

22.1 Βασικοί υπολογισμοί πάνω σε πολύεδρα

Στην παρούσα διάλεξη θα μελετήσουμε αλγορίθμους για την επίλυση κάποιων βασικών υπολογιστικών προβλημάτων όπου η είσοδος είναι η περιγραφή ενός πολυέδρου. Τα προβλήματα αυτά αφορούν έννοιες που έχουμε ήδη μελετήσει, όπως για παράδειγμα τον υπολογισμό της διάστασης ενός πολυέδρου.

Για να διαφοροποιήσουμε την αναπαράσταση σε bits ενός πολυέδρου P από το μαθηματικό αντικείμενο πολύεδρο, θα χρησιμοποιούμε για την πρώτη το σύμβολο $\langle P \rangle$. Η προφανής αναπαράσταση είναι μέσω ενός πίνακα $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ και ενός διανύσματος $b \in \mathbb{Q}^m$, έτσι ώστε $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Σε αυτή την περίπτωση $\text{size}(\langle P \rangle) = \Theta(\text{size}(A) + \text{size}(b))$ όπου ο τελεστής size που δίνει το μήκος της δυαδικής κωδικοποίησης ορίστηκε στη Διάλεξη 19. Αυτή είναι η λεγόμενη H -περιγραφή του πολυέδρου που το αναπαριστά ως τομή ημιχώρων.

Υπάρχουν όμως αλγόριθμοι, όπως π.χ. ο ελλειψοειδής, που είναι σε θέση να λύνουν γραμμικά προγράμματα εάν το πολύεδρο δίνεται έμμεσα μέσω ενός μαντείου διαχωρισμού. *Μαντείο διαχωρισμού (separation oracle)* καλείται ένας αλγόριθμος ο οποίος με είσοδο ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να διακρίνει αν $x \in P$ ή $x \notin P$ και στη δεύτερη περίπτωση να βρει ένα υπερεπίπεδο που διαχωρίζει το x από το P . Σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται στην είσοδο η πλήρης H -περιγραφή του P αλλά αρκεί το n και ένα άνω φράγμα στην ποσότητα

$$\max\{\max_{i,j} \{\text{size } A_{ij}\}, \max_i b_i\}.$$

Δεν χρειάζεται ο αλγόριθμος να γνωρίζει a priori τον πίνακα A και το διάνυσμα b . Λέμε ότι η πολυπλοκότητα έδρας (*facet complexity*) του P είναι το πολύ φ αν υπάρχει σύστημα ανισώσεων με ρητούς συντελεστές του οποίου το σύνολο λύσεων είναι το P τέτοιο ώστε το μήκος της κωδικοποίησης της κάθε ανίσωσης είναι το πολύ φ . Αν $P = \mathbb{R}^n$, απαιτούμε $\varphi \geq n + 1$. Η πολυπλοκότητα κορυφής (*vertex complexity*) του P είναι το πολύ ν αν υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα V και E ρητών διανυσμάτων τέτοια ώστε $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ και κάθε ένα από τα διανύσματα στα V και E έχει μήκος κωδικοποίησης το πολύ ν . Αν $P = \emptyset$ απαιτούμε $\nu \geq n$.

Είναι γνωστό ότι $\nu \leq 4n^2\varphi$ και $\varphi \leq 4n^2\nu$ [3, Θεώρημα 10.2].

Εάν διαθέτουμε μαντείο διαχωρισμού που τρέχει σε χρόνο $O(\text{poly}(n + \varphi))$, τότε το γραμμικό πρόγραμμα μπορεί επίσης να επιλυθεί σε χρόνο $O(\text{poly}(n + \varphi))$. Η σχετική θεωρία αναπτύσσεται εξαντλητικά στο [1].

Δεδομένων των παραπάνω, θα αναφερόμαστε στην είσοδο των αλγορίθμων ως $\langle P \rangle$ χωρίς άλλες λεπτομέρειες. Το μέγεθος της εισόδου θα είναι $n + \varphi$. Από την περιγραφή του αλγορίθμου θα είναι σαφές εάν ο αλγόριθμος χρειάζεται πρόσβαση στην πλήρη H -περιγραφή του P ή αν αρκεί ένα μαντείο διαχωρισμού. Όσον αφορά τον χρόνο εκτέλεσης θα είναι εν γένει πολυωνυμικός στο μέγεθος της εισόδου και η βασική υπορουτίνα θα είναι συνήθως η επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος ή ισοδύναμα η εύρεση

ενός σημείου που να ανήκει σε ένα δεδομένο πολύεδρο Q . Είναι γνωστό ότι το τελευταίο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $\text{poly}(\text{size}(\langle Q \rangle))$.

Στην περίπτωση που το πολύεδρο εισόδου δίνεται σε V -περιγραφή, όπως στο Πρόβλημα 22.4.1, θα το αναφέρουμε ρητά. Δεν είναι γνωστή εν γένει αποδοτική μέθοδος για μετατροπή μιας δεδομένης V -περιγραφής σε ισοδύναμη H -περιγραφή.

22.2 Εύρεση κορυφής

Πρόβλημα 22.2.1 ΚΟΡΥΦΗ ΠΟΛΥΤΟΠΟΥ

Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n .

Έξοδος: Κορυφή του P .

Βρες διαδοχικά

$$\begin{aligned} c_1 &= \max\{x_1 \mid x \in P\} \\ c_2 &= \max\{x_2 \mid x \in P, x_1 = c_1\} \\ &\vdots \\ c_n &= \max\{x_n \mid x \in P, x_1 = c_1, \dots, x_{n-1} = c_{n-1}\} \end{aligned}$$

Τότε $(c_1, \dots, c_n)^T$ είναι κορυφή του P . Πράγματι, έστω c δεν είναι κορυφή. Τότε υπάρχουν y και z στο P τ. ώ. $c = \lambda y + (1 - \lambda)z$ και $\lambda \in (0, 1)$. Έστω $j \in [n]$ ο ελάχιστος δείκτης για τον οποίο $y_j \neq z_j$. Ο j είναι καλά ορισμένος, ειδάλως $c = y = z$. Τότε

$$\max\{y_j, z_j\} > c_j = \max\{x_j \mid x \in P, x_1 = c_1, \dots, x_{j-1} = c_{j-1}\}.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Ο αλγόριθμος που δώσαμε λύνει n διαδοχικά γραμμικά προγράμματα, άρα τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο. ♣

Πρόβλημα 22.2.2 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΟΡΥΦΗ ΠΟΛΥΤΟΠΟΥ

Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n , διάνυσμα $c \in \mathbb{Q}^n$.

Έξοδος: Κορυφή v του P τ. ώ. $v = \arg \max\{c^T x \mid x \in P\}$.

Αν θέλουμε να βρούμε μια κορυφή που είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ μπορούμε να βρούμε πρώτα τη μέγιστη τιμή γ και μετά να βρούμε μια κορυφή του πολυτόπου $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \gamma\}$. Εναλλακτικά, για κατάλληλα μικρό ε το πρόβλημα

$$\max\{\bar{c}^T x \mid x \in P\}$$

όπου $\bar{c} = c + (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)^T$ έχει μοναδική βέλτιστη λύση σε κορυφή x_0 του P η οποία επίσης μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $c^T x$ επί του P . ♣

22.3 Εύρεση αφινικού καλύμματος και διάστασης

Πρόβλημα 22.3.1 ΑΦΙΝΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ΠΟΛΥΤΟΠΟΥ

Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n .

Έξοδος: Αφινικά ανεξάρτητες κορυφές v_0, v_1, \dots, v_k του P και γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις $c_1^T x = \gamma_1, \dots, c_{n-k}^T x = \gamma_{n-k}$ οι οποίες είναι έγκυρες για το P .

Προφανώς για την έξοδο του αλγορίθμου θα ισχύει ότι

$$\text{aff}(P) = \text{aff}(\{v_0, v_1, \dots, v_k\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x = \gamma_i, i \in [n - k]\}.$$

Επομένως $\dim(P) = k$.

Ο αλγόριθμος ξεκινάει βρίσκοντας μία κορυφή v_0 του P , τρέχοντας δηλαδή μια υπορουτίνα για το Πρόβλημα 22.2.1.

Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε βρει αφινικά ανεξάρτητες κορυφές v_0, \dots, v_i ($i \geq 0$) του P και γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις $c_1^T x = \gamma_1, \dots, c_j^T x = \gamma_j$ ($j \geq 0$) οι οποίες είναι έγκυρες για το P . Αμέσως μετά την εύρεση της v_0 ισχύει $i = j = 0$.

Αν $i + j = n$ ο αλγόριθμος τερματίζει.

Αν $i + j < n$ προχωράμε ως εξής.

Ισχύει ότι

$$\text{aff}(\{v_0, v_1, \dots, v_i\}) = v_0 + L$$

όπου L μονοσήμαντα ορισμένος γραμμικός υπόχωρος με $\dim(L) = i$. Θεωρούμε $c \perp L$. Ισχύει ότι για κάθε $x \in \text{aff}(\{v_0, v_1, \dots, v_i\})$ $c^T x = c^T v_0$. Επειδή $\dim(L^\perp) = n - i > j$ μπορούμε να διαλέξουμε το c τέτοιο ώστε να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα c_1, \dots, c_j . Υπάρχει πάντα ένα τέτοιο c σε μία βάση του L^\perp . Αλγεβρικά, το σύνολο L^\perp είναι το null-space ενός πίνακα A του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα $v_1 - v_0, \dots, v_i - v_0$, δηλ.

$$L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Μια βάση για τον υπόχωρο L^\perp μπορεί να υπολογιστεί μέσω απαλοιφής Gauss, βλ. π.χ. [2, Κεφ. 7].

Βρίσκουμε κορυφή v' που είναι λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ και κορυφή v'' που είναι λύση του γραμμικού προγράμματος $\min\{c^T x \mid x \in P\}$. Αν $c^T v' = c^T v''$, θέτουμε $c_{j+1} := c$ και $\gamma_{j+1} := c^T v'$. Αν $c^T v' > c^T v''$, τουλάχιστον ένα από τα v', v'' δεν ανήκει στο $\text{aff}(\{v_0, v_1, \dots, v_i\})$ και μπορούμε να το διαλέξουμε ως v_{i+1} . ♣

Ο αλγόριθμος μας έδωσε και μια κατασκευαστική απόδειξη για την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 22.1 Αν $P \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολύτοπο και $\dim(P) = k$ το πολύτοπο περιέχει $k + 1$ αφινικά ανεξάρτητες κορυφές.

Μη κατασκευαστικά η Πρόταση 22.1 αποδεικνύεται ως εξής. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Αφού $S \subseteq \text{conv}(S)$, $\dim(S) \leq \dim(\text{conv}(S))$. Επίσης κάθε $x \in \text{conv}(S)$ είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του S άρα $\text{conv}(S) \subseteq \text{aff}(S)$. Άρα $\dim(\text{conv}(S)) \leq \dim(S)$. Αποδείξαμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 22.2 Για οποιοδήποτε σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\dim(\text{conv}(S)) = \dim(S)$.

Έστω P πολύτοπο στο \mathbb{R}^n . Από το Πρόσχημα 10.3 $P = \text{conv}(S)$ όπου S το σύνολο των κορυφών του P . Από την Πρόταση 22.2 $\dim(P) = \dim(S)$. Επομένως το πολύτοπο P περιέχει ακριβώς $\dim(P) + 1$ αφινικά ανεξάρτητες κορυφές.

22.4 Επέκταση σε πολύεδρα

Οι παραπάνω αλγόριθμοι μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που η είσοδος δεν είναι απαραίτητα πολύτοπο.

22.4.1 Αφινικό κάλυμμα και διάσταση πολυέδρου

Μελετάμε πρώτα τον υπολογισμό της διάστασης πολυέδρου που δίνεται σε V -περιγραφή. Θα δώσουμε 3 ισοδύναμους χαρακτηρισμούς.

Πρόβλημα 22.4.1 ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΣΕ V -ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Είσοδος: V πίνακας $n \times (m + 1)$ και R πίνακας $n \times t$.

Έξοδος: Διάσταση του πολυέδρου P που ορίζεται ως

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = V\lambda + R\mu, \mathbf{1}^T \lambda = 1, \lambda \geq \mathbf{0}, \mu \geq \mathbf{0}\}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$A_P = \begin{bmatrix} V & R \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}. \quad (22.1)$$

Αν v_0, v_1, \dots, v_m και y_1, \dots, y_t είναι οι στήλες των V και R αντίστοιχα, έχουμε ότι $P = \text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_m) + \text{cone}(y_1, \dots, y_t)$.

Θα μας διευκολύνει να μετατοπίσουμε το πολύεδρο ώστε να έχει σαν κορυφή την αρχή των αξόνων $\vec{0}$. Ορίζουμε P' έτσι ώστε $P' + \{v_0\} = P$. Πιο απλά γράφουμε $P' = P - v_0$. Προφανώς $\dim(P) = \dim(P')$. Ο $n \times (m + 1)$ πίνακας V' έχει σαν στήλες τα ακραία σημεία του P' . Ορίζουμε τον πίνακα $A'_P := A_{P'}$. Δηλαδή:

$$A'_P = \begin{bmatrix} V' & R \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}.$$

Αν $P' = \text{conv}(0, x_1, \dots, x_m) + \text{cone}(y_1, \dots, y_t)$ τότε

$$A'_P = \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | & | & \dots & | \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m & y_1 & \dots & y_t \\ | & | & | & \dots & | & | & \dots & | \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Με τη μετατόπιση του πολυέδρου πετύχαμε τα σημεία y_1, \dots, y_t να ανήκουν στο P' .

Ισχυρισμός 22.1 Το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανυσμάτων στο σύνολο $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in P' \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ισούται με k όπου $k = \text{rank}(A'_P)$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν προσθέσουμε την πρώτη στήλη του A'_P σε κάθε μία από τις t τελευταίες στήλες του προκύπτει ο πίνακας

$$B_P = \begin{bmatrix} V' & R \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T \end{bmatrix}.$$

Ισχύει $\text{rank}(B_P) = \text{rank}(A'_P) = k$. Όλες οι στήλες του πίνακα B_P αντιστοιχούν σε στοιχεία του S (γιατί;). Άρα το S περιέχει τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Από την άλλη το S είναι υποσύνολο του κώνου που παράγεται από τις στήλες του A'_P και ο κώνος αυτός έχει διάσταση k . Επομένως το S δεν μπορεί να περιέχει παραπάνω από k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. ■

Για $\rho_1, \dots, \rho_t \in \mathbb{R}$,

$$\rho_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + \rho_t \begin{bmatrix} x_t \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

αν και μόνο αν

$$\rho_1 x_1 + \dots + \rho_t x_t = 0 \text{ και } \sum_{i=1}^t \rho_i = 0.$$

Επομένως το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο P' είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο S . Άρα το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο P' είναι ίσο με k και τελικά

$$\dim(P') = k - 1 = \text{rank}(A'_P) - 1 = \text{rank}(B_P) - 1. \quad (22.2)$$

Για ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων X συμβολίζουμε με $\text{rank}(X)$ το rank του πίνακα που έχει σαν στήλες τα στοιχεία του X . Έστω $d = \text{rank}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t)$. Τότε υπάρχουν $d + 1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο σύνολο $\{0, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t\}$. Επομένως $\dim(P') \geq d$.

Το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο σύνολο $\{0, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t\}$ είναι ίσο με $\text{rank}(B_P)$. Επομένως $d + 1 \leq \text{rank}(B_P) \stackrel{(22.2)}{=} \dim(P') + 1$. Προκύπτει ότι $d = \dim(P')$, άρα

$$\dim(P') = \text{rank}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t). \quad (22.3)$$

Αν αφαιρέσουμε την πρώτη στήλη του πίνακα A_P από τις στήλες $2, \dots, t + 1$ προκύπτει ο πίνακας

$$\Gamma_P = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & | & \dots & | & | & \dots & | \\ v_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m & y_1 & \dots & y_t \\ | & | & | & & | & | & & | \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

Έχουμε ότι $\text{rank}(A_P) = \text{rank}(\Gamma_P) = d + 1$. Συνοψίζοντας

$$\dim(P) = \text{rank}(A_P) - 1. \quad (22.4)$$

Οι εξισώσεις (22.2),(22.3),(22.4) δίνουν τρεις ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της διάστασης του P .



Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον υπολογισμό της διάστασης όταν δεν είναι διαθέσιμη η V -περιγραφή.

Πρόβλημα 22.4.2 ΑΦΙΝΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

Είσοδος: Περιγραφή πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n .

Έξοδος: Αφινικά ανεξάρτητα σημεία v_0, v_1, \dots, v_k του P και γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις $c_1^T x = \gamma_1, \dots, c_{n-k}^T x = \gamma_{n-k}$ έτσι ώστε

$$\text{aff}(P) = \text{aff}(\{v_0, v_1, \dots, v_k\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x = \gamma_i, i \in [n-k]\}.$$

Ο αλγόριθμος καλεί μια υπορουτίνα για το Πρόβλημα 22.3.1 με είσοδο το πολύτοπο

$$Q = P \cap \{x \mid -2^{5n^2\phi} \leq x_i \leq 2^{5n^2\phi}, i \in [n]\}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\dim(Q) = \dim(P)$ [3, Παρ. 10.2b]. Η ιδέα της απόδειξης είναι απλή. Αν $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$, η κάθε συντεταγμένη των x_i, y_j είναι το πολύ $2^{4n^2\phi}$ κατ' απόλυτο τιμή. Αν $Q' = \text{conv}\{x_1, \dots, x_r, x_1 + y_1, \dots, x_1 + y_t\}$ τότε

$$Q' \subseteq Q \subseteq P.$$

Επίσης $\dim(Q') = \dim(P)$. Ο λόγος είναι ότι ο πίνακας $A_{Q'}$ (βλ. (22.1)) για το πολύεδρο Q' προκύπτει από τον αντίστοιχο πίνακα A_P για το πολύεδρο P αν προσθέσουμε την πρώτη στήλη στις t τελευταίες. Αρα οι δύο πίνακες έχουν το ίδιο rank και με βάση την (22.4) τα Q' και P έχουν την ίδια διάσταση.

Προκύπτει εύκολα ότι $\text{aff}(Q) = \text{aff}(P)$ (γιατί;).



22.4.2 Εύρεση διανύσματος σε ελαχιστική όψη πολυέδρου

Χρειάζομαστε πρώτα κάποια βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 22.1 Δίνεται μη κενό πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το πολύεδρο $P \cap (\text{lin}(P))^\perp$ είναι μυτερό.

Απόδειξη. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Είναι γνωστό ότι $\text{lin}(P) = \{x \mid Ax = 0\}$. Αν το P είναι μυτερό, τελειώσαμε.

Αν το P δεν είναι μυτερό, μέσω απαλοιφής Gauss μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε μια βάση $\{u_1, \dots, u_k\}$, $k \geq 1$, του $\text{lin}(P)$ όπου $k = n - \text{rank}(A)$ και τα u_1, \dots, u_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Προφανώς, τα u_1, \dots, u_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα από τις γραμμές του A . Επομένως

$$Q := P \cap (\text{lin}(P))^\perp = P \cap \{x \mid u_i^T x = 0, i \in [k]\}. \quad (22.5)$$

Το Q είναι της μορφής $\{x \mid Dx \leq d\}$ όπου $\text{rank}(D) = n$. Από το Θεώρημα 5.1, το Q είναι μυτερό.

Ένα παράπλευρο κέρδος ήταν ότι εμπλουτίσαμε τις γνώσεις μας για την αποσύνθεση

$$P = Q + \text{lin}(P)$$

την ύπαρξη της οποίας γνωρίζαμε από το Θεώρημα 10.3. ■

Θυμίζουμε ότι αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολυεδρικός κώνος, με C^* συμβολίζουμε τον δυϊκό του (βλ. Διάλεξη 10). Ισχύει ότι $C^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C, y^T x \leq 0\}$.

Λήμμα 22.2 Δεδομένου ενός μη κενού πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $c \in (\text{rec}(P))^*$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 8.4 γνωρίζουμε ότι το δοσμένο γραμμικό πρόγραμμα είναι μη φραγμένο αν και μόνο αν το δυϊκό του $\min\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$ είναι ανέφικτο.

Από το Λήμμα Farkas για ισότητες (Πόρισμα 7.1), το σύστημα $A^T y = c, y \geq 0$ δεν έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχει x τέτοιο ώστε $Ax \geq 0$ και $c^T x < 0$. Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη x έτσι ώστε

$$Ax \leq 0 \text{ και } c^T x > 0.$$

Παρατηρήστε ότι $Ax \leq 0 \Leftrightarrow x \in \text{rec}(P)$.

Αποδείξαμε ότι το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ είναι μη φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $x \in \text{rec}(P)$ τέτοιο ώστε $c^T x > 0$.

Άρα το γραμμικό πρόγραμμα είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $x \in \text{rec}(P)$, $c^T x \leq 0$, δηλ. αν και μόνο αν $c \in (\text{rec}(P))^*$. ■

Συμβολίζουμε με $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ την κλειστή μπάλα ακτίνας r με κέντρο το x . Για $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ένα σημείο $x \in S$ ανήκει στο εσωτερικό του S αν υπάρχει μια μπάλα με κέντρο x και ακτίνα $r > 0$ που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο S . Συμβολίζουμε με $\text{int}(S)$ το σύνολο των σημείων που ανήκουν στο εσωτερικό του S . Αν $\dim(S) < n$, δεν υπάρχει κανένα εσωτερικό σημείο, πράγμα αφύσικο για τους δικούς μας σκοπούς. Ορίζουμε το σχετικό εσωτερικό (*relative interior*) του συνόλου S , συμβολικά $\text{ri}(S)$, ως εξής:

$$\text{ri}(S) = \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap \text{aff}(S) \subseteq S\}. \quad (22.6)$$

Παρατηρήστε ότι αν το S είναι μονοσύνολο, $\text{ri}(S) = S$. Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 22.3 Αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολυεδρικός κώνος, $\text{ri}(C^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C \setminus \{0\}, y^T x < 0\}$.

Πρόβλημα 22.4.3 ΕΥΡΕΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΤΟ $(\text{rec}(P))^*$.

Είσοδος: Περιγραφή μυτερού πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n .

Έξοδος: Σημείο $y \in \text{ri}((\text{rec}(P))^*)$.

Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ το μυτερό πολύεδρο. Τότε $\text{rank}(A) = n$. Αφού $\text{rec}(P) = \{x \mid Ax \leq 0\}$ και $(\text{rec}(P))^* = \{y \mid \forall x \in \text{rec}(P), y^T x \leq 0\}$, όλες οι γραμμές a_1, \dots, a_m του πίνακα A ανήκουν στον κώνο $K := (\text{rec}(P))^*$. Θα δείξουμε κατασκευαστικά ότι αφού ο K περιέχει n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα έχει μη κενό σχετικό εσωτερικό. Προφανώς $\text{cone}(\{a_1, \dots, a_m\}) \subseteq K$. Επιπλέον, από το Λήμμα 9.1 $\text{cone}(\{a_1, \dots, a_m\}) = K$.

Επειδή $\text{rank}(A) = n$, για κάθε $x \in \text{rec}(P)$, $x \neq 0$, έχουμε ότι $Ax \leq 0$, δηλ. υπάρχει $i(x) \in [m]$, τ. ώ. $a_{i(x)}^T x < 0$. Ορίζουμε $y^T = \lambda^T A$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^m$, όπου $\lambda_i > 0$, για κάθε $i \in [m]$. Για κάθε $x \in \text{rec}(P)$, $x \neq 0$,

$$y^T x = \lambda_{i(x)} a_{i(x)}^T x + \sum_{j \neq i(x)} \lambda_j a_j^T x < 0.$$

Επομένως $y \in \text{ri}(K)$. Παρατηρήστε ότι δεν είναι απαραίτητο το $|\text{supp}(\lambda)|$ να ισούται με m . Μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ τ. ώ. τα a_{i_1}, \dots, a_{i_n} να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να θέσουμε $\lambda_{i_j} > 0$ μόνο για κάθε $i_j \in I$. ♣

Λήμμα 22.3 Έστω μη κενό πολύεδρο Q . Δίνεται $c \in \text{ri}((\text{rec}(Q))^*)$ και ορίζουμε $\delta = \max\{c^T x \mid x \in Q\}$. Τότε το πολύεδρο $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in Q, c^T x = \delta\}$ είναι πολύτοπο.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι από το Λήμμα 22.2, το δ και άρα το F είναι καλά ορισμένα. Έστω $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Ισχύει ότι

$$\text{rec}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ c^T \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq 0\} = \{x \in \text{rec}(Q) : c^T x = 0\}.$$

Επειδή όμως $c \in \text{ri}((\text{rec}(Q))^*)$ το τελευταίο σύνολο περιέχει μόνο το $\vec{0}$. Άρα το F είναι πολύτοπο. ■

Παρατηρήστε ότι στο επόμενο πρόβλημα η έξοδος θα είναι κορυφή αν το πολύεδρο εισόδου είναι μυτερό.

Πρόβλημα 22.4.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΣΕ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΗ ΟΨΗ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

Είσοδος: Περιγραφή πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n .

Έξοδος: Διάνυσμα που ανήκει σε ελαχιστική όψη του P .

Αν το P δεν είναι μυτερό, αντικαθιστούμε το P με το $Q := P \cap (\text{lin}(P))^\perp$ το οποίο γνωρίζουμε από το Λήμμα 22.1 ότι είναι μυτερό. Αν το P είναι μυτερό, θέτουμε $Q := P$.

Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα 22.4.3 μας δίνει διάνυσμα $c \in \text{ri}((\text{rec}(Q))^*)$. Συμβολίζουμε με F την όψη του Q που περιέχει τις λύσεις του γραμμικού προγράμματος $\max\{c^T x \mid x \in P\}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 22.3 το F είναι πολύτοπο. Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα 22.2.1 υπολογίζει μια κορυφή v του F . (Προφανώς το v είναι και κορυφή του Q). Επιστρέφουμε στην έξοδο το v .

Αποδεικνύουμε την ορθότητα του αλγορίθμου. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Εάν $Q = P$, ο αλγόριθμος είναι προφανώς ορθός αφού επιστρέφει κορυφή του P . Αν $Q = P \cap (\text{lin}(P))^\perp$ παρατηρήστε την περιγραφή του Q στη σχέση (22.5). Οποιαδήποτε κορυφή του Q ικανοποιεί με ισότητα n γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις εκ των οποίων ακριβώς $\text{rank}(A)$ πρέπει να προέρχονται από το σύστημα $Ax \leq b$. Από το Πόρισμα 16.1, όλες οι κορυφές του Q ανήκουν σε ελαχιστικές όψεις του P . Το διάνυσμα v που επιστρέφει ο αλγόριθμος ανήκει λοιπόν σε ελαχιστική όψη του P . ♣

22.5 Εύρεση εσωτερικού σημείου πολυέδρου

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης σημείου στο σχετικό εσωτερικό ενός πολυέδρου. Σύμφωνα με τη σχέση (22.6) προκύπτει εύκολα ότι ένα σημείο $y \in \text{ri}(P)$ αν και μόνο αν το

y δεν περιέχεται σε μια γνήσια όψη του P . Το λήμμα που ακολουθεί δίνει μερικούς ακόμα ισοδύναμους χαρακτηρισμούς.

Λήμμα 22.4 Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα πολύτοπο διάστασης k ($k \leq n$). Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα $y \in P$.

(i) $y \in \text{ri}(P)$.

(ii) Το y δεν περιέχεται σε μια γνήσια όψη του P .

(iii) Αν η ανισότητα $a^T x \leq a_0$ είναι έγκυρη για το P και $a^T y = a_0$ τότε $a^T x = a_0$ για κάθε $x \in P$.

(iv) Το y μπορεί να παρασταθεί ως $y = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$ όπου x_0, \dots, x_k αφινικά ανεξάρτητα σημεία του P , για κάθε i $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$.

(v) Το y μπορεί να παρασταθεί ως $y = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x_i$ όπου x_0, \dots, x_k αφινικά ανεξάρτητα σημεία του P .

Πρόβλημα 22.5.1 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

Είσοδος: Περιγραφή πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο \mathbb{R}^n .

Έξοδος: Σημείο $v \in \text{ri}(P)$.

Τρέχουμε τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα 22.4.2. Παίρνουμε $k+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία v_0, \dots, v_k του πολύτοπου Q όπου $k = \dim(P)$. Με βάση το Λήμμα 22.4(v), το σημείο

$$v = \frac{1}{k+1}(v_0 + \dots + v_k)$$

ανήκει στο $\text{ri}(Q)$, άρα και $v \in \text{ri}(P)$. ♣

Απομένει να αποδείξουμε το λήμμα.

Απόδειξη του Λήμματος 22.4. Αν $k = 0$ δηλαδή το $P = \{y\}$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^n$ παίρνουμε ότι $\text{ri}(P) = \{y\}$ και το Λήμμα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε στο εξής ότι $k \geq 1$.

Έστω ότι ισχύει το (ii) και η ανισότητα $a^T x \leq a_0$ είναι έγκυρη για το P και $a^T y = a_0$. Αν η ανισότητα δεν είναι υποδηλούμενη ισότητα για το P τότε το y ανήκει σε γνήσια όψη του P . Δείξαμε (ii) \Rightarrow (iii). Αντιστρόφως, αν ισχύει το (iii) καμία ανισότητα δεν μπορεί να ορίσει γνήσια όψη που περιέχει το y . Επομένως (ii) \Leftrightarrow (iii).

Το (v) έχει τετριμμένα ως συνέπεια το (iv). Αν ισχύει το (iv), τότε δεδομένου ότι η $a^T x \leq a_0$ είναι έγκυρη για το P

$$a_0 = a^T y = \sum_{i=0}^k \lambda_i a^T x_i \leq \sum_{i=0}^k \lambda_i a_0 = a_0.$$

Αυτό μπορεί να ισχύει μόνο αν $a^T x_i = a_0$ για όλα τα i . Κατά συνέπεια $\text{aff}(x_0, \dots, x_k) \subseteq \{x \mid a^T x = a_0\}$. Όμως από τον Ισχυρισμό 11.1 $\text{aff}(x_0, \dots, x_k) = \text{aff}(P)$. Επομένως έπεται το (iii).

Θεωρούμε την ελαχιστική αναπαράσταση $P = \{x \mid A^=x = b^=, A^+x \leq b^+\}$. Έστω τώρα ότι ισχύει το (iii). Συμπεραίνουμε ότι $A^+y < b^+$. Συνεπώς για κάθε $u \in L := N(A^=) = \{x \mid A^=x = 0\}$ έχουμε

ότι $y + \varepsilon u \in P$, αν $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό. Από το Θεώρημα 11.1, $n - \text{rank}(A^\square) = k$. Θεωρούμε k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $u_1, \dots, u_k \in L$. Υπάρχουν $k + 1$ τιμές $\varepsilon > 0$, έ. ώ. $y + \varepsilon u \in P$ για $u = u_1, \dots, u_k, -(u_1 + \dots + u_k)$. Διαλέγουμε $\varepsilon' > 0$ τη μικρότερη από αυτές. Ισχύει ότι

$$y = \frac{1}{k+1} [(y - \varepsilon'(u_1 + \dots + u_k)) + (y + \varepsilon'u_1) + \dots + (y + \varepsilon'u_k)].$$

Αφήνουμε σαν άσκηση ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $u_1, \dots, u_k, -(u_1 + \dots + u_k)$, είναι αφινικά ανεξάρτητα. Δείξαμε ότι υπάρχει μια αναπαράσταση της μορφής που απαιτεί η (v), άρα και η (iv). Συνεπώς ισχύει και η ισοδυναμία (v) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (iii).

Έστω ότι το y περιέχεται σε γνήσια όψη του P . Τότε ικανοποιεί με ισότητα τουλάχιστον μία από τις ανισώσεις $\alpha^T x \leq \beta$ του συστήματος $A^+ x \leq b^+$. Επίσης το α πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τις γραμμές του πίνακα A^\square . Ειδικότερα αν $\alpha^T = \lambda^T A^\square$, για κάθε $x \in P$, $\alpha^T x = \lambda^T b^\square$ και η $\alpha^T x \leq \beta$ είναι υποδηλούμενη ισότητα. Για τον πίνακα

$$D = \begin{bmatrix} A^\square \\ \alpha^T \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $\dim(N(D)) = \dim(N(A^\square)) - 1 = k - 1$. Επομένως υπάρχει $u \in N(A^\square) \setminus N(D)$ για το οποίο $A^\square u = 0$ αλλά $Du \neq 0$. Για οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$, ένα από τα σημεία $y \pm \varepsilon u$ δεν ανήκει στο P . Επομένως $y \notin \text{ri}(P)$.

Αν το $y \in P$ δεν περιέχεται σε γνήσια όψη του P έχουμε ήδη αποδείξει παραπάνω ότι για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής $y + \varepsilon u$ το οποίο ανήκει στο $\text{aff}(P)$ πρέπει να ανήκει στο P . Άρα $y \in \text{ri}(P)$. Αποδείξαμε και την ισοδυναμία (i) \Leftrightarrow (ii) και η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Αναφορές

- [1] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1988.
- [2] P. N. Klein. *Coding the matrix: Linear algebra through applications to computer science*. Newtonian Press, 2013.
- [3] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley and Sons, 1986.