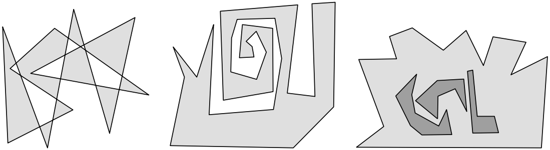
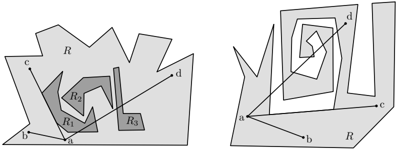
Ορατότητα σε απλά πολύγωνα

- Πολύγωνο, απλό πολύγωνο, πολύγωνο με τρύπες:



- Το σημείο *a* “βλέπει” τα σημεία *b* και *c*, όχι όμως το *d*:



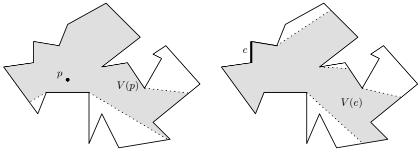
Το πρόβλημα φύλαξης της αίθουσας τέχνης

Victor Klee 1973

- Η κάτοψη μιας αίθουσας τέχνης είναι ένα απλό πολύγωνο.
- Πόσοι φύλακες χρειάζονται για να φυλάξουν την αίθουσα;
- Τί είναι φύλακας:
  - Ένα σημείο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα.
  - Βλέπει ταυτόχρονα προς όλες τις κατευθύνσεις.
  - Βλέπει άπειρα μακριά.
  - Δεν μπορεί να δεί πίσω από ένα τοίχο.
- Το σημείο x **βλέπει** το σημείο y (καλύπτει, το y φαίνεται από το x) αν $\overline{xy} \subset \{P \cup \partial P\}$

Πολύγωνο ορατότητας

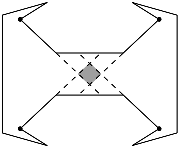
- Ένας φύλακας πλευρά μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας κινούμενος, ανάμεσα στα όρια της πλευράς, σημειακός φύλακας.
- Πολύγωνο ορατότητας από σημείο ή από πλευρά:



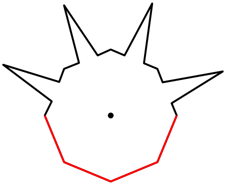
- Ένα σύνολο φυλάκων καλύπτει ένα πολύγωνο αν κάθε σημείο του πολυγώνου $\{P \cup \partial P\}$ φαίνεται από κάποιο φύλακα.

Παραλαγές προβλημάτων ορατότητας

- Ανάλογα με την απαίτηση φύλαξης:

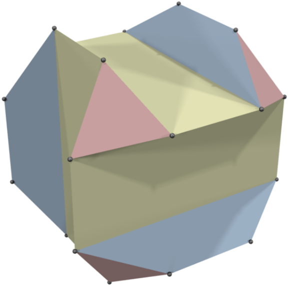


- Ανάλογα με το είδος των φυλάκων:



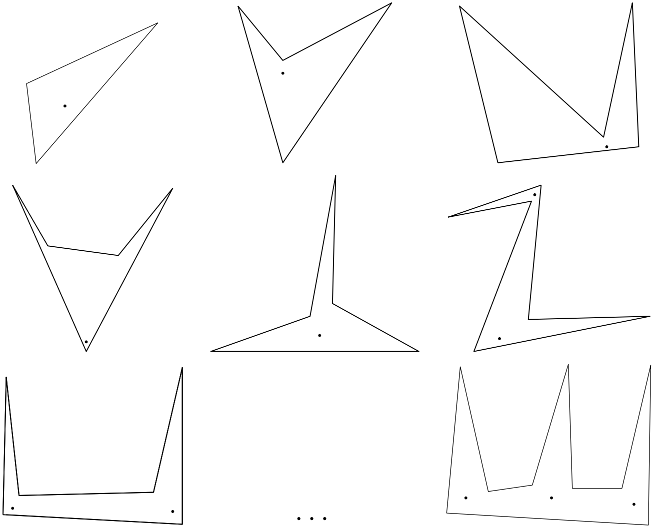
Πόσοι φύλακες είναι απαραίτητοι;

- Το λιγότερο ένας.
- Το πολύ n.
- 3D: n φύλακες δεν αρκούν πάντα:



- http://en.wikipedia.org/wiki/Art_gallery_theorem

Εξερεύνηση



Το θεώρημα φύλαξης της αίθουσας τέχνης

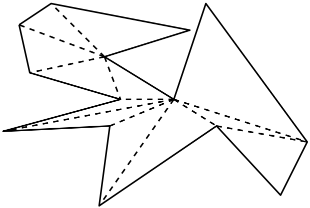
Art Gallery Theorem, V. Chvátal 1975, S. Fisk 1978

Θεώρημα: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ σημειακοί φύλακες αρκούν πάντα για να φυλάξουν ένα απλό πολύγωνο με *n* κορυφές.

- Chvátal: επαγωγή στο *n*, διάκριση πολλών περιπτώσεων.
- Fisk: απλούστατη απόδειξη μιας σελίδας:

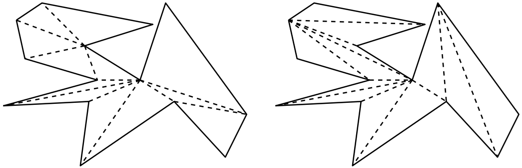
  S. Fisk. A short proof of Chvátal's watchman theorem. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 24:374, 1978

- Η απόδειξη του Fisk χρησιμοποιεί μια τριγωνοποίηση του πολυγώνου:



Τριγωνοποίηση απλού πολυγώνου

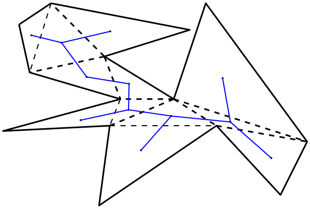
- Διαγώνιος του πολυγώνου είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει αμοιβαία ορατές κορυφές του.
- Ένα μεγιστικό σύνολο μη τεμνόμενων διαγωνίων (τέμνονται μόνο στα άκρα τους) χωρίζει το πολύγωνο σε τρίγωνα:



- Υπάρχουν $C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$ διαφορετικές τριγωνοποιήσεις.
- Σχηματίζονται $n-2$ τρίγωνα από $n-3$ διαγωνίους.

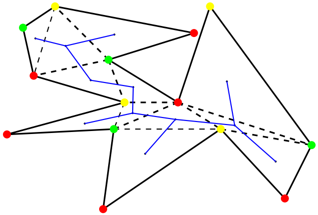
Ο δυϊκός γράφος της τριγωνοποίησης

- Κόμβοι είναι τα τρίγωνα. Ακμές μεταξύ γειτονικών τριγώνων.
- Δυαδικό δέντρο με ρίζα (κόμβοι βαθμού το πολύ 3).
- Αριθμός διαφορετικών τριγωνοποιήσεων ίσος με αριθμό διαφορετικών δυαδικών δέντρων με $n-2$ κόμβους.

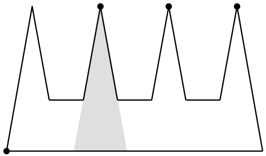


3-χρωματισμός των κορυφών της τριγωνοποίησης

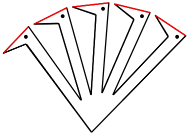
- Χρησιμοποιούμε το δυϊκό γράφημα (δέντρο).
- Επιλέγουμε κάποιο φύλλο του δέντρου και χρωματίζουμε τις κορυφές του δυϊκού τριγώνου με 3 χρώματα.
- Διασχίζουμε το δέντρο με DFS ή BFS.
- Σε κάθε νέο κόμβο (τρίγωνο) χρησιμοποιούμε το χρώμα που δεν εμφανίζεται στην κοινή ακμή.
- Τουλάχιστον ένα χρώμα θα χρησιμοποιηθεί το πολύ $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ φορές.



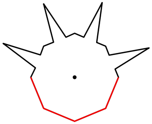
- Υπάρχουν πολύγωνα που χρειάζονται ακριβώς $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ φύλακες:



- Ανοικτό πρόβλημα: αρκούν πάντα $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ φύλακες ακμές;



- Ανοικτό πρόβλημα: σε πολύγωνο αστέρι αρκούν πάντα $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ φύλακες ακμές;

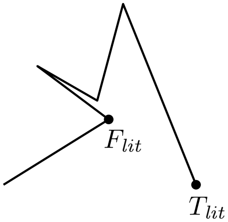


Ελαχιστοποίηση του αριθμού των φυλάκων

- Να βρεθεί αλγόριθμος που να υπολογίζει τον ελάχιστο αριθμό φυλάκων για οποιοδήποτε απλό πολύγωνο.
- Το πρόβλημα είναι NP-hard για κάθε είδος φύλακα και κάθε απαίτηση φύλαξης.
- Θα παρουσιάσουμε μια αναγωγή από το 3SAT στο πρόβλημα φύλαξης απλού πολυγώνου με τον ελάχιστο αριθμό φυλάκων.
- Για παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε την λογική έκφραση:
  $\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$

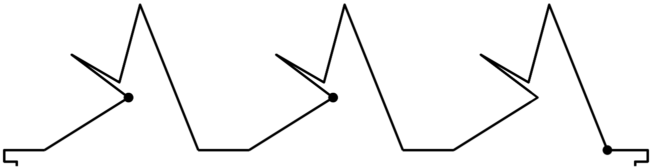
Περίγραμμα λεκτημάτων

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



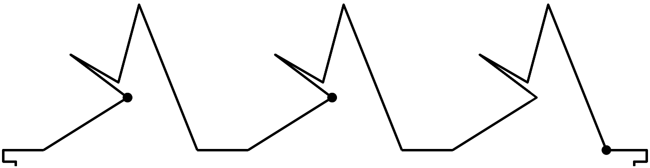
Περίγραμμα προτάσεων

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



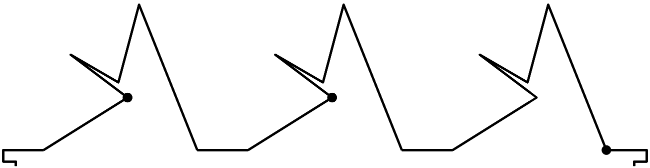
Περίγραμμα προτάσεων

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



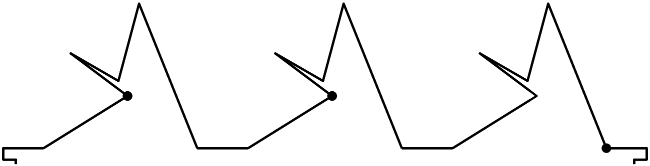
Περίγραμμα προτάσεων

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



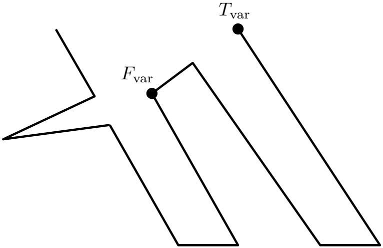
Περίγραμμα προτάσεων

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



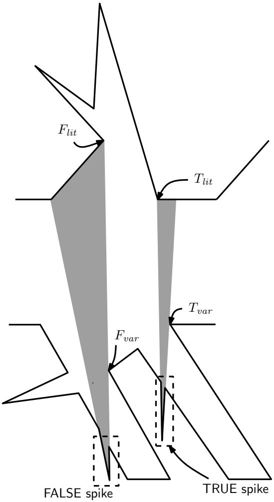
Περίγραμμα μεταβλητών

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



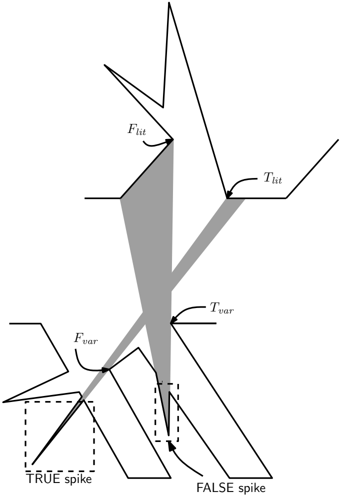
Ακίδες για ένα αρνητικό λέκτημα

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



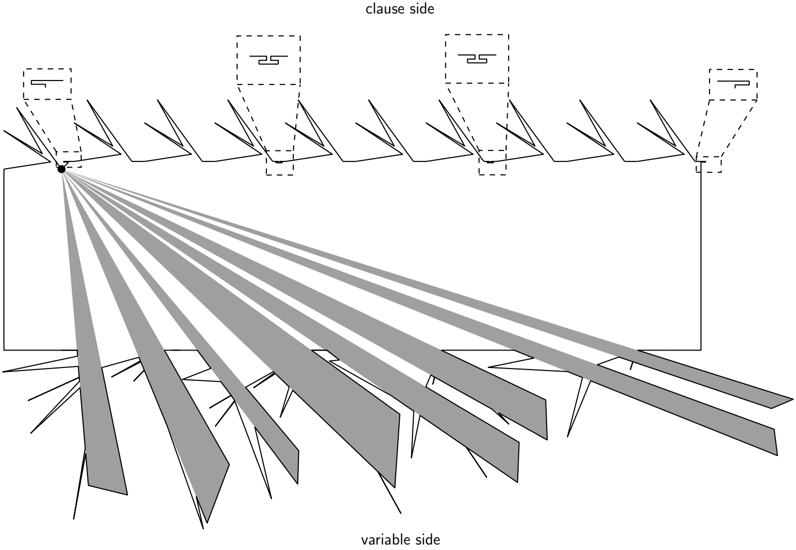
Ακίδες για ένα θετικό λέκτημα

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



Το τελικό πολύγωνο

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$

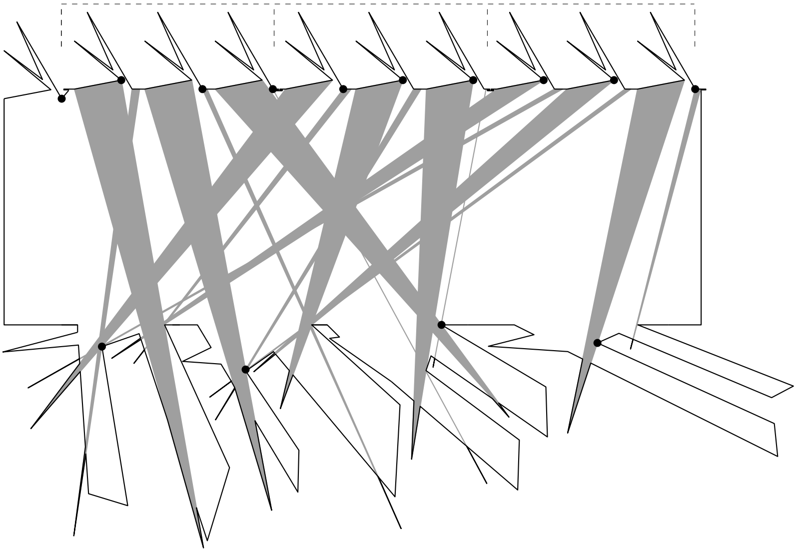


Μετασχηματισμός μιας εφικτής λύσης

- Έστω ότι μια απονομή αλήθειας ικανοποιεί όλες τις clauses της Φ. Τοποθετούμε $k = |lit| + |var| + 1$ φύλακες στο πολύγωνο:
  - 1 φύλακα στη διακεκριμένη κορυφή,
  - από 1 φύλακα σε κάθε περίγραμμα μεταβλητής,
  - από 1 φύλακα σε κάθε περίγραμμα λεκτήματος.
- Καλύπτουμε έτσι το πολύγωνο με τον ελάχιστο αριθμό φυλάκων.
- Αντίστροφα, χρειάζονται ακριβώς k φύλακες για να καλυφτεί όλο το πολύγωνο.
- Οι θέσεις φύλαξης πρέπει να καλύπτουν τα διάφορα περιγράμματα.
- Συνάγουμε την απονομή αλήθειας από τις θέσεις των φυλάκων στα περιγράμματα μεταβλητών.

Καλύπτεται όλο το πολύγωνο

$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$



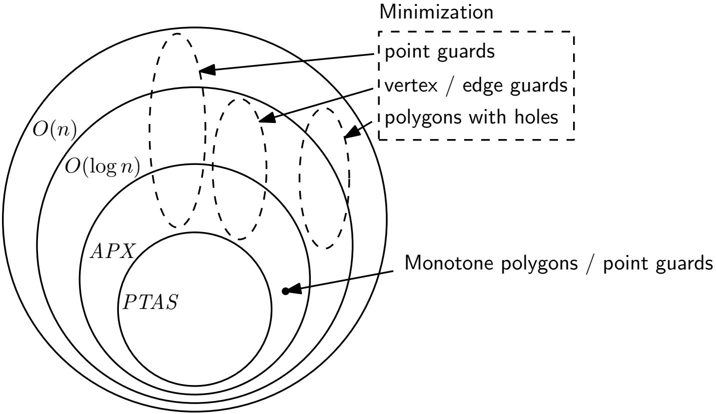
Ελαχιστοποίηση αριθμού φυλάκων

Γνωστά αποτελέσματα

▶ NP-hard	Lee, Lin, 1986
▶ $O(\log n)$ προσέγγιση	Ghosh, 1987
▶ NP-hard για 3-link πολύγωνα	Nilsson, 1995
▶ APX-hard	Eidenbenz, 1998
▶ APX-hard για 2-link πολύγωνα	Brodén, 2001
▶ 12-προσεγγίσιμο για μονότονα πολύγωνα	Nilsson, 2005

Ελαχιστοποίηση αριθμού φυλάκων

Πολυπλοκότητα των προσεγγίσεων

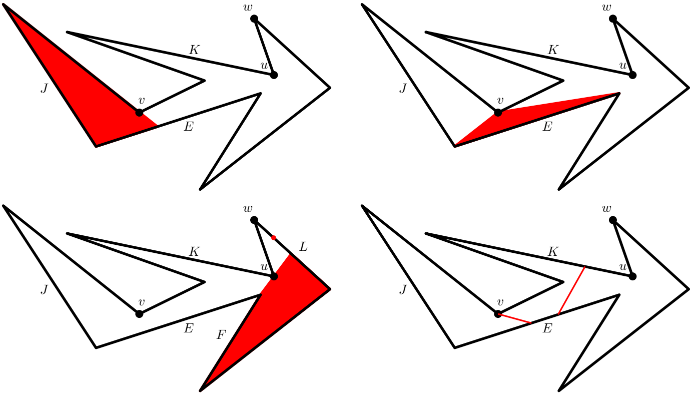


Κατηγορήματα Ορατότητας

βλέπει: $sees(a, b) : ab \subset P$

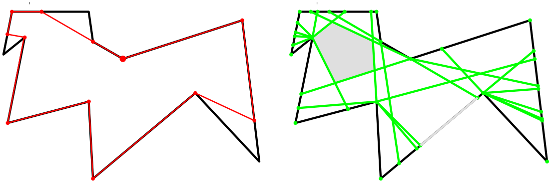
καλύπτει: $oversees(A, B) : \forall b \in B \; \exists a \in A \; : \; sees(a, b)$

επιτηρεί: $watches(A, B) : \exists b \in B \; \exists a \in A \; : \; sees(a, b)$



Διαμέριση ορατότητας $\mathcal{V}(P)$ και $\mathcal{V}(\partial P)$

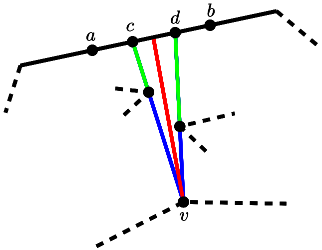
- Από κάθε κορυφή υπολογίζουμε το πολύγωνο ορατότητας:



- Οποιοδήποτε κομμάτι της διαμέρισης δεν μπορεί να καλύπτεται μόνο μερικώς από μια κορυφή ή πλευρά.
- Ένα κομμάτι της διαμέρισης καλύπτεται από μια κορυφή ανν επιτηρείται από την κορυφή (ή πλευρά).
- $\mathcal{V}(\partial P)$: $O(n^2)$ τμήματα. $\mathcal{V}(P)$: $O(n^3)$ χωρία.

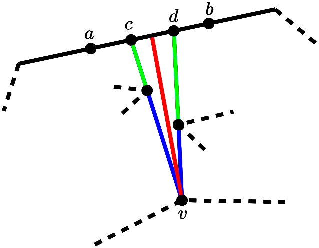
Περίγραμμα απόδειξης

Η κορυφή v του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



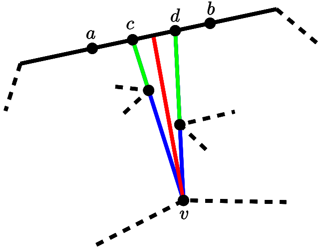
Περίγραμμα απόδειξης

Η κορυφή v του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



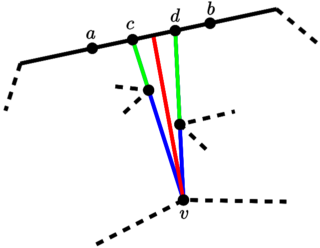
Περίγραμμα απόδειξης

Η κορυφή v του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



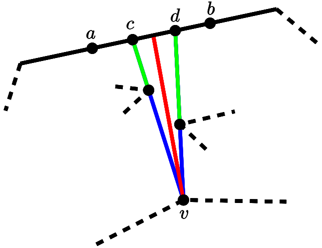
Περίγραμμα απόδειξης

Η κορυφή v του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



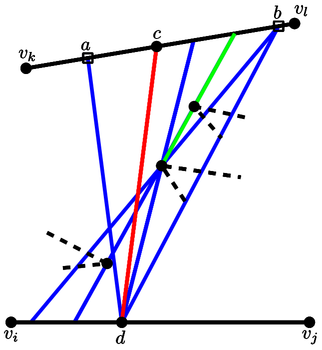
Περίγραμμα απόδειξης

Η κορυφή v του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



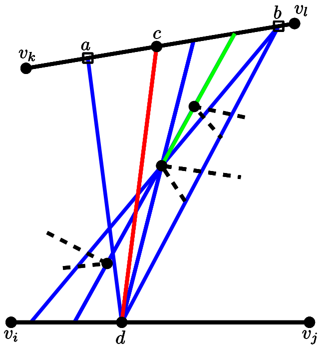
Περίγραμμα απόδειξης

Η πλευρά $e = v_i v_j$ του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



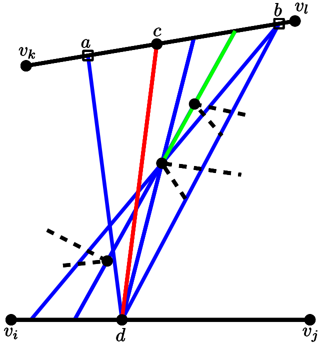
Περίγραμμα απόδειξης

Η πλευρά $e = v_i v_j$ του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



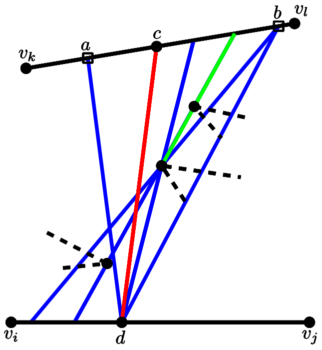
Περίγραμμα απόδειξης

Η πλευρά $e = v_i v_j$ του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτρεπεί:



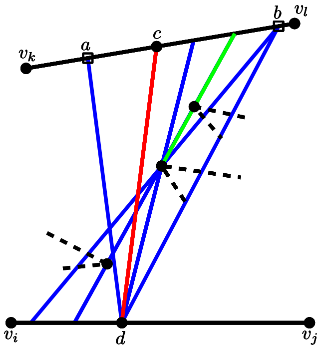
Περίγραμμα απόδειξης

Η πλευρά $e = v_i v_j$ του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



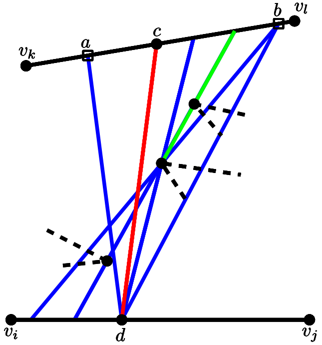
Περίγραμμα απόδειξης

Η πλευρά $e = v_i v_j$ του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



Περίγραμμα απόδειξης

Η πλευρά $e = v_i v_j$ του πολυγώνου P, καλύπτει το τμήμα $\overline{ab}$ της υποδιαίρεσης της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί:



Κατασκευή των καλυπτόμενων κομματιών της διαμέρισης