Κεφάλαιο 5

Επίλογος

5.1 Φύλαξη από το εσωτερικό του πολυγώνου

Στα προηγούμενα κεφάλαια περιγράψαμε τρόπους φύλαξης των πολυγώνων από τις κορυφές και τις πλευρές τους. Γενικά στη βιβλιογραφία είναι ελάχιστα τα αποτελέσματα για την τοποθέτηση των φυλάκων στο εσωτερικό του πολυγώνου και μόνο πρόσφατα δημοσιεύθηκαν σχετικά άρθρα ([13], [47], [22]). Εκτός από το [47] στα υπόλοιπα θεωρούν τις πιθανές θέσεις των φυλάκων να βρίσκονται σε ένα οσοδήποτε πυκνό πλέγμα (grid) και τα αποτελέσματά τους είναι πιθανοτικά. Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε παραπάνω τη διαμέριση του εσωτερικού του πολυγώνου $\mathcal{V}(P)$ και θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις θέσεις των φυλάκων με περισσότερο φυσικό τρόπο.

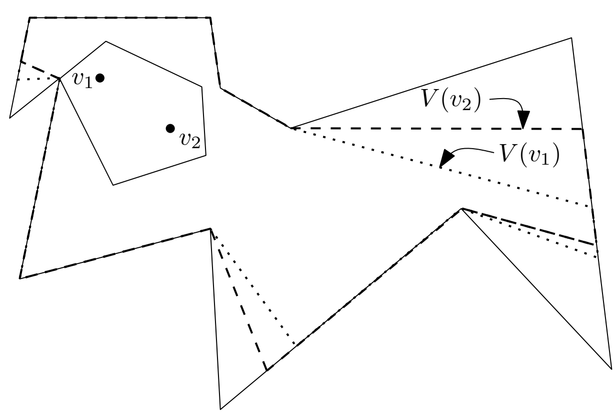
Στο [8] και στο [2] αποδεικνύουν το ακόλουθο:

Λήμμα 5.1.1 *Έστω p και q δύο σημεία μέσα σε ένα απλό πολύγωνο P που δεν ανήκουν σε κάποιο κρίσιμο περιορισμό του P. Τα σημεία έχουν πολύγωνα ορατότητας με διαφορετικές συνδυαστικές αναπαραστάσεις αν και μόνο αν βρίσκονται εκατέρωθεν κάποιου κρίσιμου περιορισμού.*

Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο χωρίο της $\mathcal{V}(P)$ έχουν πολύγωνα ορατότητας με την ίδια συνδυαστική αναπαράσταση (Σχήμα 5.1). Έχουμε λοιπόν ότι η διαμέριση ορατότητας του εσωτερικού ενός πολυγώνου δημιουργεί μια ενδιαφέρουσα τοπικότητα (locality) στα σημεία που ανήκουν στα διάφορα χωρία που ορίζει η διαμέριση: όλα τα σημεία ενός χωρίου* της $\mathcal{V}(P)$ έχουν «περίπου το ίδιο» πολύγωνο ορατότητας. Στην προσπάθεια ορισμού ενός φυσικού τρόπου τοποθέτησης φυλάκων στο εσωτερικό του πολυγώνου, το να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο από κάθε χωρίο σαν μια καλώς ορισμένη θέση φύλακα στο εσωτερικό του πολυγώνου, μοιάζει να είναι μια λογική επιλογή. Εξάλλου η επιλογή αυτή ενισχύεται και από τις παρατηρήσεις που ακολουθούν.

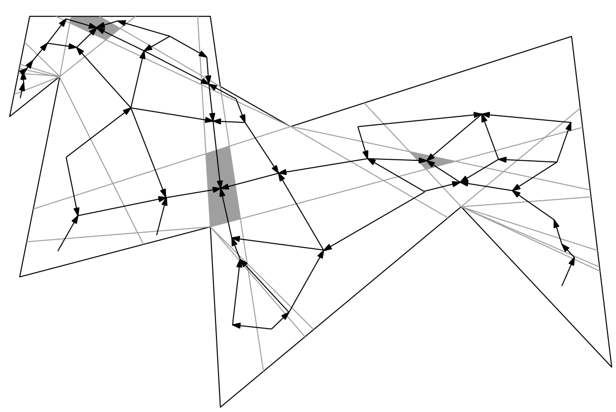
Το δυϊκό γράφημα της υποδιαίρεσης $\mathcal{V}(P)$ έχει κορυφές τα χωρία της υποδιαίρεσης και δύο κορυφές ενώνονται με μια ακμή αν τα αντίστοιχα χωρία είναι γειτονικά στην υποδιαίρεση. Η κατασκευή αυτή του δυϊκού γραφήματος γίνεται και στο [8] σε ένα άλλο πλαίσιο προβλημάτων. Στο [8] αποδεικνύουν ότι οι συνδυαστικές αναπαραστάσεις των πολυγώνων ορατότητας, σημείων που ανήκουν σε γειτονικά χωρία της υποδιαίρεσης,

*Το χωρίο δεν περιέχει την περίμετρό του.



Σχήμα 5.1: Τα σημεία v_1, v_2 έχουν συνδυαστικά ισοδύναμα πολύγωνα ορατότητας.

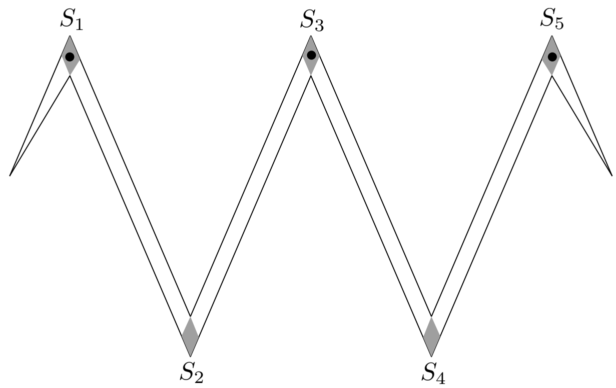
διαφέρουν μόνο κατά μια κορυφή. Αυτό σημαίνει ότι είναι καλώς ορισμένη η κατεύθυνση κατά την οποία αν διασχίσουμε στο εσωτερικό του πολυγώνου ένα κρίσιμο περιορισμό, κερδίζουμε ή χάνουμε την ορατότητα προς μια κορυφή. Στο [8] κατευθύνουν τις ακμές του δυϊκού γραφήματος προς το χωρίο όπου η ορατότητα μειώνεται με σκοπό να καταλήξουν στα χωρία με τη μικρότερη ορατότητα. Στο Σχήμα 5.2 έχουμε δώσει στις ακμές την ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση, αυτή δηλαδή προς τα χωρία με τη μεγαλύτερη ορατότητα.



Σχήμα 5.2: Το δυϊκό γράφημα της υποδιαίρεσης ορατότητας του εσωτερικού του πολυγώνου.

Παρατηρούμε ότι κάποια χωρία της $\mathcal{V}(P)$ (φαίνονται σκιασμένα στο Σχήμα 5.2) είναι «καταβόθρες» (sinks) για το κατευθυνόμενο γράφημα. Αν τοποθετήσουμε ένα φύλακα στο εσωτερικό κάθε μιας από αυτές τις τρείς περιοχές τότε το πολύγωνο του σχήματος φυλάσσεται ολόκληρο από φύλακες που έχουν τοποθετηθεί στο εσωτερικό του πολυγώνου με ένα καλά ορισμένο τρόπο. Στην περίπτωση του σχήματος 5.2 όπου έχουμε ένα μονότονο πολύγωνο, μπορούμε να κάνουμε ακόμα καλύτερα και να τοποθετήσουμε ακριβώς το βέλτιστο αριθμό φυλάκων.

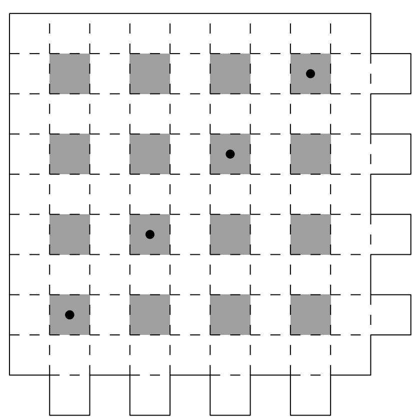
Αν κατα την κατεύθυνση μονοτονίας ονομάσουμε τα χωρία «καταβόθρες» C_1, C_2, C_3 και τα σημεία εντός των χωρίων όπου τοποθετούμε φύλακες p_1, p_2 και p_3, έχουμε για τα πολύγωνα ορατότητας: $V(p_2) \subset V(p_1) \cup V(p_3)$. Είναι σύνηθες για τα μονότονα πολύγωνα να εξετάζονται κατά την κατεύθυνση μονοτονίας από τα αριστερά προς τα δεξιά. Είναι φανερό ότι δεν χρειάζεται να τοποθετηθεί φύλακας στο σημείο p_2 αφού οι φύλακες στα σημεία p_1 και p_3 καλύπτουν εκτός των άλλων και όλα τα σημεία που καλύπτει ο φύλακας στο σημείο p_2.



Σχήμα 5.3: Ένα μονότονο πολύγωνο με $\Theta(n)$ sinks.

Η χειρότερη περίπτωση για τον αριθμό των sinks σε ένα μονότονο πολύγωνο φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Με τη συλλογιστική της προηγούμενης παραγράφου αρκούν φύλακες μόνο στα S_1, S_3 και S_5 αφού τα πολύγωνα ορατότητας των φυλάκων που θα τοποθετηθούν στα S_2 και S_4 είναι υποσύνολα των πολυγώνων ορατότητας των φυλάκων στα S_1, S_3 και S_5. Στο [8] αποδεικνύουν το επόμενο:

Θεώρημα 5.1.1 *Η υποδιαίρεση ορατότητας $\mathcal{V}(P)$ ενός απλού πολυγώνου χωρίς τρύπες έχει $O(n^2)$ χωρία* ***ελάχιστης ορατότητας***[†] *και υπάρχουν πολύγωνα με n κορυφές που έχουν $\Theta(n^2)$ χωρία ελάχιστης ορατότητας.*



Σχήμα 5.4: Ένα ορθογώνιο πολύγωνο με $\Theta(n)$ sinks.

Αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 5.4 βλέπουμε ένα παράδειγμα για τη χειρότερη περίπτωση του θεωρήματος 5.1.1. Από κάθε περιοχή που είναι γραμμοσκιασμένη αν μετακινηθούμε προς μια γειτονική περιοχή, είναι εμφανές ότι μετακινούμαστε προς μια περιοχή

[†]Τα sinks στο [8] έχουν την έννοια των περιοχών του πολυγώνου με την ελάχιστη ορατότητα.

Σχήμα 5.5: Ένα τρέξιμο του `vispack` που με δύο φύλακες δίνει κάλυψη 87% του βέλτιστου.

που τα σημεία της έχουν λιγότερη ορατότητα. Αν όμως κάνουμε την αντίθετη μετακίνηση τότε στις γραμμοσκιασμένες περιοχές έχουμε σημεία με τη μέγιστη δυνατή ορατότητα. Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο:

Πόρισμα 5.1.1 *Η υποδιαίρεση ορατότητας $\mathcal{V}(P)$ ενός απλού πολυγώνου χωρίς τρύπες έχει $O(n)$ χωρία* ***μέγιστης ορατότητας***[‡] *και υπάρχουν πολύγωνα με n κορυφές που έχουν $\Theta(n)$ χωρία μέγιστης ορατότητας.*

Ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η ανάπτυξη μιας συλλογιστικής που θα μας οδηγήσει στην τοποθέτηση των 4 φυλάκων, ή μια προσέγγιση του αριθμού αυτού των φυλάκων, μέσα στα sinks του πολυγώνου του σχήματος 5.4

5.2 Υλοποιήσεις

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας [18] στο τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών, αναπτύχθηκε η βιβλιοθήκη `vispack` που χρησιμοποιεί και επεκτείνει τη βιβλιοθήκη CGAL (`http://www.cgal.org`). Στη βιβλιοθήκη `vispack` έγινε προσπάθεια να υλοποιηθούν οι δομές των υποδιαιρέσεων ορατότητας του κεφαλαίου 2 και μέχρι στιγμής υπάρχει η υλοποίηση της διαμέρισης της περιμέτρου.

Σαν εφαρμογή της δομής της διαμέρισης της περιμέτρου υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος 3.2, που υπολογίζει μια προσεγγιστική λύση με σταθερό παράγοντα προσέγγισης 0.632, του προβλήματος τοποθέτησης k φυλάκων κορυφών έτσι ώστε να καλύπτουν ένα μέγιστο μήκος στην περίμετρο. Παράλληλα υλοποιήθηκε και ένας brute force αλγόριθμος που υπολογίζει τη βέλτιστη τοποθέτηση των k φυλάκων.

Το ενδιαφέρον αποτέλεσμα αυτής της υλοποίησης είναι ότι με δυσκολία κατασκευάσαμε πολύγωνα που ο αλγόριθμος 3.2 κάλυπτε κάτι χειρότερο από το 90% του μέρους της περιμέτρου που καλύπτουν οι φύλακες στη βέλτιστη τοποθέτηση. Στο Σχήμα 5.5 φαίνεται μια περίπτωση όπου οι κόκκινοι φύλακες, τοποθετημένοι από τον αλγόριθμο

[‡]Τα χωρία αυτά που προηγουμένως ονομάσαμε «καταβόθρες» ορατότητας (visibility sinks).