	Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού	
Διάλεξη 20: 07.01.2015		Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
	Γραφείς: Σάμαρης Μιχάλης & Σ. Κ.	

20.1 Ακέραια Πολύεδρα

Ορισμός 20.1 *Έστω ένα πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P καλείται* ακέραιο *αν $P = P_I$ δηλαδή αν*

$$P = \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n).$$

Το επόμενο θέωρημα παρουσιάζει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των ακέραιων πολυέδρων.

Θεώρημα 20.1 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Το πολύεδρο P είναι ακέραιο, δηλ. $P = P_I$.

(ii) Κάθε μη κενή όψη του P περιέχει ένα ακέραιο διάνυσμα.

(iii) Κάθε ελαχιστική όψη του P περιέχει ένα ακέραιο διάνυσμα.

(iv) υπάρχει βέλτιστη λύση του $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ η οποία είναι ακέραιο διάνυσμα, για κάθε c για το οποίο το βέλτιστο είναι φραγμένο.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω F όψη του πολυέδρου όπου $F = P \cap H$ και H είναι ένα υπερεπίπεδο στήριξης. Θεωρούμε $x \in F$. Επειδή $P = P_I$, από τον Ορισμό 1.4, το x είναι κυρτός συνδυασμός ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων $S \subseteq P \cap \mathbb{Z}^n$. Επειδή $x \in H$, όλα τα σημεία του S πρέπει να ανήκουν στο H άρα και στην F.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Προφανές.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Έστω $\delta = \max\{c^T x \mid x \in P\} < +\infty$, τότε $F = \{x \in P \mid c^T x = \delta\}$ είναι όψη του P. Θεωρούμε ελαχιστική όψη F' του πολυέδρου F. Η F' θα είναι ελαχιστική όψη του P η οποία λόγω της (iii) θα περιέχει ένα ακέραιο διάνυσμα.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y \in P \setminus P_I$. Τότε πρέπει να υπάρχει ανισότητα $\alpha^T x \leq \beta$ η οποία είναι έγκυρη για το P_I αλλά παραβιάζεται από το y, δηλ. $\alpha^T y > \beta$. Επομένως $\max\{\alpha^T x \mid x \in P_I\} \leq \beta$ ενώ $\max\{\alpha^T x \mid x \in P\} \geq \alpha^T y > \beta$. Άρα η (iv) παραβιάζεται για $c = \alpha$. ∎

Το επόμενο θέωρημα δίνει μια ακόμα ικανή και αναγκαία συνθήκη εκτός των (ii)-(iv) για να είναι ένα πολύτοπο P ακέραιο.

Θεώρημα 20.2 (Hoffman 1974) *Έστω ρητό πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P είναι ακέραιο ανν το $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιος αριθμός για κάθε $w \in \mathbb{Z}^n$ για το οποίο το βέλτιστο είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Προφανής γιατί αφού το P είναι ακέραιο, τα διανύσματα των κορυφών είναι ακέραια. Θα υπάρχει κορυφή του P που είναι βέλτιστη λύση, άρα θα είναι και η βέλτιστη τιμή ακέραια.

($\Leftarrow$) Έστω $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ μια κορυφή του πολυτόπου P. Από το Θεώρημα 3.2 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ρητό διάνυσμα $\overline{w}$ τέτοιο ώστε το v είναι η μοναδική λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{\overline{w}^T x \mid x \in P\}$.

Πολλαπλασιάζοντας το $\overline{w}$ με το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των παρονομαστών των συντεταγμένων του προκύπτει το $w \in \mathbb{Z}^n$ για το οποίο ισχύει ότι το v είναι η μοναδική λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{w^T x \mid x \in P\}$. Έπεται ότι $w^T v > w^T u, \forall u \in P$ με $u \neq v$. Από την υπόθεση $w^T v \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $w' = (w_1 + 1, w_2, \ldots, w_n)^T$. Πολλαπλασιάζοντας, αν χρειάζεται, το w με κατάλληλο θετικό ακέραιο θα ισχύει ότι $w^T v > w^T u + u_1 - v_1 \Leftrightarrow w^T v + v_1 > w^T u + u_1 \Leftrightarrow (w')^T v > (w')^T u$. Επομένως $v = \arg\max\{(w')^T x \mid x \in P\}$ και αφού $(w')^T v = w^T v + v_1$ και $w^T v$ ακέραιοι τότε και $v_1 \in \mathbb{Z}$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $v_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε $i \in [n]$ και τελικά καταλήγουμε ότι $v \in \mathbb{Z}^n$. ∎

Το θεώρημα επεκτάθηκε σε πολύεδρα από τους Edmonds και Giles.

Θεώρημα 20.3 ([2]) *Έστω ρητό πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P είναι ακέραιο ανν για κάθε ακέραιο διάνυσμα w η βέλτιστη τιμή του $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιος αριθμός αν είναι πεπερασμένη.*

20.2 Ολική δυϊκή ακεραιότητα

Ο επόμενος ορισμός σε συνδυασμό με το Θεώρημα 20.4 εισάγει μια νέα συνθήκη για την ακεραιότητα ενός πολυέδρου.

Ορισμός 20.2 ([2]) *Ένα ρητό σύστημα $Ax \leq b$ καλείται* ολικά δυϊκό ακέραιο (totally dual integral, TDI) *αν στην εξίσωση $\max\{w^T x \mid Ax \leq b\} = \min\{y^T b \mid y^T A = w^T, y \geq 0\}$ το min πετυχαίνεται από ακέραιο διάνυσμα y, για κάθε ακέραιο w για το οποίο το βέλτιστο ορίζεται και είναι φραγμένο.*

Θεώρημα 20.4 *Έστω $Ax \leq b$ ένα TDI σύστημα τέτοιο ώστε το $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ να είναι ρητό πολύεδρο και b ακέραιο διάνυσμα. Τότε το P είναι ακέραιο πολύεδρο.*

Απόδειξη. Αφού το b είναι ακέραιο διάνυσμα, τότε το $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιο για κάθε ακέραιο διάνυσμα w. Από το Θεώρημα 20.3 το P είναι ακέραιο. ∎

Σημειώνουμε ότι TDI είναι ιδιότητα του συστήματος $Ax \leq b$ και όχι του πολυτόπου $\{x \mid Ax \leq b\}$. Μπορεί να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 20.1 ([3]) *Για οποιοδήποτε ρητό σύστημα $Ax \leq b$, $\exists t \in \mathbb{Z}_{>0}$ τέτοιο ώστε το σύστημα $(\frac{1}{t})Ax \leq (\frac{1}{t})b$ να είναι TDI.*

Από το επόμενο θεώρημα προκύπτει ότι η αναγνώριση του αν ένα σύστημα είναι TDI είναι δύσβατο υπολογιστικό πρόβλημα. Ομοίως και το αν ένα πολύεδρο που μας έχει δοθεί σε H-περιγραφή είναι ακέραιο. Ότι τα προβλήματα αυτά ανήκουν στο coNP είναι μια εύκολη άσκηση. Αν το σύστημα $Ax \leq b$ δεν είναι TDI υπάρχει ακέραιο διάνυσμα c για το οποίο το βέλτιστο του $\min\{y^T b \mid y \geq 0, y^T A = c\}$ δεν είναι ακέραιο διάνυσμα. Πρέπει όμως να βρούμε ένα τέτοιο c που το μέγεθος του να φράσσεται πολυωνυμικά από το μέγεθος του A.

Θεώρημα 20.5 ([1]) *Έστω A ένας 0-1 πίνακας με ακριβώς δύο 1 σε κάθε στήλη. Τα προβλήματα απόφασης για το αν το σύστημα $Ax \geq \mathbf{1}$, $x \geq \mathbf{0}$*

(1) ορίζει ακέραιο πολύεδρο, και

(2) είναι TDI

είναι coNP-complete.

Αναφορές

[1] Guoli Ding, Li Feng, and Wenan Zang. The complexity of recognizing linear systems with certain integrality properties. *Math. Program.*, 114(2):321–334, 2008.

[2] J. Edmonds and R. Giles. A min-max relation for submodular functions on graphs. In P. L. Hammer, E. L. Johnson, B. H. Korte, and G. L. Nemhauser, editors, *Studies in Integer Programming*, volume 1 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 185–204. North-Holland, 1977.

[3] F. R. Giles and W. R. Pulleyblank. Total dual integrality and integer polyhedra. *Linear Algebra and its Applications*, 25:191–196, 1979.