είναι διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.

□

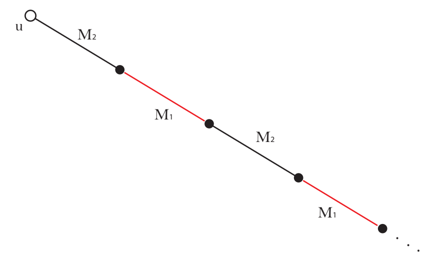
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το μονοπάτι P ξεκινάει από την κορυφή u. Από την κατασκευή του G^*, το P είναι *εναλλασόμενο (alternating)* μονοπάτι, δηλαδή αν e_1, e_2 διαδοχικές ακμές του P, τότε η μία ανήκει στο M_1 και η άλλη στο M_2. Επίσης, το P δεν συνδέεται με το υπόλοιπο G^* αφού αποτελεί συνεκτική του συνιστώσα.

Μπορούμε να ανταλλάξουμε τις ακμές του M_1 που βρίσκονται στο P με τις ακμές του M_2 και αντιστρόφως. Δηλαδή, τα M', M'' αποτελούν ταιριάσματα του G, όπου:

$$M' = (M_1 - (M_1 \cap P)) \cup (M_2 \cap P)$$
$$M'' = (M_2 - (M_2 \cap P)) \cup (M_1 \cap P)$$

*Παρατήρηση **2iii:*** $M', M'' \in M^*$.
Απόδειξη. Αφού M', M'' ταιριάσματα, έχουμε

$$\sum_{e \in M'} w_e \chi_e^{M'} \leq t \text{ και } \sum_{e \in M''} w_e \chi_e^{M''} \leq t. \tag{18.9}$$



Αφού $M_1, M_2 \in M^*$, έχουμε

$$\sum_{e \in M_1} w_e \chi_e^{M_1} = t \text{ και } \sum_{e \in M_2} w_e \chi_e^{M_2} = t. \tag{18.10}$$

Από τις (18.9), (18.10) και την κατασκευή των M', M'', έχουμε:

$$2t = \sum_{e \in M_1} w_e \chi_e^{M_1} + \sum_{e \in M_2} w_e \chi_e^{M_2} = \sum_{e \in M'} w_e \chi_e^{M'} + \sum_{e \in M''} w_e \chi_e^{M''} \leq 2t$$

Άρα, $\sum_{e \in M'} w_e \chi_e^{M'} + \sum_{e \in M''} w_e \chi_e^{M''} = 2t$ και λόγω των (18.9) παίρνουμε

$$\sum_{e \in M'} w_e \chi_e^{M'} = t \text{ δηλαδή } M' \in M^*$$

$$\sum_{e \in M''} w_e \chi_e^{M''} = t \text{ δηλαδή } M'' \in M^*.$$

□

Παρατηρούμε ότι τα u, z είναι M''-free. Όμως, όπως έχουμε ήδη πει,

$$d_{G'}(z, u) < d_{G'}(u, v) = \min\{d(r, w) \mid r, w \in S \text{ και } r, w \text{ } M\text{-free για κάποιο } M \in M^*\}$$

ΆΤΟΠΟ. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Ισχυρισμού 18.2 ∎

Ισχυρισμός 18.3 *$|S|$ περιττός αριθμός.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Για κάθε $v \in S$, υπάρχει ταίριασμα $M_v \in M^*$ τέτοιο ώστε το M_v να αφήνει ακάλυπτη την κορυφή v (από την υπόθεση) και το M_v αφήνει ακάλυπτη μόνο την v (από τον Ισχυρισμό 18.2). Διέγραψε από το M_v τις ακμές που δεν ανήκουν στο E'. Το ταίριασμα $M'_v \subseteq E'$ που προκύπτει ανήκει επίσης στο M^*. Το M'_v είναι τέλειο ταίριασμα του $S \setminus \{v\}$ στο G'. Άρα $|S \setminus \{v\}|$ άρτιος αριθμός, οπότε $|S|$ περιττός αριθμός. ∎

Ισχυρισμός 18.4 *Κάθε ταίριασμα στο M^* περιέχει ακριβώς $(|S|-1)/2$ ακμές από το $E(G') = E'$.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω $M \in M^*$. Διέγραψε από το M τις ακμές που δεν ανήκουν στο E'. Το ταίριασμα M' που προκύπτει ανήκει επίσης στο M^*. Άρα από τον Ισχυρισμό 18.2 το M' παραλείπει το πολύ μία κορυφή του S. Αφού $|S|$ περιττός αριθμός, το M' και κατά συνέπεια και το M περιέχουν ακριβώς $(|S|-1)/2$ ακμές από το E'. ∎

Από τον Ισχυρισμό 18.3 $|S|$ περιττός και από τον Ισχυρισμό 18.4, $\forall x \in M^*$ ισχύει ότι $x\left(\gamma\left(S\right)\right) = \frac{|S|-1}{2}$. Άρα η ανισότητα $x\left(\gamma\left(S\right)\right) \leq \frac{|S|-1}{2}$ ορίζει την ίδια έδρα με την (18.4). Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη της Περίπτωσης 3, άρα και του Θεωρήματος 18.1 συνολικά. ∎

Παρατηρήστε ότι για το σύνολο S που εξέτασε η απόδειξη στην Περίπτωση 3, ισχύει $|S| \geq 3$, αφού $E' \neq \varnothing$. Επομένως αποδείξαμε ότι το πολύτοπο των ταιριασμάτων ορίζεται από τις παρακάτω ανισώσεις:

$$
\begin{aligned}
&x(\delta(v)) \leq 1 && \forall v \in V \\
&x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2} && \forall S \subseteq V, \text{με } |S| \text{ περιττό}, |S| \geq 3 \\
&x_e \geq 0 && \forall e \in E.
\end{aligned}
$$

Το *πολύτοπο των τέλειων ταιριασμάτων* αποτελεί την όψη του $P(G)$ που ορίζεται από τις ανισότητες (18.1) για κάθε $v \in V$. Συγκεντρωτικά, το πολύτοπο αυτό αποτελείται από τα $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&x(\delta(v)) = 1 && \forall v \in V \\
&x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2} && \forall S \subseteq V, \text{με } |S| \text{ περιττό}, |S| \geq 3 \\
&x_e \geq 0 && \forall e \in E.
\end{aligned}
$$

Αναφορές

[1] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1- vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Series B*, 69:125 – 130, 1965.