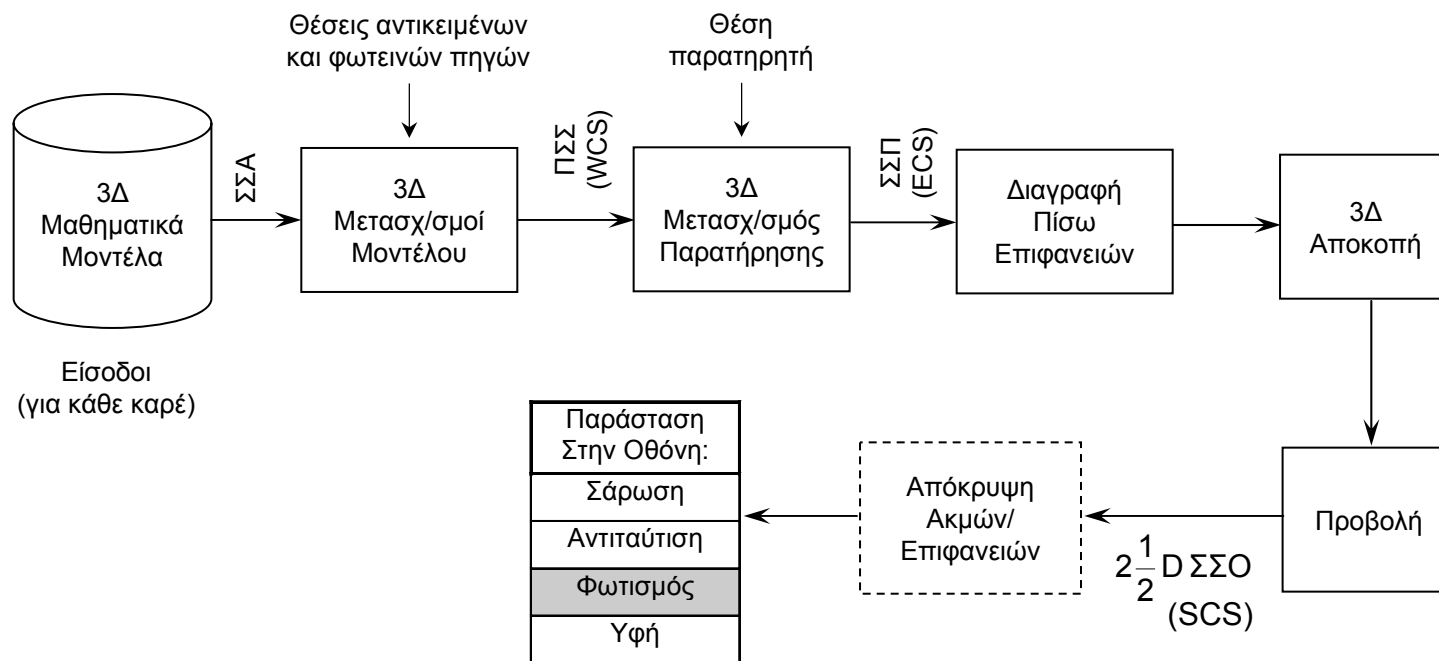


Μοντέλα & Αλγόριθμοι Φωτισμού

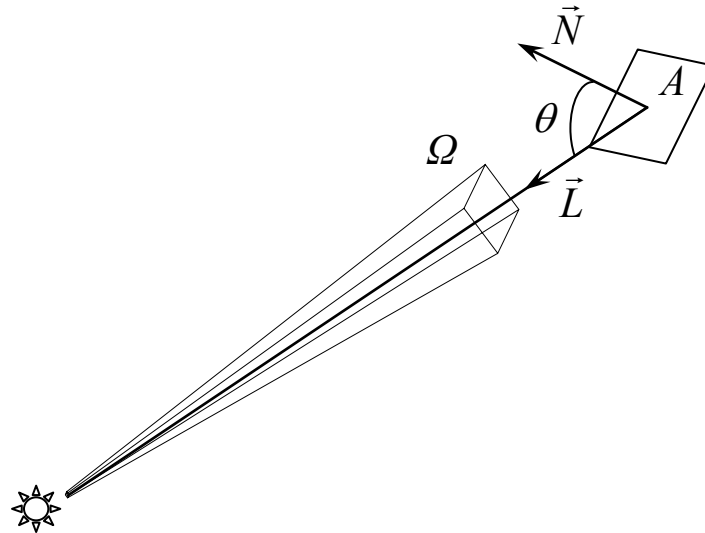
- Μοντέλο φωτισμού: συγκεκριμένη και απλοποιημένη παράσταση φυσικών νόμων που διέπουν τον φωτισμό.
 - Τοπικό: λαμβάνει υπ' όψη μόνο άμεση πρόσπτωση φωτός (π.χ. Phong).
 - Γενικό: λαμβάνει υπ' όψη και έμμεση πρόσπτωση φωτός (π.χ. Ray-tracing, Radiosity).
- Αλγόριθμος φωτισμού: αποδοτική υλοποίηση μοντέλου φωτισμού.



Φυσική του Φωτισμού

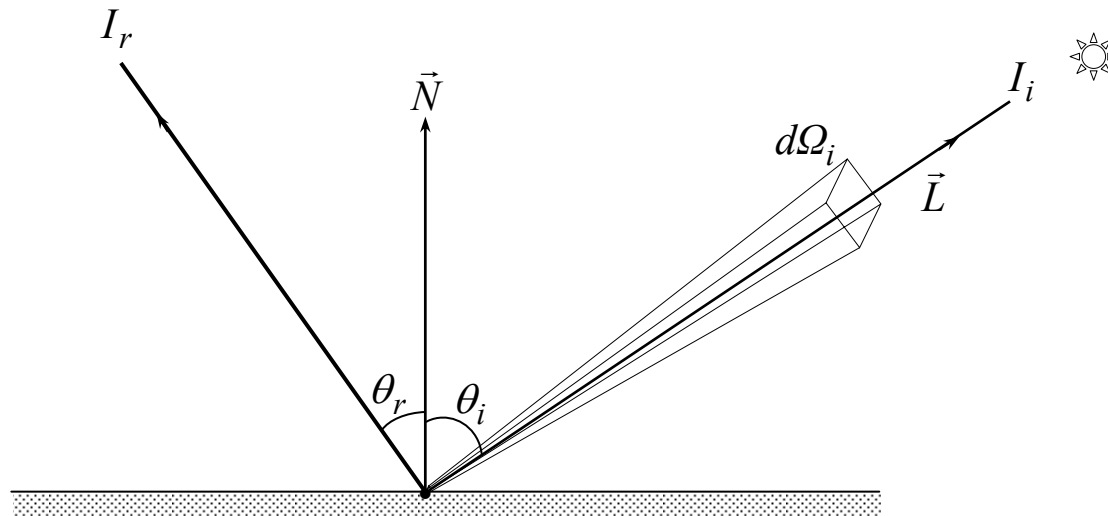
- Γωνία που αντιστοιχεί σε κυκλικό τόξο μήκους ℓ και ακτίνας r είναι ίση με ℓ/r radians.
- Στερεά γωνία που αντιστοιχεί σε σφαιρική περιοχή επιφάνειας a είναι ίση με a/r^2 steradians (sr).
 - Σφαίρα: $4\pi r^2 / r^2 = 4\pi sr$
- Φωτεινή ισχύς (flux) Φ : ταχύτητα εκπομπής φωτεινής ενέργειας από φωτεινή πηγή (μονάδα watt (w)).
- Radiant intensity R (ένταση φωτεινής πηγής): φωτεινή ισχύς ανά μονάδα στερεάς γωνίας Ω σε κάποια διεύθυνση. $R = d\Phi/d\Omega$ (μονάδα w/sr).
- Φωτεινή ροή (radiance) ή ένταση I : ένταση που εκπέμπεται από φωτεινή πηγή σε κάποια κατεύθυνση ανά μονάδα επιφανείας κάθετη στην κατεύθυνση αυτή.

$$I = dR / (dA \cdot \cos \theta) = dR / (dA \cdot \vec{N} \cdot \vec{L})$$



Φυσική του Φωτισμού

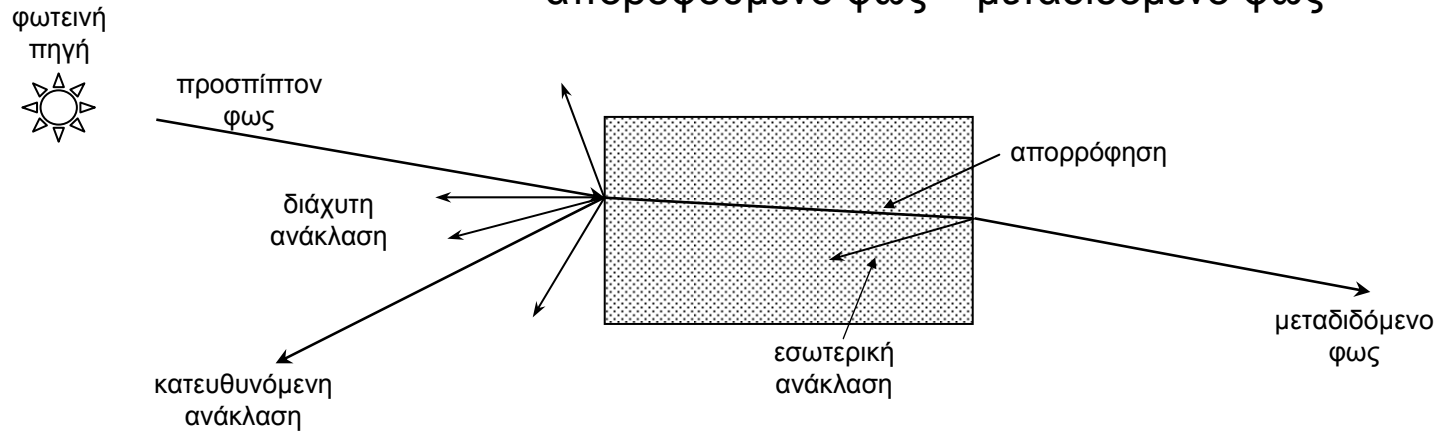
- Ροή προσπίπτουσας ακτινοβολίας (irradiance) E_i : σημείου επιφάνειας είναι η προσπίπτουσα φωτεινή ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας (όχι προβολής) στην περιοχή του σημείου. $E = d\Phi/dA$ (μονάδα w/m^2).
- Ένταση (προσπίπτουσα) σημείου επιφάνειας I_i : φωτεινή ροή (προβολής) ανά μονάδα στερεάς γωνίας. Ισχύει: $E_i = I_i \cdot \cos\theta_i \cdot d\Omega_i = I_i \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L}) \cdot d\Omega_i$



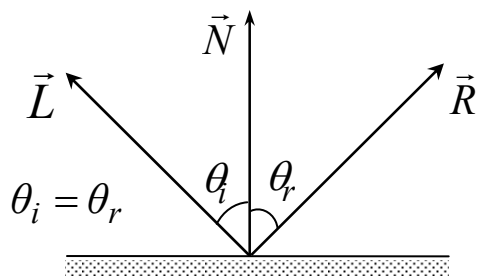
- Στα γραφικά μας ενδιαφέρει η σχέση προσπίπτοντος και ανακλώμενου φωτός I_r .
 - I_r πρέπει να υπολογισθεί από E_i και όχι από I_i (π.χ. πηγές με διαφορετικό μέγεθος ($d\Omega_i$) και ίδια ένταση I_i).
 - Συνάρτηση ανάκλισης $BRDF = \frac{I_r}{E_i}$ εξαρτάται από θ_i και θ_r .

Φυσική του Φωτισμού

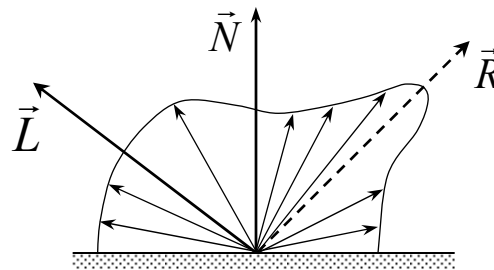
- Για την προσπίπτουσα σε κάποια επιφάνεια φωτεινή ενέργεια ισχύει:
 προσπίπτον φως = ανακλώμενο φως + διαχεόμενο φως +
 απορροφούμενο φως + μεταδιδόμενο φως



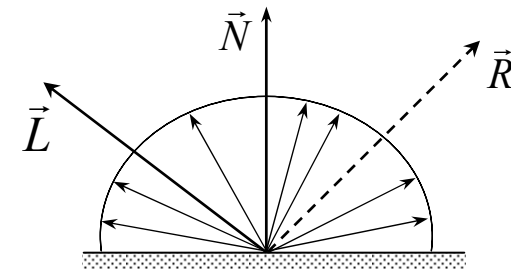
- Στα γραφικά αρκεί να θεωρήσουμε 3 συνιστώσες για την BRDF (He 1991):
 - Κατευθυνόμενη ανάκλαση (specular reflection), σχήμα Α.
 - Διάχυτη ανάκλαση (directional diffuse reflection), σχήμα Β.
 - Ιδανική διάχυτη ανάκλαση (ideal diffuse reflection), σχήμα Γ.



Σχήμα Α



Σχήμα Β



Σχήμα Γ

Μοντέλο Φωτισμού Phong

- Τοπικό, εμπειρικό μοντέλο με καλά αποτελέσματα.
- Γραμμικός συνδυασμός 3 συνιστωσών.
 - Διάχυτη ανάκλαση (diffuse).
 - Κατευθυνόμενη ανάκλαση (specular).
 - Εμμεσος φωτισμός (ambient light).
- Διάχυτη ανάκλαση (\equiv ιδανική διάχυτη ανάκλαση) βασίζεται στο νόμο συνημιτόνου Lambert:

$$I_d = I_i \cdot k_d \cdot \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq k_d \leq 1$$
$$= I_i \cdot k_d \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) \quad \vec{L}, \vec{N} \text{ μοναδιαία}$$

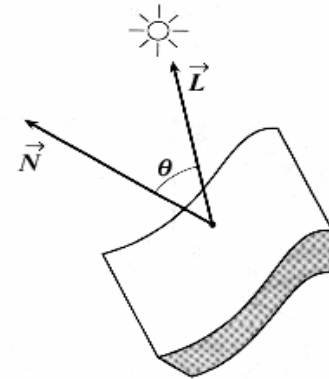
όπου I_i η ένταση σημειακής φωτεινής πηγής,

θ η γωνία πρόσπτωσης,

k_d ο συντελεστής διάχυτης ανάκλασης.

- Διάχυτη συνιστώσα είναι σταθερή για επίπεδη επιφάνεια και φωτεινή πηγή στο άπειρο.

- Για πολλαπλές φωτεινές πηγές j : $I_d = k_d \cdot \sum_j I_{i,j} \cdot (\vec{L}_j \cdot \vec{N})$



Μοντέλο Φωτισμού Phong

- Κατευθυνόμενη ανάκλαση βασίζεται στο νόμο του καθρέπτη:

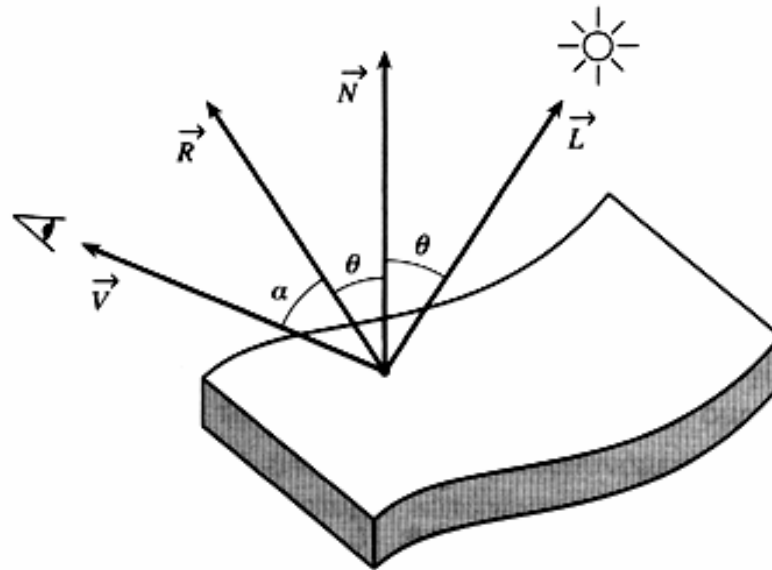
$$I_s = I_i \cdot k_s \cdot \cos^n a \quad 0 \leq k_s \leq 1$$

$$= I_i \cdot k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n \quad \vec{R}, \vec{V} \text{ μοναδιαία}$$

όπου a η γωνία μεταξύ \vec{V} και \vec{R}

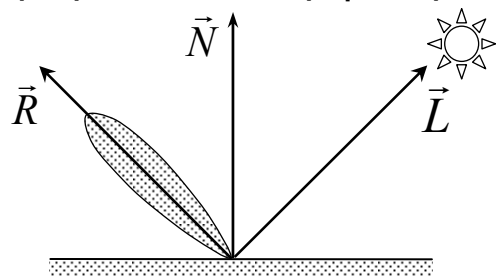
n αντιστοιχεί στην αδρότητα της επιφάνειας,

k_s ο συντελεστής κατευθυνόμενης ανάκλασης (κανονικά $f(\theta, \lambda)$).

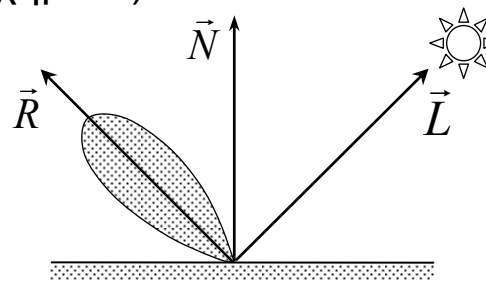


Μοντέλο Φωτισμού Phong

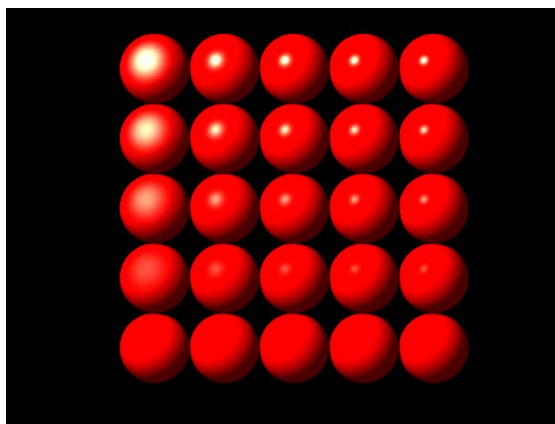
- Κατευθυνόμενη ανάκλαση παράγει την “αντανάκλαση” της φωτεινής πηγής μέσα στα αντικείμενα.
 - Ο όρος $\cos^n a$ προσεγγίζει τη διάχυση του ανακλούμενου φωτός
 - » μεγάλο $n \Rightarrow$ λεία επιφάνεια (σχήμα A)
 - » μικρό $n \Rightarrow$ αδρή επιφάνεια (σχήμα B)



Σχήμα A



Σχήμα B



Μοντέλο Φωτισμού Phong

- Εμμεσος φωτισμός έχει σταθερή τιμή στο μοντέλο Phong.
 - Αντικείμενα που δεν φωτίζονται απ' ευθείας από φωτεινή πηγή φαίνονται “μαύρα” χωρίς έμμεσο φωτισμό.

$$I_g = I_a \cdot k_a \quad 0 \leq k_a \leq 1$$

όπου I_a η ένταση του έμμεσου φωτισμού

k_a ο συντελεστής έμμεσου φωτισμού

- Τελικό μοντέλο Phong:

$$I = I_a + I_d + I_s = I_a \cdot k_a + I_i \cdot \left(k_d \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) + k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n \right)$$

- Αν παρατηρητής και φωτεινή πηγή είναι στο άπειρο, τότε \vec{L} και \vec{V} έχουν σταθερή τιμή για επίπεδες επιφάνειες.

Μοντέλο Φωτισμού Phong - Βελτιώσεις

- Μείωση έντασης φωτεινής πηγής ανάλογα με απόσταση d .

– Κανονικά $f(d) = \frac{1}{d^2}$ αλλά $f(d) = \frac{1}{d + d_0}$ δίνει καλά αποτελέσματα

$$I = I_a \cdot k_a + \frac{I_i}{d + d_0} \cdot \left(k_d \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) + k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n \right)$$

- Πολλαπλές φωτεινές πηγές:

$$I = I_a \cdot k_a + \sum_j \frac{I_{i,j}}{d + d_0} \cdot \left(k_d \cdot (\vec{L}_j \cdot \vec{N}) + k_s \cdot (\vec{R}_j \cdot \vec{V})^n \right)$$

- Εγχρωμη φωτεινή πηγή:

$$I_r = I_a \cdot k_{ar} + I_i \cdot \left(k_{dr} \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) + k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n \right)$$

$$I_g = I_a \cdot k_{ag} + I_i \cdot \left(k_{dg} \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) + k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n \right)$$

$$I_b = I_a \cdot k_{ab} + I_i \cdot \left(k_{db} \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) + k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n \right)$$

Υπολογισμός Κανονικού Διανύσματος

- Αν η εξίσωση του επιπέδου της επιφάνειας $ax+by+cz+d=0$ είναι γνωστή:
$$\vec{N} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$$
- Συνήθως χρησιμοποιούμε 3 ή περισσότερες κορυφές πολυγώνου, 3 τρόποι:
 - Martin-Newell.
 - Εξωτερικό γινόμενο.
 - Επίλυση εξίσωσης επιπέδου.
- Martin-Newell, κατάλληλη και για “μη επίπεδα” πολύγωνα:

$$a = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i\oplus 1})(z_i + z_{i\oplus 1})$$

$$b = \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i\oplus 1})(x_i + x_{i\oplus 1})$$

$$c = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i\oplus 1})(y_i + y_{i\oplus 1})$$

Υπολογισμός Κανονικού Διανύσματος

- Εξωτερικό γινόμενο, έστω $\bar{V}_{i-1}, \bar{V}_i, \bar{V}_{i+1}$ 3 διαδοχικές κορυφές:

$$\vec{N} = (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i) \times (\bar{V}_{i-1} - \bar{V}_i)$$

– Προσοχή στη φορά: $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

– Επέκταση και για μη επίπεδα πολύγωνα (μέσος όρος).

- Επίλυση εξίσωσης επιπέδου από 3 γνωστά, μη συγγραμμικά σημεία $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = -1$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = -1$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = -1$$

ή

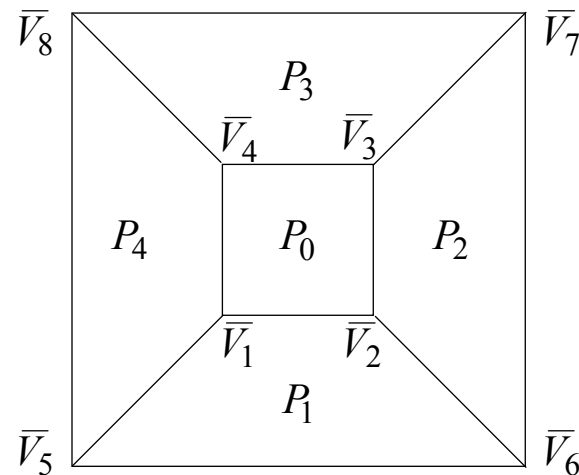
$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } [X][C] = [D] \quad \text{ΟΠΌΤΕ} \quad [C] = [X]^{-1}[D]$$

Υπολογισμός Κανονικού Διανύσματος σε κορυφές

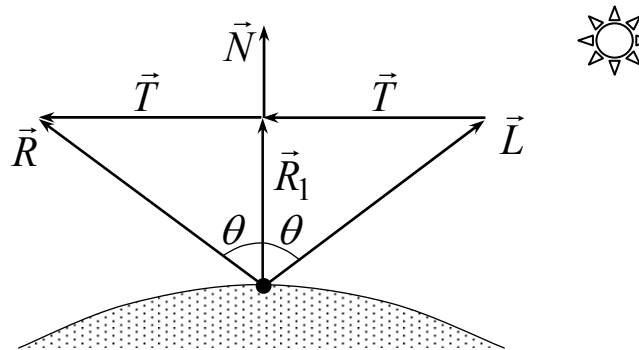
- “Κανονικό” διάνυσμα κορυφής = μ.ο. κανονικών διανυσμάτων εγγιζόντων επιφανειών:
 - Χρήσιμο για παρεμβολή.
- Αν είναι γνωστές οι εξισώσεις των εγγιζόντων επιφανειών (π.χ. για την \bar{V}_1)
$$\vec{N}_{v_1} = (a_0 + a_1 + a_4) \cdot \vec{i} + (b_0 + b_1 + b_4) \cdot \vec{j} + (c_0 + c_1 + c_4) \cdot \vec{k}$$
- Αν δεν είναι γνωστές οι εξισώσεις, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξωτερικά γινόμενα (π.χ. για την \bar{V}_1)

$$\vec{N}_{v_1} = (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \times (\bar{V}_4 - \bar{V}_1) + (\bar{V}_5 - \bar{V}_1) \times (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) + (\bar{V}_4 - \bar{V}_1) \times (\bar{V}_5 - \bar{V}_1)$$



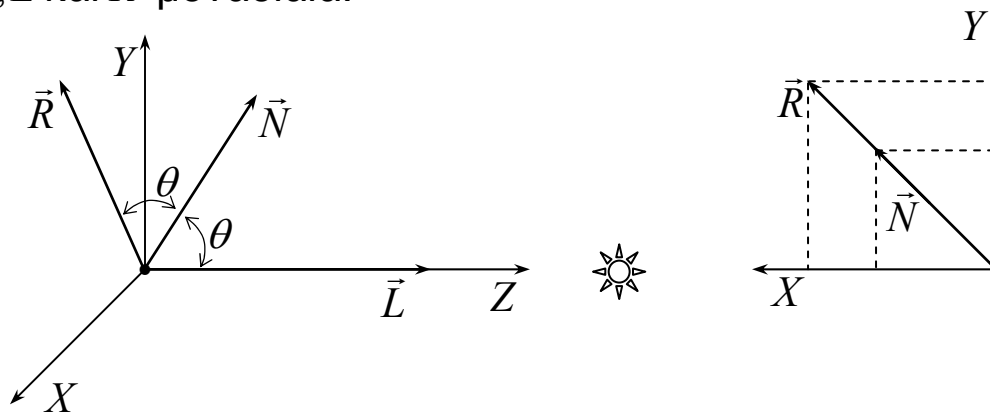
Υπολογισμός Διανύσματος \vec{R}

- Γενική περίπτωση. Παρατηρούμε ότι \vec{L} , \vec{N} και \vec{R} συνεπίπεδα και γωνίες (\vec{L}, \vec{N}) και (\vec{N}, \vec{R}) ίσες:
 - Εστω \vec{N} και \vec{L} μοναδιαία.
 - Εστω \vec{R}_1 η προβολή του \vec{R} στον \vec{N}
 $|\vec{R}_1| = |\vec{L}| \cdot \cos\theta = |\vec{L}|(\vec{N} \cdot \vec{L}) = \vec{N} \cdot \vec{L}$ αφού $|\vec{L}| = 1$
Αρα $\vec{R}_1 = \vec{N} \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L})$
 - Επίσης $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{T}$ και $\vec{T} = \vec{R}_1 - \vec{L}$
Οπότε $\vec{R} = 2\vec{R}_1 - \vec{L} = 2\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{L}) - \vec{L}$
 - Απαιτεί 6 πολ/μούς και 5 προσθέσεις (εκτελείται σε κάθε σημείο που εφαρμόζουμε το μοντέλο φωτισμού).



Υπολογισμός Διανύσματος \vec{R}

- Απλούστευση υπολογισμών αν φωτεινή πηγή πάνω στον Z και σημείο επιφάνειας ταυτίζεται με αρχή των αξόνων (Phong):
 - Παραδεκτή υπόθεση για 1 φωτεινή πηγή.
 - \vec{N}, \vec{L} και \vec{R} μοναδιαία.



- Προβολές \vec{R} και \vec{N} στο XY είναι συνευθειακές

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{N_x}{N_y} \quad (10.5)$$

Επίσης

$$N_z = \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 90^\circ)$$

$$R_z = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2N_z^2 - 1$$

Υπολογισμός Διανύσματος \vec{R}

Το \vec{R} είναι μοναδιαίο οπότε:

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 1 \quad \text{ή} \quad R_x^2 + R_y^2 = 1 - R_z^2 = 1 - \cos^2 2\theta \quad \text{ή}$$

$$R_y^2 \left(\frac{R_x^2}{R_y^2} + 1 \right) = 1 - \cos^2 2\theta \quad \text{ή} \quad R_y^2 \left(\frac{N_x^2}{N_y^2} + 1 \right) = 1 - \cos^2 2\theta \quad \text{ή}$$

$$\frac{R_y^2}{N_y^2} (N_x^2 + N_y^2) = 1 - \cos^2 2\theta \quad \text{ή}$$

$$\frac{R_y^2}{N_y^2} (1 - N_z^2) = 1 - \cos^2 2\theta \quad (\vec{N} \text{ μοναδιαίο})$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } 1 - \cos^2 2\theta &= 1 - (2\cos^2 \theta - 1)^2 = 1 - (2N_z^2 - 1)^2 \\ &= 1 - 4N_z^4 + 4N_z^2 - 1 = 4N_z^2(1 - N_z^2) \end{aligned}$$

Άρα:

$$R_y = 2N_z \cdot N_y$$

Οπότε με χρήση της (10.5) έχουμε :

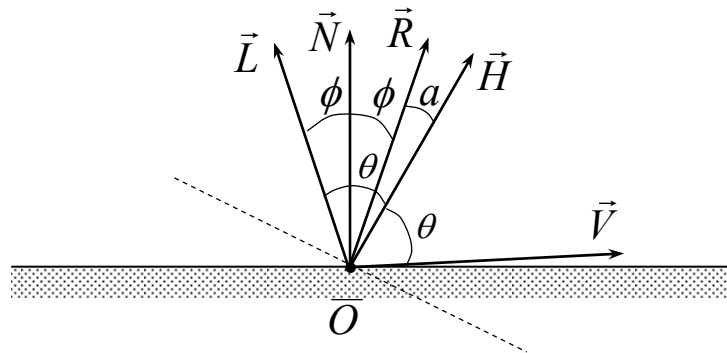
$$R_x = 2N_z \cdot N_x$$

– Απαιτεί 3 πολ/μούς και 1 πρόσθεση.

Υπολογισμός Διανύσματος \vec{R}

- Για πολλαπλές φωτεινές πηγές συμφέρει να ταυτίσουμε το \vec{N} με τον Z και το \bar{O} με το σημείο της επιφάνειας (μετασχηματισμοί):
 - Τότε, αν \vec{L} είναι το διάνυσμα μιας φωτεινής πηγής, έχουμε:

$$R_x = -L_x \quad R_y = -L_y \quad R_z = L_z$$
- Υπολογισμός \vec{R} μπορεί να αντικατασταθεί από $\vec{H} = (\vec{L} + \vec{V})/2$ (Blinn).



$$NOH = \phi + \alpha, \quad ROV = \theta + \alpha, \quad \theta = 2\phi + \alpha \Rightarrow ROV = 2 \cdot NOH$$

- Νέο μοντέλο φωτισμού (με προσαρμογή τιμής n):

$$I = I_a \cdot k_a + \frac{I_i}{d + d_0} \cdot \left(k_d (\vec{L} \cdot \vec{N}) + k_s (\vec{N} \cdot \vec{H})^n \right)$$

Μοντέλα & Αλγόριθμοι Φωτισμού

- Εμπειρικά Μοντέλα (Phong), προσθετικοί αλγόριθμοι:
 - Φθίνουσα φωτεινότητα (Warnock 1969).
 - Παρεμβολή φωτεινότητας (Gouraud 1971).
 - Ψευδοδιαφάνεια (Newell 1972).
 - Παρεμβολή κανονικού διανύσματος (Phong 1975).
- Μεταβατικά Μοντέλα, αλγόριθμοι Ray-tracing.
 - Χρήση αποτελεσμάτων οπτικής & φυσικής.
 - Παραμορφώσεις & διαθλάσεις με διαφανή αντικείμενα (Kay 1979).
 - Αναδρομικός αλγόριθμος Ray-tracing (Whitted 1980).
- Αναλυτικά Μοντέλα, αλγόριθμοι τύπου Radiosity:
 - Cook & Torrance 1982.
 - Radiosity.

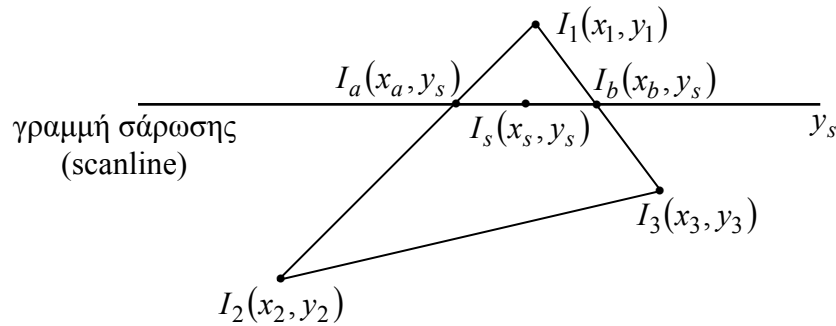
Αλγόριθμος Σταθερού Φωτισμού

- Βάση μοντέλου Phong:
 - Σταθερός φωτισμός για κάθε επιφάνεια.
 - Οχι κατευθυνόμενη ανάκλαση.
 - Σημειακή φωτεινή πηγή και παρατηρητής σε άπειρη απόσταση στον Z :
 - » $\vec{V} = \vec{L} = (0,0,1)$
 - $\vec{N} \cdot \vec{L} = N_z$ σταθερό για κάθε επιφάνεια.
 - Συνάρτηση φωτισμού γίνεται:
$$I = I_a \cdot k_a + I_i \cdot k_d \cdot N_z$$
 - Εντονες ασυνέχειες φωτισμού (Mach-Bands).



Αλγόριθμος Gouraud

- Βάση μοντέλου Phong:
 - Παρεμβολή φωτεινότητας κορυφών πολυγώνου.
 - Υπολογισμός φωτεινότητας στις κορυφές με μοντέλο Phong:
 - » Χρήση “κανονικών” διανυσμάτων κορυφών.
 - Scanline αλγόριθμος.



$$I_a = I_1 \frac{y_s - y_2}{y_1 - y_2} + I_2 \frac{y_1 - y_s}{y_1 - y_2}$$

$$= \frac{1}{y_1 - y_2} (I_1(y_s - y_2) + I_2(y_1 - y_s))$$

$$I_b = \frac{1}{y_1 - y_3} (I_1(y_s - y_3) + I_3(y_1 - y_s))$$

$$I_s = \frac{1}{x_b - x_a} (I_a(x_b - x_s) + I_b(x_s - x_a))$$

- Αυξητικός υπολογισμός

$$I_{s1} = \frac{1}{x_b - x_a} (I_a(x_b - x_{s1}) + I_b(x_{s1} - x_a))$$

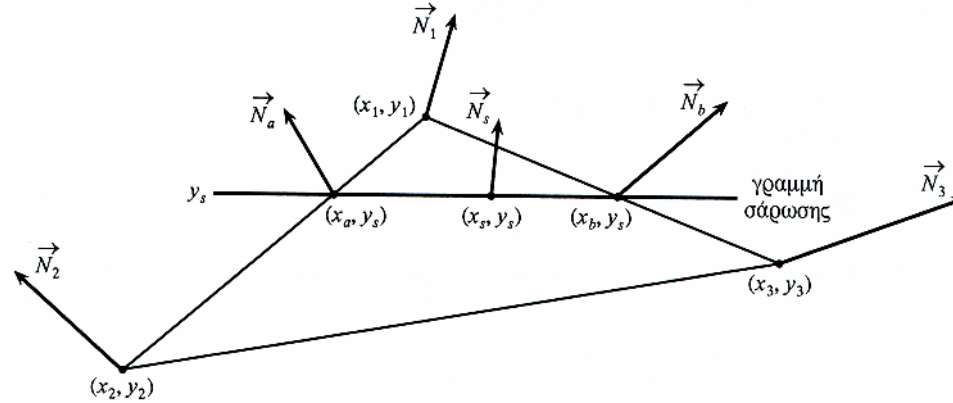
$$I_{s2} = \frac{1}{x_b - x_a} (I_a(x_b - x_{s2}) + I_b(x_{s2} - x_a))$$

$$\Delta I_s = I_{s2} - I_{s1} = \frac{x_{s2} - x_{s1}}{x_b - x_a} (I_b - I_a) = \frac{\Delta x}{x_b - x_a} (I_b - I_a) \quad \text{ή} \quad \Delta I_s = \frac{I_b - I_a}{x_b - x_a} \quad \text{για γειτονικά pixels } (\Delta x = 1)$$

- Οπτικό αποτέλεσμα αλγορίθμου Gouraud σαφώς καλύτερο σταθερού φωτισμού:
 - Mach-Bands 2ου βαθμού παραμένουν.
 - Κάποιες “αντανακλάσεις” χάνονται.

Αλγόριθμος Phong

- Υπολογισμός τιμής μοντέλου Phong σε κάθε σημείο:
 - Παρεμβολή κανονικών διανυσμάτων.



$$\vec{N}_a = \frac{1}{y_1 - y_2} (\vec{N}_1(y_s - y_2) + \vec{N}_2(y_1 - y_s))$$

$$\vec{N}_b = \frac{1}{y_1 - y_3} (\vec{N}_1(y_s - y_3) + \vec{N}_3(y_1 - y_s))$$

$$\vec{N}_s = \frac{1}{x_b - x_a} (\vec{N}_a(x_b - x_s) + \vec{N}_b(x_s - x_a))$$

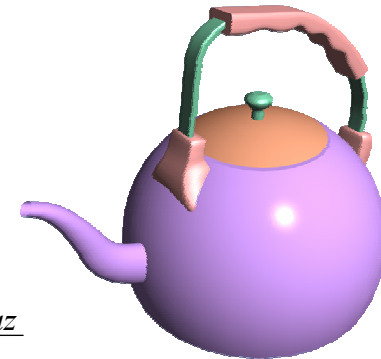
- Αυξητικός υπολογισμός.

$$N_{sx,n} = N_{sx,n-1} + \Delta N_{sx}$$

$$N_{sy,n} = N_{sy,n-1} + \Delta N_{sy}$$

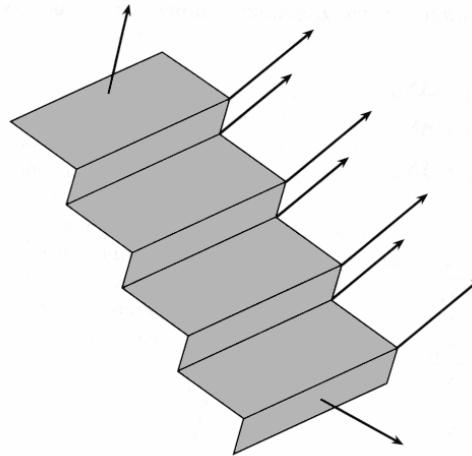
$$N_{sz,n} = N_{sz,n-1} + \Delta N_{sz}$$

$$\Delta N_{sx} = \frac{N_{bx} - N_{ax}}{x_b - x_a}, \quad \Delta N_{sy} = \frac{N_{by} - N_{ay}}{x_b - x_a}, \quad \Delta N_{sz} = \frac{N_{bz} - N_{az}}{x_b - x_a}$$



Βελτίωση Αλγορίθμου Phong

- Γραμμική παρεμβολή κανονικών διανυσμάτων όχι πάντα σωστή.



- Τετραγωνική παρεμβολή έχει καλύτερα αποτελέσματα (Overveld & Wyvill, 1997):
 - Εστω παρεμβολή μεταξύ \vec{N}_0 και \vec{N}_1 και \vec{d} το διάνυσμα διαφοράς θέσεων των \vec{N}_0 και \vec{N}_1

$$\vec{N}(s) = \vec{N}_0 + s \cdot \vec{A} + s^2 \cdot \vec{B} \quad 0 \leq s \leq 1$$

όπου

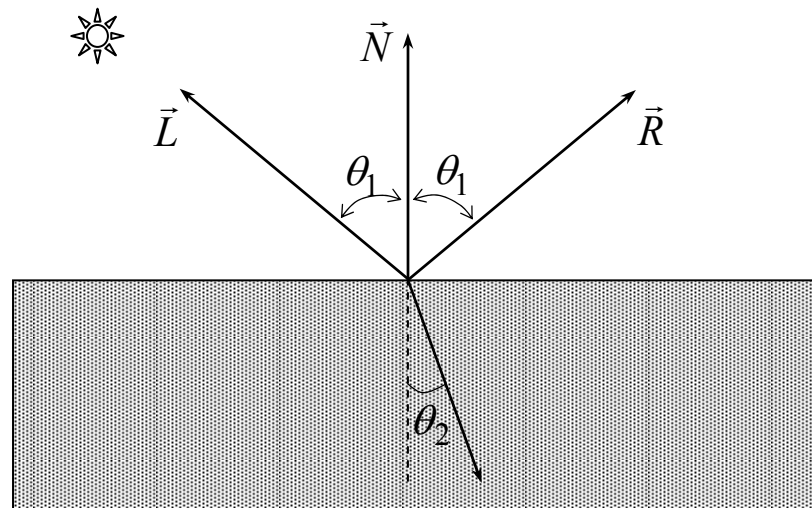
$$\vec{A} = \vec{N}_1 - \vec{N}_0 - \vec{B}$$

$$\vec{B} = 3 \left(\frac{\vec{N}_0 + \vec{N}_1 \cdot \vec{d}}{\vec{d}^2} \right) \cdot \vec{d}$$

$$\text{Ισχύει: } \vec{N}(0) = \vec{N}_0 \quad \text{και} \quad \vec{N}(1) = \vec{N}_1$$

Διαφάνεια

- Διαφανή σώματα διαθλούν φως:
 - Νόμος του Snell $n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$

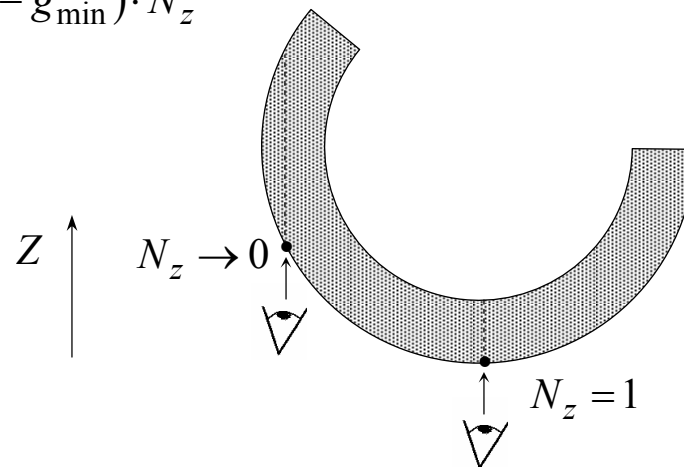


- Προς το παρόν αγνοούμε διάθλαση.

Διαφάνεια

- Χρήση σταθερού παράγοντα διαφάνειας σώματος g (Newell 1972):
 - Ενταση I_0 διαφανούς αντικειμένου συνδυάζεται με I_B όπισθεν αντικειμένου βάση g ($0 \leq g \leq 1$)
$$I = g \cdot I_B + (1 - g) \cdot I_0$$
 - $g=1 \Rightarrow$ πλήρως διαφανές (αόρατο), $g=0 \Rightarrow$ πλήρως αδιαφανές.
- Για εσωτερικά κενά διαφανή κοίλα αντικείμενα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κανονικό δάνυσμα:

$$g = g_{\min} + (g_{\max} - g_{\min}) \cdot N_z$$



- Καλύτερα αποτελέσματα με μη γραμμική παρεμβολή (Kay 1979)

$$g = g_{\min} + (g_{\max} - g_{\min}) \cdot (1 - (1 - |N_z|)^t)$$

Μοντέλο Cook & Torrance

- Προέκταση μοντέλου Phong με αποτελέσματα από Φυσική:
 - Καλύτερη προσομοίωση κατευθυνόμενης αντανάκλασης με μικροεπιφάνειες.
 - Βασίζεται στην προσπίπτουσα ροή E_i και όχι στην ένταση I_i .
 - Αλλαγή χρώματος στο σημείο ανάκλασης βάση νόμου Fresnel.
- Όχι μεγάλη διάδοση:
 - Υψηλό υπολογιστικό κόστος.
 - Phong προγενέστερα διαδεδομένο και ικανοποιητικό.
- $BRDF$ χωρίζεται σε διάχυτο και κατευθυνόμενο τμήμα:

$$BRDF = \frac{I_r}{E_i} = k_d \cdot R_d + k_s \cdot R_s \quad 0 \leq k_d, k_s \leq 1 \quad \& \quad k_d + k_s = 1$$

Όμως ισχύει:

$$E_i = I_i \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L}) \cdot d\Omega$$

Οπότε:

$$I_r = I_i \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L}) \cdot d\Omega (k_d \cdot R_d + k_s \cdot R_s)$$

Προσθέτοντας τον έμμεσο φωτισμό:

$$I_r = I_a \cdot k_a + I_i \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L}) \cdot d\Omega (k_d \cdot R_d + k_s \cdot R_s)$$

Άρα φωτεινότητα σημείου εξαρτάται από προσπίπτουσα ένταση I_i αλλά και από το μέγεθος της φωτεινής πηγής $d\Omega$.

Μοντέλο Cook & Torrance

- Μια επιφάνεια χαρακτηρίζεται από την κατανομή μικροσκοπικών καθρεπτών (μικροεπιφάνειες):
 - Αν όλες έχουν κατεύθυνση \vec{N} επιφάνειας, τότε αυτή είναι πολύ γυαλιστερή.
 - Αν έχουν διάσπαρτες κατευθύνσεις, τότε η επιφάνεια είναι ματ.
- Στο μοντέλο Cook & Torrance η R_d είναι σταθερή, ενώ η R_s καθορίζει τη συμπεριφορά των μικροεπιφανειών:

$$R_s = \frac{D \cdot G \cdot F}{(\vec{N} \cdot \vec{V}) \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L}) \cdot \Pi}$$

- $(\vec{N} \cdot \vec{V})$ αυξάνει τιμή R_s καθώς αυξάνεται η κλίση της επιφάνειας ως προς την κατεύθυνση παρατήρησης (περισσότερες ορατές μικροεπιφάνειες ανά μονάδα επιφάνειας προβολής).
- $(\vec{N} \cdot \vec{L})$ αντίστοιχο για φωτεινή πηγή.
- D (κατανομή κλίσεων μικροεπιφανειών), G (γεωμετρική παράμετρος), F (Fresnel) στα παρακάτω.

Μοντέλο Cook & Torrance – Παράμετρος D

- D δίνει ποσοστό μικροεπιφανειών που συμμετέχουν στην ανάκλαση (το κανονικό τους διάνυσμα είναι ίσο με $\vec{H} = (\vec{L} + \vec{V})/2$)

- Τυπικά παραδείγματα συναρτήσεων D :

$$D_1 = \cos^c \beta \quad c \geq 0 \quad (\text{κατανομή Phong})$$

$$D_2 = k \cdot e^{-(\beta/m)^2} \quad (\text{κατανομή Gauss})$$

$$D_3 = \frac{1}{m^2 \cdot \cos^4(\beta)} \cdot e^{(-\tan(\beta)/m)^2} \quad (\text{κατανομή Beckmann})$$

όπου

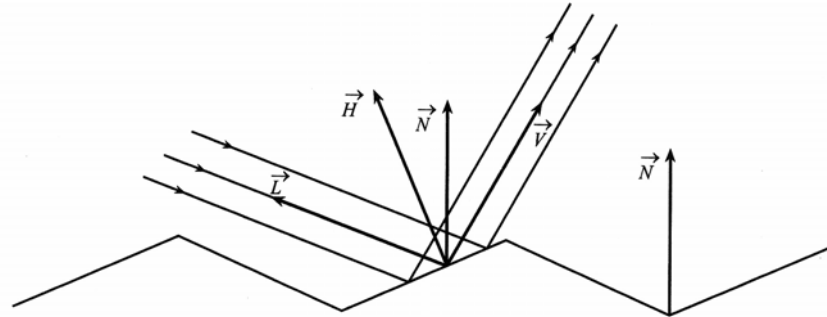
β η γωνία μεταξύ \vec{N} και \vec{H}

$m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^2}$ ο τετραγωνικός μέσος των κλίσεων των μικροεπιφανειών,
 s_i = κλίση μικροεπιφάνειας i .

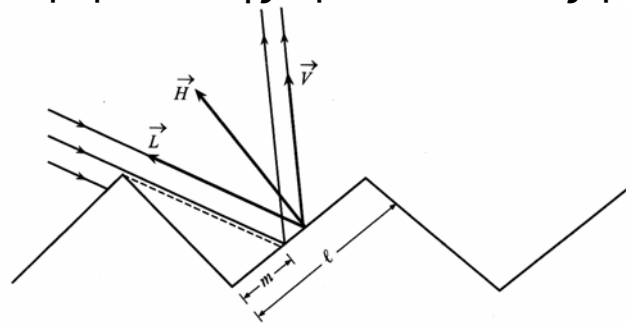
- Όλες οι D_i παίρνουν μέγιστη τιμή τους για $\beta = 0^\circ$ ($\vec{N} = \vec{H}$).

Μοντέλο Cook & Torrance – Παράμετρος G

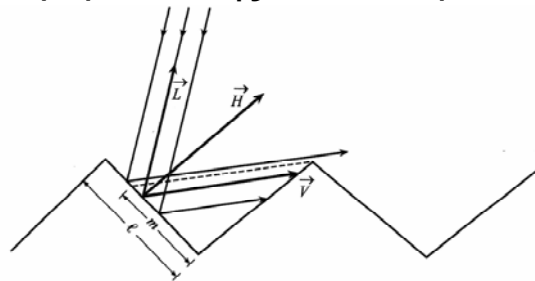
- Παράγοντας ελάττωσης φωτεινότητας λόγω γεωμετρίας επιφάνειας (όχι απόλυτα επίπεδη):
 - Θεωρούμε πτυχές V-μορφής.



- Απώλεια λόγω παρεμπόδισης προσπίπτοντος φωτός.

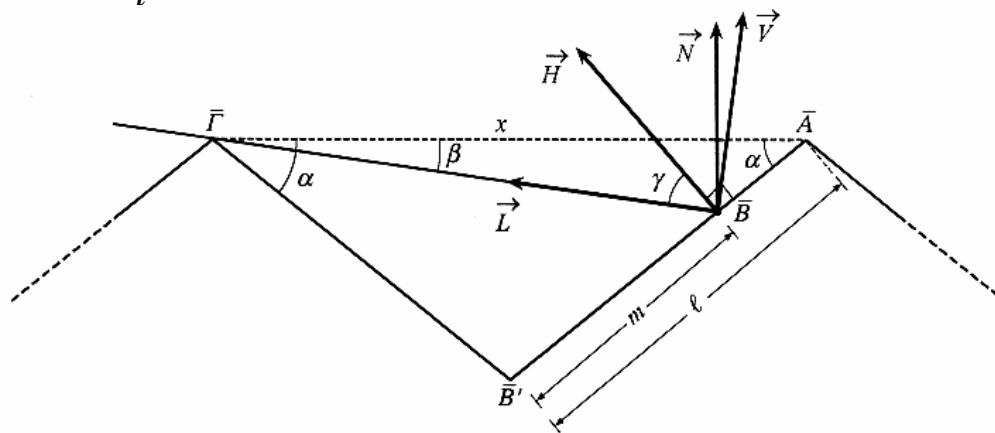


- Απώλεια λόγω παρεμπόδισης ανακλούμενου φωτός.



Μοντέλο Cook & Torrance – Παράμετρος G

- $G = \min(G_\beta, G_\gamma, 1)$
 - Ποσοστό μικροεπιφάνειας που δεν βρίσκεται σε “σκιά” $G_\beta = 1 - \frac{m}{l}$
 - Ποσοστό μικροεπιφάνειας του οποίου το ανακλούμενο φως δεν παρεμποδίζεται $G_\gamma = 1 - \frac{m}{l}$
 - Θεωρούμε μόνο μικροεπιφάνειες με κανονικό διάνυσμα ίσο με \vec{H} (οι υπόλοιπες φιλτράρονται από παράμετρο D).
 - Υπολογισμός $\frac{m}{l}$ για περίπτωση G_β (G_γ αντίστοιχη).



Μοντέλο Cook & Torrance – Παράμετρος G

Από το τρίγωνο $\overline{AB\Gamma}$ έχουμε: $\frac{x}{l-m} = \frac{\sin(\pi/2 + \gamma)}{\sin \beta}$

Από το τρίγωνο $\overline{AB'\Gamma}$ έχουμε: $\frac{x}{l} = \frac{\sin(\pi - 2a)}{\sin a}$

Διαιρώντας τη δεύτερη σχέση με την πρώτη και αντικαθιστώντας $\beta = \pi/2 - a - \gamma$:

$$\frac{l-m}{l} = 1 - \frac{m}{l} = G_\beta = \frac{\sin(\pi - 2a) \cdot \sin(\pi/2 - a - \gamma)}{\sin a \cdot \sin(\pi/2 + \gamma)}$$

Ισχύει:

$$\sin(\pi - 2a) = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\sin(\pi/2 - (a + \gamma)) = \cos(a + \gamma)$$

$$\sin(\pi/2 + \gamma) = \cos \gamma$$

Άρα:

$$G_\beta = \frac{2 \cdot \sin a \cdot \cos a \cdot \cos(a + \gamma)}{\sin a \cdot \cos \gamma} = \frac{2 \cos a \cdot \cos(a + \gamma)}{\cos \gamma}$$

Εάν τα \vec{N} , \vec{H} και \vec{V} είναι κανονικοποιημένα τότε ισχύουν:

$$\cos \gamma = \vec{H} \cdot \vec{L}, \quad \cos a = \vec{H} \cdot \vec{N}, \quad \cos(a + \gamma) = \vec{L} \cdot \vec{N}$$

Άρα θα έχουμε:

$$G_\beta = \frac{2(\vec{H} \cdot \vec{N}) \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N})}{(\vec{H} \cdot \vec{L})}$$

Μοντέλο Cook & Torrance – Παράμετρος F (Fresnel)

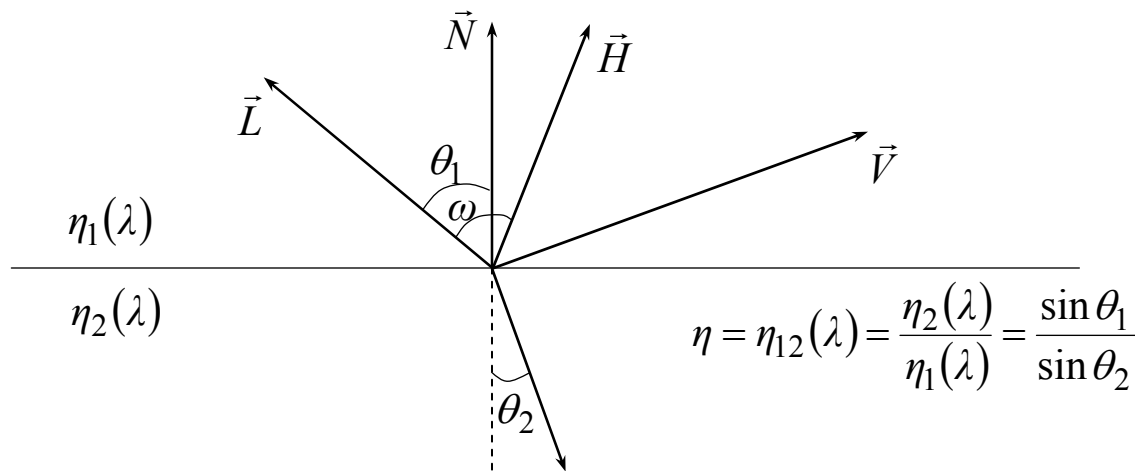
- Χρώμα αντανάκλασης είναι συνδυασμός χρώματος αντικειμένου και χρώματος φωτεινής πηγής:

- Συνάρτηση γωνίας πρόσπτωσης ω ως προς \vec{H} και μήκος κύματος λ :

$$F = F(\omega, \lambda) = \frac{(g - c)^2}{2(g + c)^2} \cdot \left(1 + \frac{(c(g + c) - 1)^2}{(c(g - c) + 1)^2} \right)$$

όπου $c = \cos(\omega) = \vec{L} \cdot \vec{H} = \vec{V} \cdot \vec{H}$

$g = \sqrt{\eta^2 + c^2 - 1}$ η ο συντελεστής διάθλασης που εξαρτάται από το λ



- Χρώμα αντικειμένου για $\omega = 0^\circ$. Πράγματι η F παίρνει την min τιμή της: $F(0, \lambda) = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}$

- Χρώμα φωτεινής πηγής για $\omega = 90^\circ$ (ο παρατηρητής τη βλέπει κατ' ευθείαν):

$$F(90, \lambda) = 1$$

Μοντέλο Cook & Torrance – Παράμετρος F (Fresnel)

- Για τυχαίο ω μπορεί να γίνει παρεμβολή μεταξύ χρώματος αντικειμένου και φωτεινής πηγής:

$$c_{\omega}^i = c_0^i + (c_{90}^i - c_0^i) \cdot \frac{\max(0, F(\omega, \lambda) - F(0, \lambda))}{1 - F(0, \lambda)}$$

όπου

$$i \in \{R, G, B\}$$

c_0^i το ποσοστό χρώματος i του αντικειμένου ($\omega = 0^\circ$)

c_{90}^i το ποσοστό χρώματος i της φωτεινής πηγής ($\omega = 90^\circ$)

- Ο δείκτης διάθλασης η συνήθως δεν είναι γνωστός:
 - Μπορεί να υπολογισθεί πειραματικά αν βρεθεί η τιμή της F για κάποιο ω
π.χ. $\omega = 0^\circ$

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{F(0, \lambda)}}{1 - \sqrt{F(0, \lambda)}}$$