1 Αποδείξεις Μηδενικής Γνώσης

Μία ***απόδειξη γνώσης (proof of knowledge)*** είναι ένα πρωτόκολλο που επιτρέπει στη μία πλευρά μίας επικοινωνίας να πείσει την άλλη για την εγκυρότητα μιας πρότασης. Σε μια ***απόδειξη μηδενικής γνώσης (zero-knowledge proof)***, αυτό επιτυγχάνεται χωρίς την φανέρωση κάποιας πληροφορίας εκτός από την πιστότητα της απόδειξης. Θα εξετάσουμε διάφορα παραδείγματα αποδείξεων μηδενικής γνώσης πριν δώσουμε τον τυπικό ορισμό. Πρώτα εξετάζουμε το γενικό πλαίσιο.

Έχουμε δυο πλευρές, τον ***prover*** $\mathcal{P}$ και τον ***verifier (επαληθευτή)*** $\mathcal{V}$. Ο $\mathcal{P}$ πρέπει να πείσει τον $\mathcal{V}$ πως έχει κάποια γνώση σχετικά με μια δήλωση x χωρίς να αναφέρει ξεκάθαρα τι γνωρίζει. Ονομάζουμε τη γνώση αυτή ***witness (μάρτυρα)*** w. Και οι δύο πλευρές γνωρίζουν ένα κατηγόρημα R που θα επιβεβαιώσει ότι το w είναι ένας έγκυρος μάρτυρας για το x. Γενικά,

- Το κατηγόρημα R υποθέτουμε ότι είναι υπολογίσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο: δεδομένου ενός w για μια πρόταση x, θα μπορούσαμε να ελέγξουμε αποτελεσματικά πως $R(x, w) = 1$.
- Ο prover $\mathcal{P}$ έχει τα R, x, και w τέτοια ώστε $R(x, w) = 1$. Θέλει να αποδείξει την κατοχή του w πραγματοποιώντας μια απόδειξη γνώσης π.
- Ο verifier $\mathcal{V}$ έχει τα R, x, και π.

Για να δείξουμε πως το παραπάνω πρωτόκολλο είναι χρήσιμο σε κρυπτογραφικές εφαρμογές, μπορούμε να κάνουμε τις εξής παραδοχές.

- Δεδομένου του R, είναι δύσκολο να βρούμε το αντίστοιχο w έτσι ώστε $R(x, w) = 1$.
- Ο prover $\mathcal{P}$ είναι απρόθυμος να αποκαλύψει το w; αλλιώς η απόδειξη είναι τετριμμένη.
- Ο verifier $\mathcal{V}$ μπορεί να επιβεβαιώσει αποτελεσματικά την εγκυρότητα του π.

1.1 Παραδείγματα Αποδείξεων Μηδενικής Γνώσης

Δίνουμε τα εξής χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα (Πού είναι ο Waldo)**.** Στο παιχνίδι *Πού είναι ο Waldo*, υπάρχει ένα μεγάλο ταμπλό που απεικονίζει μια σκηνή με πολλούς χαρακτήρες που μοιάζουν με τον "Waldo". Στόχος του παιχνιδιού είναι να βρούμε τον Waldo.

Υποθέτουμε ότι η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν αυτό το παιχνίδι. Η Αλίκη υποστηρίζει ότι έχει βρει που βρίσκεται ο Waldo αλλά δεν θέλει να το πει στο Βασίλη.

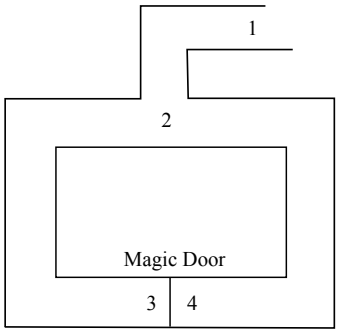
Η υπόθεση ότι ο Waldo υπάρχει είναι η πρόταση, οι συντεταγμένες (x, y) της θέσης του Waldo είναι ο μάρτυρας, και η διαδικασία λήψης των (x, y) και η επιβεβαίωση ότι ο Waldo είναι όντως εκεί σχετίζεται με το κατηγόρημα R.

Μια πιθανή λύση και όχι μοναδική είναι η Αλίκη να καλύψει το ταμπλό με ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί και μια μικρή τρύπα στο κέντρο. Η Αλίκη θα τοποθετήσει το χαρτί στο ταμπλό έτσι ώστε να εμφανιστεί μόνο ο Waldo. Η λύση θα είναι αποτελεσματική αν το χαρτί έχει τουλάχιστον διπλάσιες διαστάσεις από το ταμπλό.

Παράδειγμα (Η Μαγική Πόρτα)**.** Το επόμενο παιχνίδι που θα μας απασχολήσει είναι το εξής.

1. Στο βάθος μιας σπηλιάς υπάρχει μια μαγική πόρτα που μπορεί να ανοίξει χρησιμοποιώντας ένα μυστικό κωδικό. Ο Βασίλης προσπαθεί να πείσει την Αλίκη ότι γνωρίζει τον κωδικό και συνεπώς πως μπορεί να ανοίξει την μαγική πόρτα.

1. Η Αλίκη κάθεται στο σημείο 1.
2. Ο Βασίλης μπαίνει στην σπηλιά και κάθεται στα σημεία 3 ή 4.
3. Όταν ο Βασίλης εξαφανίζεται, η Αλίκη προχωρά στο σημείο 2.



Σχήμα 1: Η πόρτα μεταξύ των σημείων 3 και 4 μπορεί να ανοιχθεί χρησιμοποιώντας ένα μυστικό κωδικό.

4. Η Αλίκη φωνάζει τον Βασίλη, ρωτώντας τον να βγει είτε από το αριστερό μονοπάτι είτε από το δεξί.
5. Ο Βασίλης δρα σύμφωνα με αυτό χρησιμοποιώντας τον μυστικό κωδικό αν είναι αναγκαίο.
6. Η Αλίκη και ο Βασίλης επαναλαμβάνουν τα βήματα 1-5 k φορές.

Αυτό το παιχνίδι μας δείχνει μια απόδειξη γνώσης μέσω μιας πιθανοτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα, μετά από k επαναλήψεις, ο Βασίλης μπορεί να πείσει την Αλίκη πως ξέρει τον μυστικό κωδικό με πιθανότητα $1 - 1/2^k$.

Στη συνέχει παρουσιάζουμε δύο πρακτικά παραδείγματα των αποδείξεων γνώσης.

Παράδειγμα. Επιστρέφουμε στην κλάση NP: το σύνολο όλων των προβλημάτων, των οποίων μια υποψήφια λύση μπορεί να επαληθευτεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Ονομάζουμε το σύνολο των συμβολοακολουθιών ***γλώσσα (language)***. Έστω x κάποια διατύπωση του προβλήματος και έστω R να είναι ένα κατηγόρημα πολυωνυμικού χρόνου. Τότε μια γλώσσα L είναι στο NP αν

$$\mathrm{L} = \{x \colon R(x, w) = 1 \text{ for some } w\}\,.$$

Θεωρούμε τη γλώσσα CLIQUE $= \{\langle G, k\rangle \colon G \text{ is a graph with a clique of size } k\}$. Οι μάρτυρες είναι τα σύνολα των k κόμβων που διαμορφώνουν μια κλίκα και το πολυωνυμικού χρόνου κατηγόρημα R που επαληθεύει ότι οι κόμβοι συνιστούν μια κλίκα.

Μια άλλη γλώσσα είναι η SAT $= \{\langle \Phi\rangle \colon \Phi \text{ is a satisfiable boolean formula}\}$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο πως ένα σύνολο μεταβλητών που εμπεριέχονται στο $\Phi \in SAT$ ικανοποιούν το Φ. Αποδείξεις μηδενικής γνώσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν πως ένα συγκεκριμένο στοιχείο ανήκει στη γλώσσα CLIQUE ή στη γλώσσα SAT. Αυτό θα το επεκτείνουμε στην ενότητα 1.5.

Παράδειγμα. Μια βασική εφαρμογή των αποδείξεων μηδενικής γνώσης βρίσκεται στα σχήματα ταυτοπροσωπίας. Στους παραδοσιακούς μηχανισμούς μυστικών κωδικών, ένας αντίπαλος που κρυφακούει την συνομιλία μπορεί να αντλήσει αρκετή πληροφορία για να αποκτήσει μη εγκεκριμένη πρόσβαση σε ένα σύστημα. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα υποθέτουμε ότι το σύστημα περιλαμβάνει ένα δημόσιο κατάλογο που αναθέτει μια πρόταση ενός θεωρήματος σε κάθε χρήστη. Υποθέτοντας ότι μόνο ένα συγκεκριμένος χρήστης γνωρίζει ένα μάρτυρα για την απόδειξη, μια απόδειξη μηδενικής γνώσης μπορεί να πείσει το σύστημα για την αυθεντικότητά της. Αυτό είναι άμεσα συνδεδεμένο με το πρωτόκολλο του Schnorr, το οποίο θα εξετάσουμε στην ενότητα 1.3.

1.2 Τρεις βασικές ιδιότητες

Η διαμόρφωση του αυστηρού ορισμού μιας απόδειξης γνώσης είναι ένα πολύ λεπτό ζήτημα. Ο επόμενος ορισμός προέκυψε μετά από δεκαπέντε χρόνια δουλειάς και θεωρείται πνευματική κατάκτηση.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $\langle \mathcal{P}, \mathcal{V} \rangle$ ένα ζεύγος αλληλεπιδρόντων προγραμμάτων. Ορίζουμε ως $\text{out}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{P},\mathcal{V}}(x, w, z)$ να είναι η έξοδος του $\mathcal{P}$ όταν οι $\mathcal{P}$ και $\mathcal{V}$ εκτελούνται με τη δημόσια είσοδο x και τις ιδιωτικές εισόδους w και z (ο $\mathcal{P}$ καθορίζει το w και ο $\mathcal{V}$ διαλέγει το z). Το $\text{out}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{P},\mathcal{V}}$ ορίζεται όμοια για το $\mathcal{V}$. Το PPT διαδραστικό πρωτόκολλο $\langle \mathcal{P}, \mathcal{V} \rangle$ είναι μια ***απόδειξη μηδενικής γνώσης (zero-knowledge proof)*** για μια γλώσσα $\text{L} \in NP$ με λάθος γνώσης κ και απόσταση μηδενικής γνώσης ε αν ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

- **Πληρότητα (Completeness)**: Αν $x \in \text{L}$ και $R(x, w) = 1$ για κάποιο μάρτυρα w, τότε $\text{out}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{P},\mathcal{V}}(x, w, z) = 1$ για κάθε συμβολοακολουθία z με συντριπτική πιθανότητα ν.

- **Ορθότητα (Soundness)**: Για κάθε πολυωνυμικού χρόνου πρόγραμμα $\mathcal{P}^*$ ορίζουμε

$$\pi_{x,w,z} = \text{Prob}[\text{out}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{P}^*,\mathcal{V}}(x, w, z) = 1].$$

  Ένα πρωτόκολλο $\langle \mathcal{P}, \mathcal{V} \rangle$ ικανοποιεί την ορθότητα αν για κάθε $\mathcal{P}^*$ υπάρχει πρόγραμμα , μια πιθανοτική Turing machine (PTM), που ονομάζεται ***knowledge extractor (εξαγωγέας γνώσης)*** με την ακόλουθη ιδιότητα. Έστω ότι

$$\tilde{\pi}_{x,w,z} = \text{Prob}[K(x, w, z) = w' : R(x, w') = 1].$$

  Τότε ισχύει ότι αν το $\pi_{x,w,z}$ είναι μη αμελητέο, τότε και το $\tilde{\pi}_{x,w,z}$ είναι μη αμελητέο.

- **(Στατιστική) Μηδενική Γνώση ((Statistical) Zero-Knowledge)** (SZK): Για κάθε πολυωνυμικού χρόνου πρόγραμμα $\mathcal{V}^*$, υπάρχει ένα PTM πρόγραμμα S, που ονομάζεται ***simulator (προσομοιωτής)***, τέτοιο ώστε για κάθε x, w με $R(x, w) = 1$, οι τυχαίες μεταβλητές $S(x, z)$ και $\text{out}^{\mathcal{V}^*}_{\mathcal{P},\mathcal{V}^*}(x, w, z)$ είναι στατιστικά αδιαχώριστες για όλες τις συμβολοακολουθίες z:

$$\forall \mathcal{A} \left| \text{Prob}[\mathcal{A}(S(x, z)) = 1] - \text{Prob}[\mathcal{A}(\text{out}^{\mathcal{V}^*}_{\mathcal{P},\mathcal{V}^*}(x, w, z)) = 1] \right| < \varepsilon.$$

Η πληρότητα είναι όμοια με την σωστή λειτουργία του πρωτοκόλλου. Υποθέτοντας ότι ο prover και ο verifier ακολουθούν το πρωτόκολλο πιστά, η πληρότητα εγγυάται πως το πρωτόκολλο θα επιτύχει με ικανοποιητικά μεγάλη πιθανότητα.

Η διαισθητική ερμηνεία της ορθότητας διασφαλίζει πως το πρωτόκολλο θα αποτύχει όταν εκτελείται από έναν prover που χρησιμοποιεί έναν ψεύτικο μάρτυρα και από έναν τίμιο verifier. Αυτή είναι μια ελάχιστη απαίτηση. Ο τυπικός ορισμός που δώσαμε απαιτεί κάτι ισχυρότερο. Εγγυάται πως ένας εξαγωγέας γνώσης K μπορεί να εξάγει έναν έγκυρο μάρτυρα από κάθε πειστικό prover. Αυτό συνεπάγεται πως ο K πρέπει να έχει παραπάνω ισχύ από τον verifier. Συγκεκριμένα ο K έχει πρόσβαση στο πρόγραμμα του prover σε αντίθεση με τον verifier (ο verifier είναι ένα πρόγραμμα που αλληλεπιδρά με τον prover, ενώ ο εξαγωγέας γνώσης είναι ένα πρόγραμμα που προέρχεται από το πρόγραμμα του prover).

Σημειώνεται ότι ο ορισμός της ορθότητας μας είναι πιο περιοριστικός (γι αυτό και απλούστερος) από προηγούμενους ορισμούς στη βιβλιογραφία, καθώς αποτυγχάνει σε πρωτόκολλα τα οποία επιτρέπουν μια σημαντική πιθανότητα ατιμίας από τον prover (π.χ. $1/2$). Στις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις τέτοια πρωτόκολλα μπορούν να κατασκευαστούν για να ικανοποιήσουν τον ορισμό μας μέσω παράλληλης ή ακολουθιακής επανάληψης.

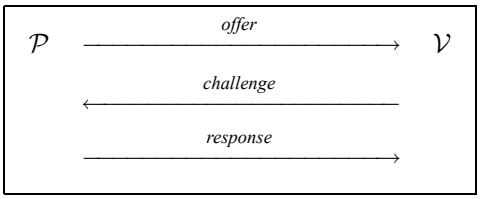
Διαισθητικά, η στατιστική μηδενική γνώση είναι η ιδιότητα που απαγορεύει την εξαγωγή κάποιας γνώσης ενός verifier από έναν τίμιο prover. Αν ο verifier μπορεί να μάθει κάτι θα πρέπει να υπάρχει ένας αλγόριθμος που προσομοιώνει το πρωτόκολλο χωρίς πρόσβαση σε έναν μάρτυρα. Επιπλέον η εκτέλεση του αλγορίθμου είναι αδιαχώριστη από αυτή του πρωτοκόλλου.

Μια ασθενέστερη εκδοχή της μηδενικής γνώσης είναι η ***μηδενική γνώση τίμιου verifier (honest-verifier zero-knowledge)*** (HVZK). Σε αυτήν υποθέτουμε πως ο verifier εκτελεί το πρωτόκολλο τίμια, αλλά κάνει επιπλέον υπολογισμούς. Ειδικότερα, αυτό απεικονίζεται στον ορισμό μας περιορίζοντας τον V^* να προσομοιώνει τον verifier V και στο τέλος, να επιστρέφει ολόκληρη την επικοινωνία. Το να επιτύχουμε την ασθενέστερη

ιδιότητα ονομάζεται μερικές φορές μηδενική γνώση *ημι-τίμιου (semi-honest)* verifier. Αν και αυτό χαλαρώνει τις προδιαγραφές του SZK, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιτύχουμε αποδείξεις μηδενικής γνώσεις σε καταστάσεις, χρησιμοποιώντας γενικές μεθόδους. Η απόδειξη μηδενικής γνώσης τίμιου verifier ανάγεται στην δημιουργία συνομιλιών πρωτοκόλλων αποδοχής τα οποία είναι αδιαχώριστα από τις συνομιλίες του πρωτοκόλλου μεταξύ τίμιου prover-verifier, χωρίς τη γνώση μάρτυρα.

1.3 Το πρωτόκολλο του Schnorr

Ένα κλασικό πρωτόκολλο τριών κινήσεων που ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας απόδειξης μηδενικής γνώσης είναι το πρωτόκολλο του Schnorr, γνωστό και ως Σ-πρωτόκολλο.



Το πρωτόκολλο του Schnorr λειτουργεί πάνω σε μία κυκλική ομάδα $G = \langle g \rangle$ τάξης m. Από την προηγούμενη συζήτησή μας, οι $\mathcal{P}$ και $\mathcal{V}$ έχουν γεννήτορες ομάδας $\langle p, m, g \rangle$. Ο prover $\mathcal{P}$ διαλέγει ένα witness $w \in \mathbb{Z}_m$ τέτοιον ώστε $h = g^w \bmod p$ για κάποιο $h \in \langle g \rangle$. Ο verifier $\mathcal{V}$ δέχεται p, m, g και h, και πρέπει να επιβεβαιώσει ότι $w = \log_g h$.

Αυτό μπορεί να περιγραφεί και σαν γλώσσα. Ορίζουμε το

$$\text{DLOG} = \{\langle \langle p, m, g \rangle, h \rangle : h = g^w \bmod p \text{ for some } w \in \mathbb{Z}_m\}$$

(το DLOG σημαίνει "discrete logarithm".) Υπό του πρωτοκόλλου του Schnorr, υπάρχει ένας αποδοτικός τρόπος να αποδείξουμε πως οποιαδήποτε πρόταση $\langle \langle p, m, g \rangle, h \rangle$ ανήκει στο DLOG χωρίς να φανερώσουμε το $w = \log_g h$.

1. Ο $\mathcal{P}$ διαλέγει $t \xleftarrow{\text{r}} \mathbb{Z}_m$ και στέλνει το $y = g^t$ στον $\mathcal{V}$.
2. Ο $\mathcal{V}$ διαλέγει μια πρόκληση $c \xleftarrow{\text{r}} \mathbb{Z}_m$ και την στέλνει το c στον $\mathcal{P}$.
3. Ο $\mathcal{P}$ υπολογίζει το $s = t + wc \bmod m$ και στέλνει το s στον $\mathcal{V}$. Ο $\mathcal{V}$ ελέγχει και αποδέχεται αν και μόνο αν $g^s = yh^c$.

Αν ο prover και ο verifier είναι τίμιοι τότε ισχύει ότι

$$g^s = g^{t+wc} = g^t (g^w)^c = yh^c.$$

Το πρωτόκολλο του Schnorr ικανοποιεί συνεπώς την πληρότητα και μπορεί πάντα να πείσει έναν τίμιο verifier.

Το πρωτόκολλο ικανοποιεί μια ειδική περίπτωση της ορθότητας. Πριν ορίσουμε τον αλγόριθμο εξαγωγής γνώσης, ας δούμε πώς μπορούμε να αποκτήσουμε πληροφορίες από έναν πειστικό prover $\mathcal{P}$.

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο αποδεκτές συνομιλίες από τον $\mathcal{P}$ με τιμές πρόκλησης $c \neq c'$: $\langle y, c, s \rangle$ και $\langle y, c', s' \rangle$. Αν τα s και s' είναι έγκυρα, τότε $g^s = yh^c$ and $g^{s'} = yh^{c'}$. Λύνοντας ως προς y τις δύο εξισώσεις υπολογίζεται ο διακριτός λογάριθμος.

$$\begin{aligned} y = g^s h^{-c} &= g^{s'} h^{-c'} \\ h^{c-c'} &= g^{s-s'} \\ h &= g^{(s-s')/(c-c')} \end{aligned}$$

Ενώ το παραπάνω δεν μας δικαιολογεί πώς μπορούμε να "αποσυμπιλήσουμε" τον $\mathcal{P}$ για να αποκτήσουμε την δεύτερη συζήτηση, μας δείχνει πώς να εξάγουμε έναν μάρτυρα ως $(s-s')/(c-c') \bmod m$. Υποθέτουμε πως έχουμε πρόσβαση στον $\mathcal{P}$ κατά τρόπο τέτοιον ώστε να μπορούμε να σταματήσουμε σε οποιοδήποτε σημείο και να επιστρέψουμε σε ένα προηγούμενο βήμα της εκτέλεσης προσομοιώνοντας ξανά την εκτέλεση.

Είναι χρήσιμο να δούμε το πιθανοτικό πρόγραμμα $\mathcal{P}$ σε δύο φάσεις:

1. Ο $\mathcal{P}(\text{first}, \langle p, m, g\rangle, h)$ επιστρέφει $\langle y, \text{aux}\rangle$
2. Ο $\mathcal{P}(\text{second}, \langle p, m, g\rangle, c, \text{aux})$ επιστρέφει $\langle s\rangle$

όπου aux αναπαριστά την εσωτερική πληροφορία που χρησιμοποιεί ο $\mathcal{P}$, χωρίς να την δημοσιεύει. Χρησιμοποιώντας αυτό, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν εξαγωγέα γνώσης K με την ακόλουθη δομή:

1. Έστω $\rho_1 \xleftarrow{\text{r}} \{0,1\}^{\lambda_1}$ οι ρίψεις νομισμάτων που απαιτούνται από το πρώτο βήμα του $\mathcal{P}$. Φιξάρουμε την τυχαιότητα του $\mathcal{P}$ με ρ_1 και προσομοιώνουμε $\mathcal{P}(\text{first}, \langle p, m, g\rangle, h)$ για να λάβουμε y.
2. Διαλέγουμε $c \xleftarrow{\text{r}} \mathbb{Z}_m$.
3. Έστω $\rho_2 \xleftarrow{\text{r}} \{0,1\}^{\lambda_2}$ οι ρίψεις νομισμάτων που απαιτούνται από το δεύτερο βήμα του $\mathcal{P}$. Προσομοιώνουμε τον $\mathcal{P}(\text{second}, \langle p, m, g\rangle, c, \text{aux})$ με φιξαρισμένη τυχαιότητα ρ_2 για να πάρουμε το s.
4. Διαλέγουμε $c' \xleftarrow{\text{r}} \mathbb{Z}_m$ και $\rho_2' \xleftarrow{\text{r}} \{0,1\}^{\lambda_2}$. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 για να πάρουμε το s'; Επιστρέφουμε τα $\langle y, c, s\rangle$ και $\langle y, c', s'\rangle$.

Αν ο εξαγωγέας γνώσης αποκτήσει δύο αποδεκτές συνομιλίες, μπορούμε να αναδημιουργήσουμε τον μάρτυρα όπως περιγράψαμε. Παραμένει να δείξουμε ότι ο εξαγωγέας γνώσης δημιουργεί δύο αποδεκτές συνομιλίες με σημαντική πιθανότητα. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.3.1 (Splitting Lemma)**.** *Έστω X και Y πεπερασμένα σύνολα. Έστω $A \subseteq X \times Y$ το σύνολο των **καλών στοιχείων (good elements)** του $X \times Y$. Υποθέτουμε πως υπάρχει ένα κάτω φράγμα στον αριθμό των καλών αντικειμένων τέτοιο ώστε*

$$|A| \geq \alpha |X \times Y| .$$

*Ορίζουμε το σύνολο των **πολύ καλών στοιχείων (super-good elements)** A' να είναι το υποσύνολο του A τέτοιο ώστε*

$$A' = \left\{(x,y) \in A \colon k_x > \frac{\alpha}{2} |Y|\right\}$$

όπου k_x είναι ο αριθμός των $y \in Y$ τέτοιο ώστε $(x,y) \in A$ για κάποιο φιξαρισμένο x. Τότε

$$|A'| \geq \frac{\alpha}{2} |X \times Y| .$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με εις άτοπον απαγωγή. Θεωρούμε πως $|A'| / |X \times Y| < \alpha/2$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$|A| = |A'| + |A \setminus A'| < \frac{\alpha}{2} |X \times Y| + |A \setminus A'| . \tag{1}$$

Για κάθε $(x,y) \in A \setminus A'$, έχουμε ότι $k_x \leq (\alpha/2)|Y|$. Αφού υπάρχουν μόνο $|X|$ διαφορετικά x, ισχύει ότι $|A \setminus A'| \leq (\alpha/2)|X||Y|$. Από την (1) έχουμε ότι

$$|A| < \frac{\alpha}{2} |X \times Y| + \frac{\alpha}{2} |X| |Y| .$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το κάτω φράγμα $|A|$, συνεπώς καταλήγουμε στο $|A'| \geq \alpha/2 |X \times Y|$.

■

Επιστρέφουμε στην αποτελεσματική κατασκευή του εξαγωγέα γνώσης K. Ορίζουμε

$$X \times Y = \left\{ (\rho_1, (c, \rho_2)) \colon \rho_1 \in \{0,1\}^{\lambda_1} \,,\ (c, \rho_2) \in \mathbb{Z}_m \times \{0,1\}^{\lambda_2} \right\}.$$

Αν ο prover είναι πειστικός με πιθανότητα τουλάχιστον α, ορίζουμε το A ναι είναι το σύνολο από $(\rho_1, (c, \rho_2))$ τα οποία αποδέχεται ο verifier. Τότε ισχύει ότι $|A| \geq \alpha \, |X \times Y|$. Αυτό σημαίνει πως μπορούμε να φιξάρουμε μια καλή ακολουθία $(\rho_1, (c, \rho_2))$ στο A τέτοια ώστε η συζήτηση που καταλήγουμε με τον K να είναι αποδεκτή. Από το Λήμμα 1.3.1, ο K βρίσκει μια πολύ καλή ακολουθία στα βήματα 1 εώς 3 με πιθανότητα $\alpha/2$.

Υποθέτουμε οτι ο εξαγωγέας γνώσης βρίσκει μια πολύ καλή ακολουθία. Τότε υπάρχει ξανά πιθανότητα $\alpha/2$ ο K να βρει μια άλλη πολύ καλή ακολουθία στο βήμα 4. Η πιθανότητα και οι δύο συζητήσεις να είναι αποδεκτές είναι $\alpha^2/4$. Επιπλέον, υπάρχει μόνο $1/m$ πιθανότητα ο K να παράγει την ίδια τιμή πρόκλησης $c = c'$.

Θεωρεούμε το εξής: Έστω S το γεγονός ότι ο εξαγωγέας γνώσης είναι πειστικός. Έστω C το γεγονός $c \neq c'$ στην δεύτερη επιλογή, D το γεγονός η ακολουθία $(\rho_1, (c, \rho_2))$ να είναι πολύ καλή και E το γεγονός η ακολουθία $(\rho_1, (c', \rho_2'))$ να είναι καλή.

Συνεπάγεται ότι

$$\text{Prob}[S] \geq \text{Prob}[C \wedge D \wedge E] \geq \text{Prob}[D \wedge E] - \text{Prob}[\neg C] = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{m}.$$

Αυτό αποδεικνύει πως το πρωτόκολο του Schnorr ικανοποιεί την ιδιότητα της ορθότητας.

Το πρωτόκολλό τριών κινήσεων που είδαμε ικανοποιεί την μηδενική γνώση για τον τίμιο verifier. Για να το δείξουμε αυτο παρουσιάζουμε εναν αλγόριθμο ικανό να προσομοιώσει μια αποδεκτή συζήτηση μεταξύ ενός τίμιου prover και ενός (ημί) τίμιου verifier. Υποθέτουμε πως όταν έχει δοθεί η δημόσια πληροφορία του κατηγορήματος $\langle\langle p, m, g\rangle, h\rangle$, τότε ο προσομοιωτής S διαλέγει τυχαια c και s από το $\mathbb{Z}_m$ και επιστρέφει $\langle g^s h^{-c}, c, s\rangle$. Θυμίζουμε ότι η έξοδος για το τίμιο μοντέλο είναι $\langle g^t, c, t + wc \bmod m\rangle$ όπου $t, c \xleftarrow{\text{r}} \mathbb{Z}_m$. Μπορούμε έυκολα να επαληθεύσουμε ότι οι δύο πιθανοτικές κατανομές είναι όμοιες, συνεπώς η HVZK ισχύει.

Πώς πετυχαίνουμε περισσότερα από την HVZK. Ενώ η HVZK είναι σχετικά μια αδύναμη ιδιότητα, είναι χρήσιμη στην επέκταση των πρωτοκόλλων για την ικανοποίηση της SZK. Υπάρχουν δυο γενικοί τρόποι που χρησιμοποιούν δύο είδη σχημάτων δέσμευσης, από τα οποία και τα δύο βασίζονται στην απαραίτηση σημασία της ανεξάρτητης επιλογής του y από το c.

Στην πρώτη μέθοδο, ο verifier είναι ο πρώτος που θα στείλει μήνυμα. Πριν λάβει το y, ο $\mathcal{V}$ διαλέγει το c και υπολογίζει το $(c', \sigma) \leftarrow \text{Commit}(c)$. Τότε ο $\mathcal{V}$ στέλνει c' στον prover. Όταν ο $\mathcal{P}$ στείλει y, τότε ο verifier επιστρέφει το (c, σ) για να ανοιχτεί η δέσμευση. Αν $\text{Verify}(c, c', \sigma) = 0$, ο prover σταματά το πρωτόκολλο. Αλλιώς το πρωτόκολλο ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την πρόκληση c.

Το σχήμα δέσμευσης ικανοποιεί την ιδιότητα binding, οπότε ο $\mathcal{V}$ δεν μπορεί να αλλάξει το c. Γι' αυτό η στατιστική μηδενική γνώση ισχύει. Η ιδιότητα hiding ικανοποιείται από το σχήμα δέσμευσης, οπότε ο $\mathcal{P}$ δεν μπορεί να αντλήσει καμία πληροφορία για το t c και η ορθότητα δεν παραβιάζεται. Ένας προσομοιωτής για την ιδιότητα της μηδενικής γνώσης πρέπει να μπορεί να εξάγει το c από το c'. Αυτό ονομάζεται ***εξαγωγική (extractable)*** ιδιότητα για μια δέσμευση.

Στη δεύτερη μέθοδο ο prover είναι ξανά ο πρώτος που θα μιλήσει. Αφού υπολογίσει το y, ο $\mathcal{P}$ υπολογίζει το $(y', \sigma) \leftarrow \text{Commit}(y)$ και στέλενι το y' στον $\mathcal{V}$. Όταν ο $\mathcal{V}$ επιστρέψει το c, τότε ο $\mathcal{P}$ στέλνει το (y, σ, s) για να ανοιχτεί η δέσμευση. Αν $\text{Verify}(y, y', \sigma) = 0$, τότε ο verifier σταματά το πρωτόκολλο.

Αφού το σχημα δέσμευσης ικανοποιεί την ιδιότητα hiding, το y' δεν περιέχει καμία χρήσιμη πληροφορία για το y. Για το λόγο αυτό ο $\mathcal{V}$ αναγκάζεται να διαλέξει το c ανεξάρτητα από το y όπως είναι επιθυμητό. Αυτό το σχήμα ικανοποιεί την ιδιότητα της μηδενικής γνώσης.

Σημειώνουμε ότι η ορθότητα δεν παραβιάζεται υπό αυτού του σχήματος γιατί η ιδιότητα binding αποτρέπει τον $\mathcal{P}$ να ανοίξει το y με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στην περίπτωση αυτή, ο προσομοιωτής μπορεί να προσπεράσει την ιδιότητα binding της δέσμευσης. Αυτό σημαίνει πως αν ο προσομοιωτής έχει δεσμευτεί

για ένα αυθαίρετο y^*, αφού έχει λάβει την πρόκληση c, μπορεί να διαλέξει $y = g^s h^{-c}$. Δεσμεύσεις που επιτρέπουν τέτοια παραβίαση ονομάζονται ***διφορούμενες (equivocal)***.

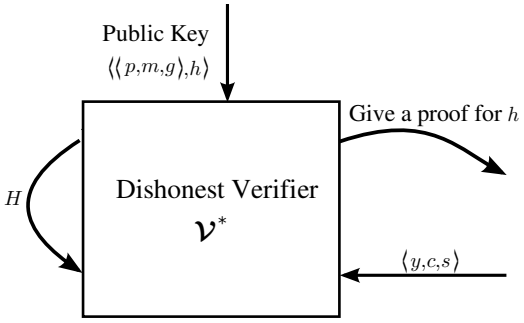
Παρατηρούμε ότι το πρώτο σχημα προσέθεσε μια νέα κίνηση στο πρωτόκολλο, ενώ το δεύτερο διατήρησε τη δομή των τριών κινήσεων. Για αυτόν το λόγο προτιμάται συνήθως το δεύτερο σχήμα. Όμως η παραπάνω συζήτηση ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στο σχεδιασμό ενός σχήματος δέσμευσης που είτε είναι διφορούμενο ή επιτρέπει την εξαγωγική ιδιότητα του προσομοιωτή.

1.4 Μη Διαδραστικές Αποδείξεις Μηδενικής Γνώσης

Τώρα εισάγουμε μια μη διαδραστική έκδοση του πρωτοκόλλου του Schnorr, βασισμένοι στο γνωστό και ως ***Fiat-Shamir Heuristic***.

Για να φτιάξουμε μια μη διαδραστική απόδειξη χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση κατακερματισμού $H\colon \{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ τέτοια ώστε η συζήτηση $\langle y, c, s\rangle = \langle g^t, H(g^t), t + H(g^t)w \bmod m\rangle$. Αυτό υποχρεώνει το c να επιλέγεται μετά το y, εξαρτόμενο άμεσα απο τις ιδιότητες της συνάρτησης κατακερματισμού.

Για να δείξουμε ότι ισχύει η SZK, υποθέτουμε πως το H είναι ένα τυχαίο μαντείο που το ελέγχει ο προσομοιωτής. Στο μοντέλο τυχαίου μαντείου, ένας μη τίμιος verifier $\mathcal{V}^*$ μπορεί να κάνει ερωτήσεις στο τυχαιο μαντείο. Στο Σχήμα 2 φαίνεται πώς ο $\mathcal{V}^*$ αλληλεπιδρά με το H.



Σχήμα 2: Η προσομοίωση ενός μη τίμιου verifier $\mathcal{V}^*$ στο Μοντέλο Τυχαίου Μαντείου.

Όταν ο verifier ρωτήσει για την απόδειξη του $h = g^w$, τότε ο προσμοιωτής επιλέγει τυχαία τα c και s για να υπολογίσει τα $y = g^s h^{-c}$. Θέτει το (y, c) στο *History* και επιστρέφει $\langle y, c, s\rangle$. Ο μη τίμιος verifier δεν μπορεί να διαχωρίσει έναν τίμιο prover απο έναν εξομοιωτή εκτός αν $(y, c') \in History$ με $c \neq c'$. Τότε ο $\mathcal{V}^*$ επιτυγχάνει με πιθανότητα $(1/m)q_H$, όπου q_H είναι ο αριθμός των ερωτήσεων στο τυχαίο μαντείο.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ορθότητα στο Μοντέλο Τυχαίου Μαντείου. Όπως και στο πρωτόκολλο του Schnorr, θέλουμε να παράξουμε δυο συζητήσης που καταλήγουν σε αποδοχή με το ίδιο y αλλά με διαφορετικές τιμές πρόκλησης. Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο συζητήσεις μπορούμε να εξάγουμε εναν μάρτυρα. Σημειώνουμε πως $c = H(y)$. Αν ένας μη τίμιος prover $\mathcal{P}^*$ κάνει μια μοναδική ερώτηση στο τυχαίο μαντείο πριν παράξει το $\langle y, c, s\rangle$, τότε η ανάλυση είναι η ίδια όπως με το διαδραστικό πρωτόκολλο. Τα προβλήματα εμφανίζονται όταν ο $\mathcal{P}^*$ κάνει παραπάνω από μια ερώτηση.

Υποθέτουμε πως στον αρχικό γύρο ο $\mathcal{P}^*$ κάνει q_H ερωτήσεις πριν τερματίσει την συζήτηση. Τότε ο εξαγωγέας γνώσης επιστρέφει τον $\mathcal{P}^*$ σε ένα προηγούμενο βήμα, χωρίς να υπάρχει εγγύηση πως ο $\mathcal{P}^*$ θα κάνει ξανά q_H ερωτήσεις. Όταν ο $\mathcal{P}^*$ τερματισει, θα επιστρέψει $\langle y', c', s'\rangle$ μεh $c' = H(y')$ και $y \neq y'$. Αυτό μειώνει την ικανότητά μας να εξάγουμε έναν μάρτυρα, οπότε θα πρέπει να τροποποιήσουμε καταλληλα την πιθανότητα λήψης δύο συζητήσεων αποδοχής με το ίδιο y.

Υποθέτουμε πως αφού κάνει q_H ερωτήσεις, ο $\mathcal{P}^*$ επιλέγει μια ερώτηση που έκανε και χρησιμοποιεί την αντίστοιχη απάντηση που πήρε για αυτήν από το τυχαίο μαντείο στην έξοδό του. Έστω $\text{Prob}[A] = \alpha$ η πιθανότητα πως η συζήτηση καταλήγει σε αποδοχή. Έστω $\text{Prob}[Q_i] = \beta_i$ η πιθανότητα ότι ο μη τίμιος prover ολοκληρώνει την iοστη συζήτηση με $1 \leq i \leq q_H$. Οριζουμε το $\text{Prob}[A \cap Q_i] = \alpha_i$. Τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{q_H} \alpha_i = \alpha \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{q_H} \beta_i = 1.$$

Ορίζουμε ως Prob$[E]$ την πιθανότητα εξαγωγής ενός μάρτυρα από το $\mathcal{P}^*$. Τότε έχουμε ότι

$$\text{Prob}[A \cap Q_i] = \text{Prob}[A \mid Q_i] \cdot \text{Prob}[Q_i]$$

so Prob$[A \mid Q_i] = \alpha_i/\beta_i$. Απο τους υπολογισμούς μας στην ενότητα 1.3, λαμβάνουμε πως

$$\text{Prob}[E \mid Q_i] \geq \frac{\text{Prob}[A \mid Q_i]^2}{4} - \frac{1}{m} = \frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} - \frac{1}{m}.$$

Η συνολική πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned}
\text{Prob}[E] &= \sum_{i=1}^{q_H} \text{Prob}[E \mid Q_i] \cdot \text{Prob}[Q_i] \\
&\geq \sum_{i=1}^{q_H} \left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} - \frac{1}{m} \right) \beta_i \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{q_H} \frac{\alpha_i^2}{\beta_i} - \sum_{i=1}^{q_H} \frac{\beta_i}{m} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{q_H} \frac{\alpha_i^2}{\beta_i} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{q_H} \beta_i \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{q_H} \frac{\alpha_i^2}{\beta_i} - \frac{1}{m} \\
&\geq \frac{1}{4q_H} \left(\sum_{i=1}^{q_H} \alpha_i \right)^2 - \frac{1}{m} \\
&= \frac{\alpha^2}{4q_H} - \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιόν στο ότι δεδομένου ενός πειστικού prover, μπορούμε να εξάγουμε εναν μάρτυρα με πιθανότητα

$$\frac{\alpha^2}{4q_H} - \frac{1}{m}.$$

1.5 Μηδενική Γνώση Τίμιου Verifier για όλο το NP

Τα πάντα στο NP μπορούν να αποδειχθούν με ένα πρωτόκολλο μηδενικής γνώσης τριών κινήσεων. Θεωρούμε τη γλώσσα HC όλων των Hamlitonian γραφημάτων. Θυμίζουμε πως ένας ***κύκλος Hamiltion (Hamiltonian cycle)*** π είναι ένα μονοπάτι στο γράφημα G που επισκέφτεται κάθε κόμβο ακριβώς μια φορά πριν επιστρέψει στο αρχικό σημείο. Το HC είναι NP-complete, οπότε μια απόδειξη γνώσης για το HC θα έδινε μια απόδειξη γνώσης για ολα τα προβλήματα στο NP: Δεδομένου ενός στιγμιοτύπου το προβλήματος στο NP, μπορούμε να το μεταμορφώσουμε σε ενα γράφημα κύκλο Hamilton αν και μόνο αν είναι ένα στιγμιότυπο αποδοχής για το πρόβλημα. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απόδειξη της HC για οποιδήπτοε πρόβλημα στο NP.

Ένα γραφημα με n κόμβους μπορεί να αναπαρασταθεί με εναν $n \times n$ δυαδικό πίνακα που ονομάζεται ο ***πίνακας πρόσπτωσης (adjacency matrix)*** του γραφήματος. Αν ο i-οστός κόμβος συνδέεται με τον jοστό,

τοτε το στοιχείο του πίνακα ij είναι 1, διαφορετικά είναι 0. Δεδομένης μιας αναδιάταξης π στο $\{1, ..., n\}$ και ενός γραφήματος G που ορίζεται από τον πίνακα πρόσπτωσης (a_{ij}), ορίζουμε το αναδιαταγμένο γράφημα G^{π} ως το γράφημα που έχει πίνακα πρόσπτωσης $(a'_{ij}) = (a_{\pi^{-1}(i)\pi^{-1}(j)})$. Ένας κύκλος Hamiltonin είναι ένα γράφημα που μπορεί να αναπαρασταθεί από μια αναδιάταξη π των κόμβων με την ειδική ιδιότητα πως το γράφημα G^{π} συμπεριλαμβάνει τις ακμές $(1, 2), (2, 3), ..., (n - 1, n), (n, 1)$.

Αν το π είναι κύκλος Hamilton για ένα γράφημα G και π' είναι μια αυθαίρετη αναδιάταξη τότε το $\pi'^{-1} \circ \pi$ είναι ένας κύκλος Hamilton για ενα γράφημα $G^{\pi'}$.

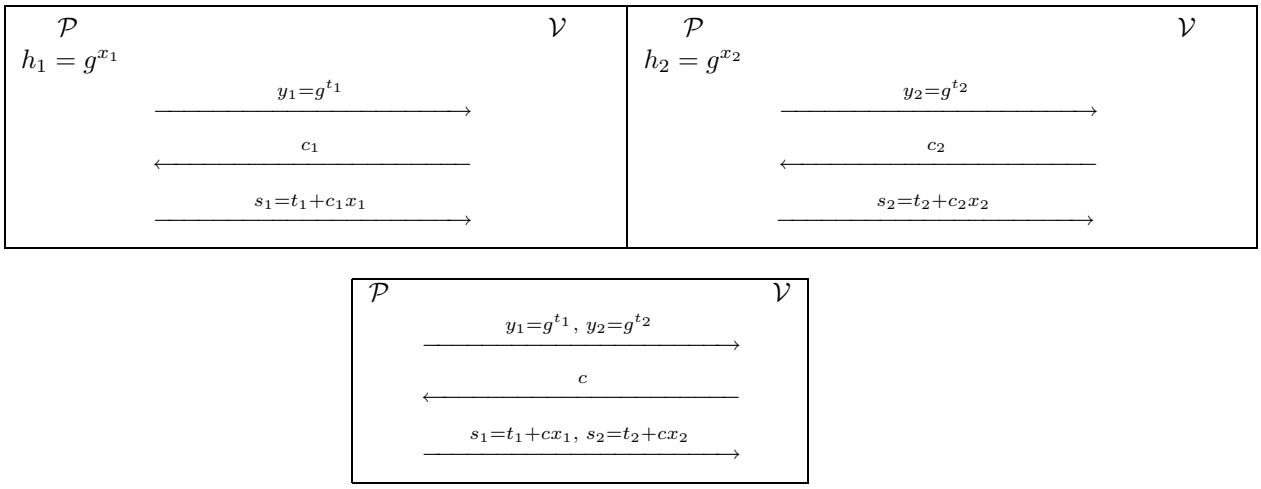
Οι αποδειξεις HVZK μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επαληθεύσουμε ότι ένας κύκλος Hamilton υπάρχει σε ενα γράφημα χωρίς να αποκαλύψουμε τον κύκλο. Το Σχήμα 3 παρουσιάζει πώς μια απόδειξη HVZK μπορεί να υλοποιηθεί. Σημειώνουμε πως ένας μη τίμιος prover μπορεί να μην φανερωθεί με πιθανότητα $\kappa = 1/2$. Υποθέτουμε πως ο prover δεσμεύεται σε έναν λάθος πίνακα πρόσπτωσης με τον οποίον κατασκευάζει τον κύκλο Hamliton. Αν ο verifier επιστρέψει $c = 0$, τότε ο verifier μαθαίνει πως ο prover δεν δεσμεύθηκε σε σωστή αναδιάταξη του γραφήματος. Σε k επαναλήψεις όμως, μπορεί να μειώσει την πιθανότητα του λάθους του σε $\kappa = 1/2^k$ και έτσι να ικανοποιήσει την ιδιότητα της ορθότητας.

$\mathcal{P}$(προσωπική είσοδος π)		$\mathcal{V}$
	Το γράφημα G	
Διαλέγουμε μια τυχαία αναδιάταξη π' του γραφήματος G. Δεσμευόμαστε στον πίνακα πρόσπτωσης του γραφήματος $G^{\pi'}$	$\begin{bmatrix} \text{com}_{11} & \cdots & \text{com}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{com}_{n1} & \cdots & \text{com}_{nn} \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$	
		$c \xleftarrow{\text{r}} \{0, 1\}$
	$\longleftarrow$ c	
Αν $c = 0$, τότε ανοίγουμε όλες τις δεσμεύσεις και στέλνουμε το π'^{-1}. Αν $c = 1$, τότε σε κάθε γύρο λέμε ποιές δεσμεύσεις χρειάζεται να ανοικτού (εξαρτάται από το π)		
	Ανοίγουμε το com βασιζόμενοι στο c $\longrightarrow$	
		Επαληθεύουμε τις δεσμεύσεις: Αν $c = 0$, ελέγχουμε αν ο πίνακας εισούτε με $G^{\pi'}$; Αν $c = 1$, ελέγχουμε αν αποκαλύπτεται ο κύκλος

Σχήμα 3: Μια απόδειξη γνώσης ενός κύκλου Hamilton. Επιπρόσθετα με την δέσμευση στον πίνακα πρόσπτωσης $G^{\pi'}$, ο prover πρέπει να κάνει μια ξεχωριστή δέσμευση com_{ij} σε κάθε είσοδο του πίνακα.

1.6 Η Σύζευξη δύο Αποδείξεων Μηδενικής Γνώσης

Υπάρχουν στιγμιότυπα στα οποία ένας prover θέλει να ελέγξει διάφορες προτάσεις με μια αλληλεπίδραση, είτε λόγω αποτελεσματικότητας είτε λόγω ιδιωτικότητας. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μια μοναδική πρόκληση διατηρώντας την δομή τριών κινήσεων. Όταν λάβει την πρόκληση ο prover συνδυάζει τις απαντήσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Η σύζευξη δύο αποδείξεων μηδενικής γνώσης για το διακριτό λογάριθμο.

Θεώρημα 1.6.1. *Η σύζευξη δύο αποδειξεων μηδενικής γνώσης τίμιου verifier ικανοποιεί την ιδιότητα της ορθότητας και της HVZK.*

1.7 Η διάζευξη δύο αποδείξεων μηδενικής γνώσης (The Disjunction of Two Zero-Knowledge Proofs)

Στην ενότητα 1.1 αναφέραμε πως κάποια σχήματα ταυτοποίησης χρήστη περιέχουν λεξικά με διάφορες προτάσεις θεωρημάτων που αντιστοιχίζονται σε κάθε χρήστη. Σε τετοια σχήματα, μπορεί να εμφανιστούν προβλήματα ιδιωτικότητας όταν οι χρήστες θέλουν να έχουν πρόσβαση χωρίς να φανερώσουν τους εαυτούς τους. Με τη σύζευξη δύο αποδείξεων μηδενικής γνώσης, ένα πρωτόκολλο ταυτοποίησης ρωτά τον χρήστη $\mathcal{P}$ να δώσει έναν μάρτυρα σε δύο προτάσεις. Ο χρήστης προφανώς γνωρίζει τον μάρτυρα για μια απο τις προτάσεις, αλλά δεν χρειάζεται να αποκαλύψει σε ποιά. Το σύστημα $\mathcal{V}$ στέλνει μια μοναδική τιμή πρόκλησης την οποία ο χρήστης μπορεί να αποσυμπιλήσει για να βρει μάρτυρα στη δεύτερη πρόταση. Στο Σχήμα 5 αναπαρίσταται η εκτέλεση μιας διάζευξης.

Θεώρημα 1.7.1. *Η διάζευξη δύο αποδείξεων μηδενικής γνώσης τίμιου verifier ικανοποιεί την ιδιότητα της ορθότητας και της HVZK.*

Notes by S. Pehlivanoglu, J. Todd, & H.S. Zhou

$\mathcal{P}$		$\mathcal{V}$
$h_1 = g^{x_1},\ h_2 = g^{x_2}$		
$y_1 = g^{t_1}$		
$s_2,\ c_2 \xleftarrow{\text{r}} \mathbb{Z}_m$		
$y_2 = g^{s_2} h_2^{-c_2}$		
	$\xrightarrow{y_1,\ y_2}$	
	$\xleftarrow{c}$	
$c_1 = c - c_2 \mod m$		
	$\xrightarrow{c_1,\ c_2,\ s_1,\ s_2}$	
$s_1 = t_1 + c_1 x_1$		$c \stackrel{?}{=} c_1 + c_2$
		$g^{s_1} \stackrel{?}{=} y_1 h_1^{c_1}$
		$g^{s_2} \stackrel{?}{=} y_2 h_2^{c_2}$

Σχήμα 5: Η διάζευξη δύο αποδείξεων μηδενικής γνώσης για τον διακριτό λογάριθμο δείχνοντας πως ο prover μπορεί να πείσει τον verifier πως γνωρίζει έναν από τους δύο διακριτούς λογαριθμους f h_1, h_2 (χωρίς να αποκαλύπτει ποιον). Σε αυτή την περίπτωση ο prover $\mathcal{P}$ γνωρίζει τον μάρτυρα r h_1.