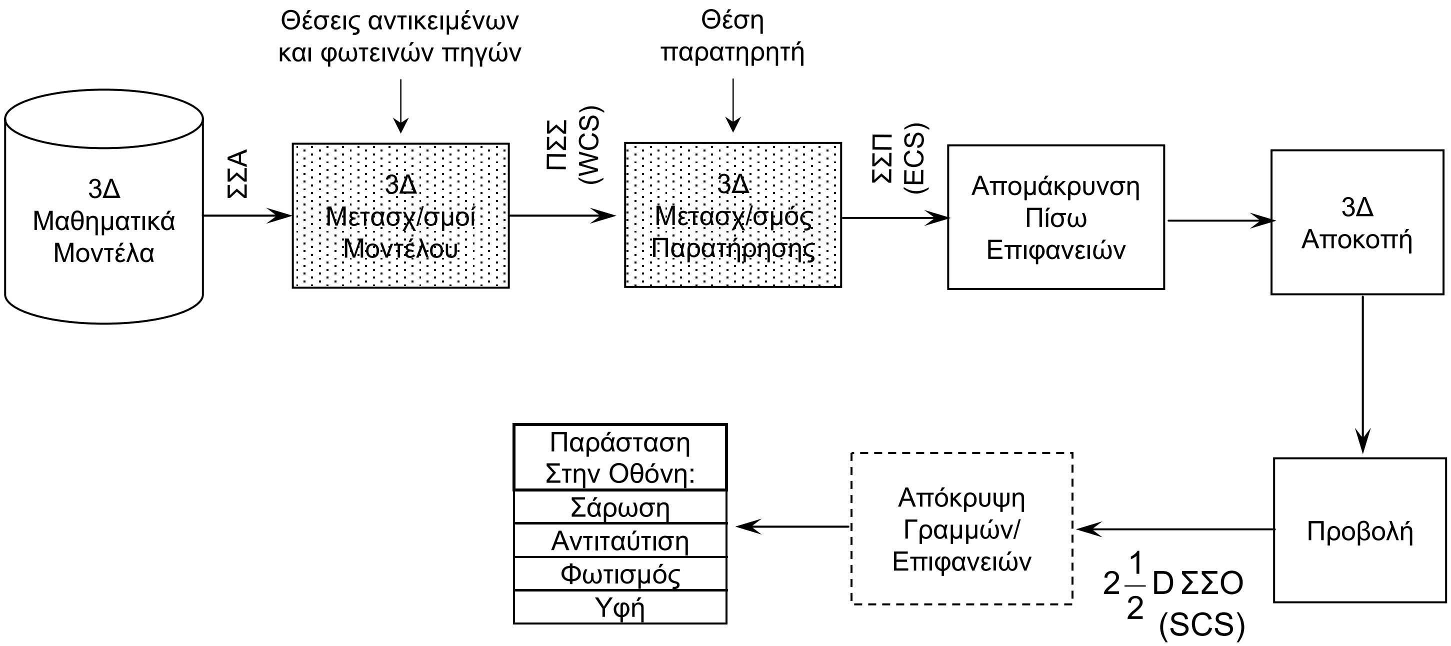
Μετασχηματισμοί 2Δ & 3Δ

- Περιγράφονται σαν σύνθεση βασικών: μετατόπιση, αλλαγή κλίμακας,περιστροφή, στρέβλωση
- Χωρίζονται σε γεωμετρικούς (εδώ) και αξόνων (αντίστροφοι)

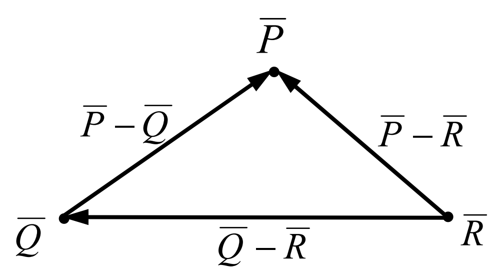


Σημεία & Διανύσματα

- $\mathbf{E}^3$ ο 3Δ Ευκλείδιος χώρος σημείων, $\overline{P}$ σημείο
- $\mathbf{R}^3$ ο 3Δ Ευκλείδιος χώρος διανυσμάτων, $\vec{v}$ διάνυσμα
- Ορισμοί:

1. $\forall\ \overline{P}_1, \overline{P}_2 \in \mathbf{E}^3, \exists$ ένα $\vec{u} \in \mathbf{R}^3 \mid \vec{u} = \overline{P}_2 - \overline{P}_1$
2. $\forall\ \overline{P} \in \mathbf{E}^3, \vec{u} \in \mathbf{R}^3 \mid \overline{P} + \vec{u} = \overline{Q} \in \mathbf{E}^3$

   $\vec{u} = \overline{P}_2 - \overline{P}_1$, για άπειρα ζεύγη, $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ αφού $\vec{u} = (\overline{P}_2 + \vec{x}) - (\overline{P}_1 + \vec{x})$
3. $\forall\ \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R} \in \mathbf{E}^3 \mid (\overline{P} - \overline{Q}) + (\overline{Q} - \overline{R}) = \overline{P} - \overline{R}$



Διανυσματικοί Χώροι

- Σε ένα διανυσματικό χώρο *Δ (*π.χ. **R**^{3}) ορίζονται 2 πράξεις
  - Διανυσματική πρόσθεση $\vec{\alpha}+\vec{b}$
  - Βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\Upsilon \cdot \underset{\rightarrow}{\alpha}$
- Ιδιότητες διανυσματικής πρόσθεσης $(\vec{\alpha},\, \vec{b},\, \vec{c} \;\in\; \Delta):$
  - Αντιμεταθετικότητα : $\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{\alpha}$
  - Προσεταιρισμός : $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
  - Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου $\vec{0}\in \Delta:\ \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
  - Ύπαρξη αντιθέτου: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
- Ιδιότητες βαθμωτού πολλαπλασιασμού $(\vec{a},\vec{b}\in \Delta,\ \lambda,\ \mu, 1\in \mathbf{R})$
  - Επιμερισμός β.π. ως προς πρόσθεση: $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{b})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{b}$
  - Επιμερισμός πρόσθεσης ως προς β.π. : $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$
  - Προσεταιρισμός: $(\lambda\mu)\vec{\alpha}=\lambda(\mu\vec{\alpha})$
  - $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Διανυσματικοί Χώροι

- Παραδείγματα
  - 2Δ & 3Δ Ευκλείδιοι διανυσματικοί χώροι
    π.χ. για $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \alpha_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
  - πολυώνυμα βαθμού *κ*
- Γραμμικός συνδυασμός $\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_m \in \Delta$: $\vec{y} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{x}_m$
- Γραμμική ανεξαρτησία $\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_m \in \Delta$:
  - υπάρχει μόνο αν η $\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{x}_m = \vec{0}$ έχει μόνη λύση την μηδενική $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$
  - π.χ. τα $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$ του $\mathbf{E}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
  - Αν $\vec{y} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{x}_m$ και $\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε η έκφραση του $\vec{y}$ είναι μοναδική

Διανυσματικοί Χώροι

- Βάση: σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων
  - Πλήθος τους καλείται διάσταση του διανυσματικού χώρου. Έστω $\mathbf{E}^3$,$\mathbf{R}^3$.
  - Ύπαρξη πολλαπλών βάσεων π.χ. (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) είναι επίσης βάση $\mathbf{E}^3$.
  - Αν $\vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ όπου $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι βάση, τότε (x, y, z) ονομάζονται συντεταγμένες
  - $(\overline{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ονομάζεται σύστημα συντεταγμένων όπου $\overline{O}$ σταθερή αρχή και $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ βάση. Δεξιόστροφα, αριστερόστροφα.
  - $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ορίζουν άξονες συντεταγμένων.
- Μήκος διανύσματος $\vec{v} = (x, y, z)$ ορίζεται $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - Απόσταση μεταξύ $\overline{P_1}$ και $\overline{P_2}$ ορίζεται $|\overline{P_2} - \overline{P_1}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Εσωτερικό Γινόμενο

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$
  - 3Δ Ευκλείδιος: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z$
- Ιδιότητες
  - Συμμετρική: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
  - $\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = 0$
  - Διγραμμική: $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \alpha \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + a(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- Κανονικοποίηση: $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. $\vec{v}'$ είναι μοναδιαίο.
- Υπολογισμός γωνίας θ μεταξύ $\vec{v}$ και $\vec{w}$
  - Ισχύει $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$
  - Άρα $\theta = \cos^{-1}(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|})$ ή $\theta = \cos^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{w})$ αν $\vec{v}, \vec{w}$ μοναδιαία

Εξωτερικό Γινόμενο

- Στον 3Δ Ευκλείδιο χώρο είναι $\vec{v} \times \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$
  - $\vec{v} \times \vec{w}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν το $\vec{v}$ και $\vec{w}$
  - Αντιμεταθετική δεν ισχύει: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

Συσχετισμένοι (Affine) Μετασχηματισμοί

- Συσχετισμένος (ή βαρυκεντρικός) συνδυασμός σημείων $\overline{P_0} \ldots \overline{P_n} \in \mathbf{E}^3$

$$\overline{P} = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{P_j} \text{ όπου } \alpha_0 \ldots \alpha_n \in \mathbf{R} \text{ και } \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{n}} a_j = 1$$

  - Αποτέλεσμα είναι σημείο $\overline{P} \in \mathbf{E}^3$
  - $a_0 \ldots a_n$ ονομάζονται συσχετισμένες συντεταγμένες του $\overline{P}$ αναφορικά με τα $\overline{P_0} \ldots \overline{P_n}$
  - Ένας συσχετισμένος συνδυασμός είναι κυρτός αν επιπλέον $a_j \geq 0$
  - Αποτέλεσμα $\overline{P}$ κυρτού συνδυασμού εντός της κυρτής περιβάλλουσας των $\overline{P_j}$
- Συσχετισμένος Μετασχηματισμός $\Phi : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ που αφήνει συσχετισμένους συνδυασμούς αναλλοίωτους

$$\Phi(\overline{P}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \Phi(\overline{P_j})$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Π.χ. εφαρμογή συσχετισμένου μετασχηματισμού πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα s απεικονίζει το μέσο του στο μέσο της συσχετισμένης εικόνας Φ(s)
- Συσχετισμένος μετασχηματισμός με μορφή πίνακα

  $\Phi(\overline{P}) = A\overline{P} + \bar{t}$ όπου αν $\overline{P} \in \mathbf{E}^3$ τότε A *είναι πίνακας 3x3*

- Απόδειξη

$$\Phi\left(\sum_{j=0}^{n} a_j \overline{P}_j\right) = A\left(\sum_{j=0}^{n} a_j \overline{P}_j\right) + \vec{t}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j A\overline{P}_j + \sum_{j=0}^{n} a_j \vec{t}$$

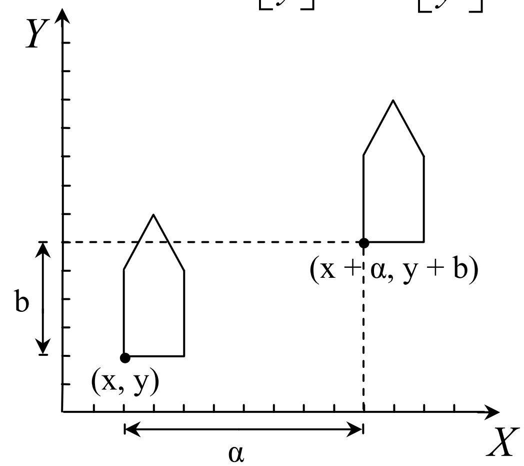
$$= \sum_{j=0}^{n} a_j (A\overline{P}_j + \vec{t}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \Phi(\overline{P}_j)$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

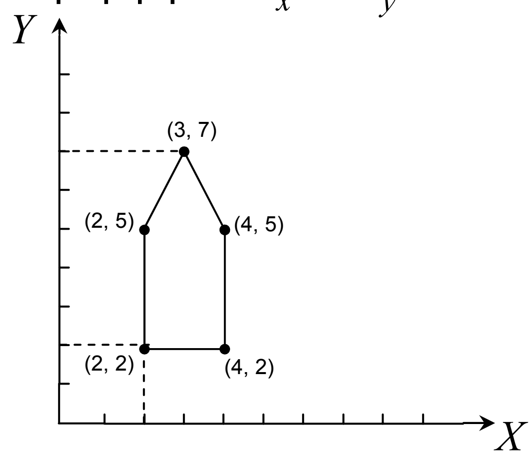
- Γραφικά: συσχετισμένοι μετασχηματισμοί
  - Μετατόπιση $T(\overline{P}) = I\overline{P} + \vec{d}$ όπου I μοναδιαίος 3×3 και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$ το διάνυσμα μετατόπισης
  - Στροφή (έστω γύρω από z-άξονα κατά γωνία φ) $R(\overline{P}) = R_{z,\varphi}\overline{P}$
    όπου $R_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Αλλαγή κλίμακας $S(\overline{P}) = D\overline{P}$ όπου $D = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$
  - Στρέβλωση (έστω στις x και y με z σταθερή) $SH(\overline{P}) = SH_{x,y}\overline{P}$
    όπου $SH_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Οποιοσδήποτε συσχετισμένος μετασχηματισμός μπορεί να δημιουργηθεί με συνδυασμό των παραπάνω τεσσάρων.

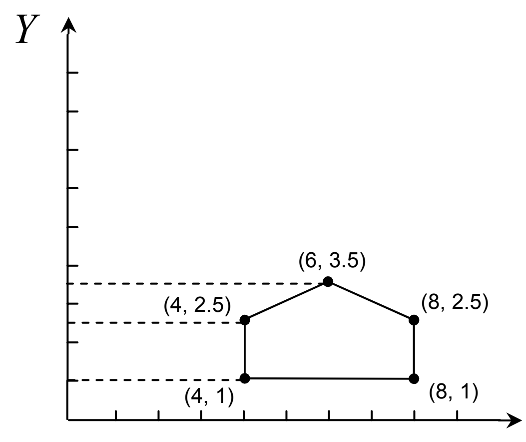
Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 2Δ

- Μετατόπιση $\overline{P}' = \overline{P} + \vec{d}$ όπου $\overline{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\overline{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$



- Αλλαγή κλίμακας $\overline{P}' = S(s_x, s_y)\overline{P}$ όπου $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$
  - ομοιόμορφη αν $s_x = s_y$



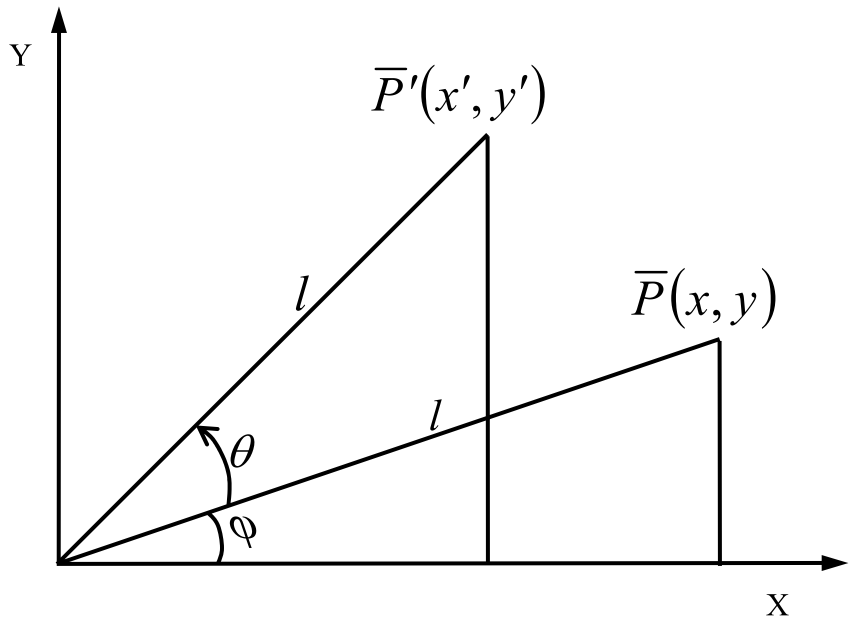


Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 2Δ

- Στροφή κατά γωνία θ (+ve αντίθετα από φορά δεικτών ρολογιού)

$$x' = l\cos(\varphi + \theta) = l(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = l\sin(\varphi + \theta) = l(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

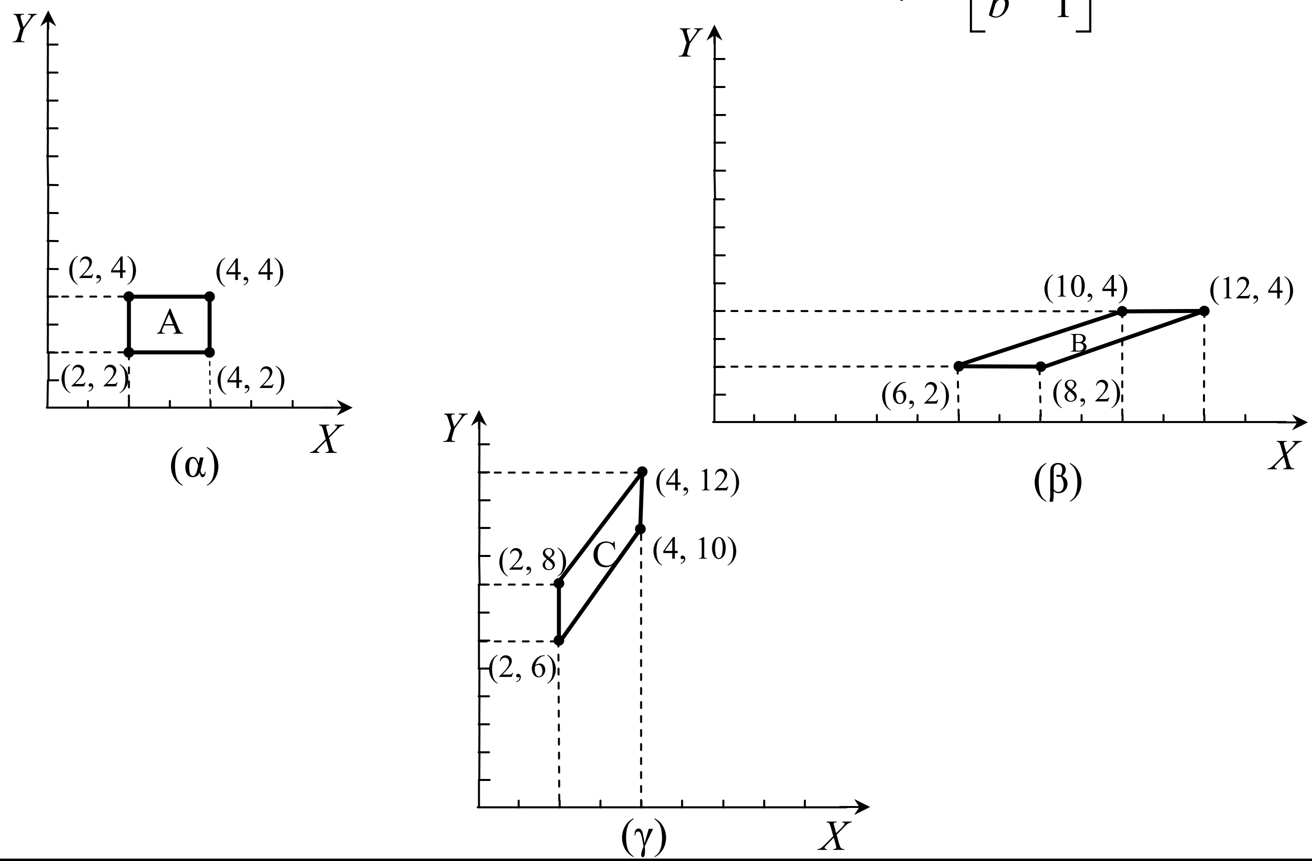


$$\overline{P}' = R(\theta)\cdot\overline{P} \text{ με } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 2Δ

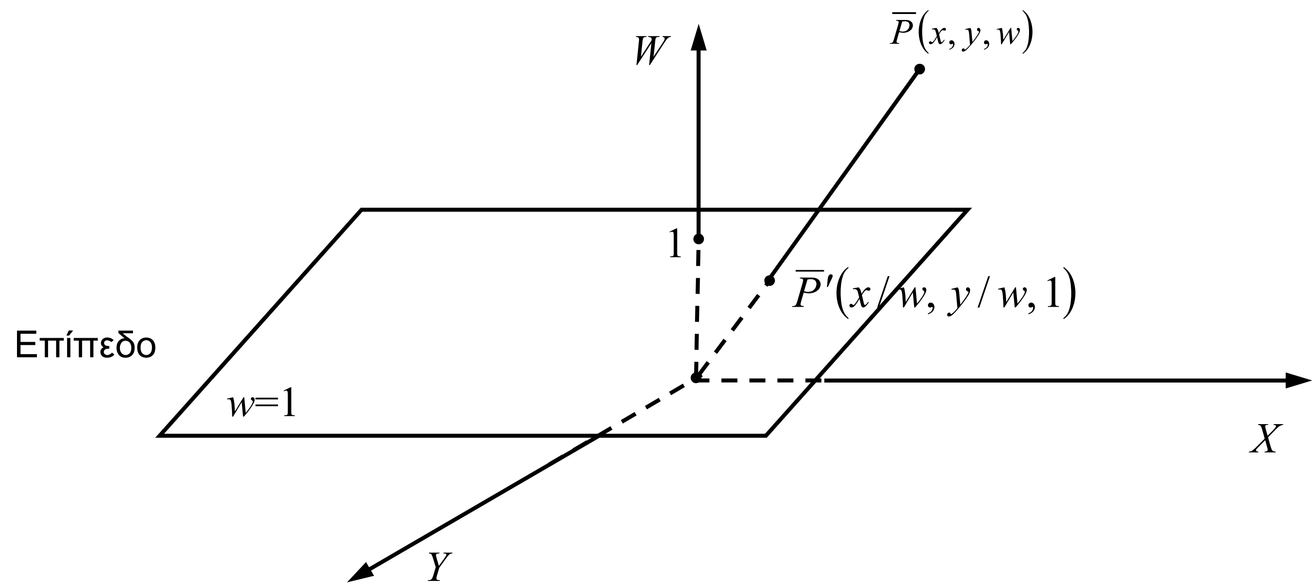
- Στρέβλωση κατά X άξονα με παράγοντα a $\overline{P}' = SH_x \cdot \overline{P}$ με $SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  δηλ. $x' = x + ay \quad y' = y$

- Στρέβλωση κατά Y άξονα με παράγοντα b $\quad SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$



Ομογενείς Συντεταγμένες

- Προβλήματα
  - Μεταφορά δεν υλοποιείται με πολ/μό πινάκων
  - Ύπαρξη σταθερού σημείου $\overline{O}$ για όλους τους μετασχηματισμούς $M \cdot \overline{O} = \overline{O} \quad \forall M$
- Ομογενείς συντεταγμένες $(x, y) \rightarrow (x, y, w)$ με $w \neq 0$
  - (x, y, w) παριστάνει σημείο $(x/w, y/w) \in \mathbf{E}^2$
  - Άπειρες τριάδες για κάθε σημείο του $\mathbf{E}^2$
  - Βασική παράσταση: $w = 1 \quad (x, y, 1)$



Ομογενείς Συντεταγμένες

- Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί: πίνακες 3x3
- Μεταφορά $\overline{P}' = T(\vec{d}) \cdot \overline{P}$ με $T(\vec{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $T^{-1}(\vec{d}) = T(-\vec{d})$
  - Σύνθεση: $T(\vec{d}_1) \cdot T(\vec{d}_2) \cdot \overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overline{P}$
- Αλλαγή κλίμακας $\overline{P}' = S(s_x, s_y) \cdot \overline{P}$ με $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $S^{-1}(s_x, s_y) = S(1/s_x, 1/s_y)$
  - Σύνθεση: $S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot \overline{P} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overline{P}$
  - Αν $s_x < 1$ σμίκρυνση και πλησίασμα στο $\overline{O}$, παρομοίως για s_y

Ομογενείς Συντεταγμένες

- Στροφή $\overline{P}' = R(\theta)\cdot\overline{P}$ με $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
  - $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)=R^{T}(\theta)$
  - Σύνθεση: $R(\theta_1)\cdot R(\theta_2)\cdot\overline{P}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\overline{P}=R(\theta_1+\theta_2)\cdot\overline{P}$

- Στρέβλωση

$$SH_x=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad SH_y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Σύνθεση Μετασχηματισμών

- Π.χ. αλλαγή κλίμακας ως προς $\overline{C} = (c_x, c_y, 1)$
  - Μεταφορά κατά $-\vec{c} \quad (-\vec{c} = \overline{O} - \overline{C})$
  - Αλλαγή κλίμακας κατά $s_{x,} s_y$
  - Μεταφορά κατά $\vec{c} \quad (\vec{c} = \overline{C} - \overline{O})$
  - $S = T(\vec{c}) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-\vec{c})$
- Σειρά έχει σημασία (αντιμεταθετική δεν ισχύει γενικά)
  - Πρώτος που εφαρμόζεται γράφεται τελευταίος
- Σύνθεση είναι πολύ αποδοτική στα γραφικά
- Ισχύουν

α) $T(x_1, y_1) \cdot T(x_2, y_2) = T(x_2, y_2) \cdot T(x_1, y_1) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

β) $S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot S(s_{x2}, s_{y2}) = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) = S(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2})$

γ) $R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$

δ) $S(s_x, s_y) \cdot R(\theta) = R(\theta) \cdot S(s_x, s_y)$ μόνο εάν $s_x = s_y$

Γεωμετρικές Ιδιότητες

- $\forall$ συσχετισμένο μετασχηματισμό F και σημεία $\overline{P}, \overline{Q}$ ισχύει

  $F\left(\lambda\overline{P} + (1-\lambda)\overline{Q}\right) = \lambda F\left(\overline{P}\right) + (1-\lambda)F\left(\overline{Q}\right)$ για $0 \le \lambda \le 1$

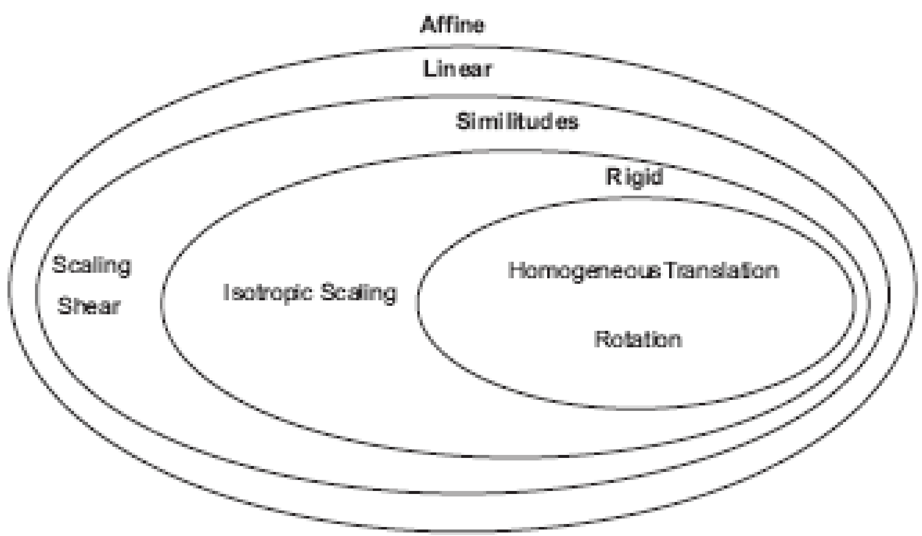
  - $\lambda\overline{P} + (1-\lambda)\overline{Q}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $\overline{P}$ και $\overline{Q}$
  - Άρα η F παράγει πάλι ένα ευθ. τμήμα
  - Σχέση $\lambda/(1-\lambda)$ παραμένει αναλοίωτη από F
  - Άρα αρκεί απεικόνιση άκρων μόνο
  - Ακόμα παράλληλες ευθείες παραμένουν παράλληλες
  - π.χ. $F \in \{T, S, R, SH_x, SH_y\}$

- $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος αν
  - $|\vec{\alpha}_{1*}| = 1 \quad |\vec{\alpha}_{2*}| = 1$
  - $\vec{\alpha}_{1*} \cdot \vec{\alpha}_{2*} = 0$
  - Ορίζουσα $(A) = 1$

Γεωμετρικές Ιδιότητες

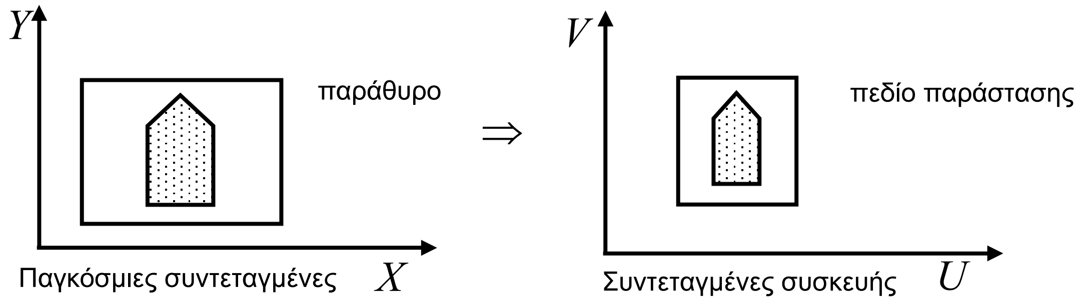
- $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μετασχηματισμός ομοιότητας αν $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος
  - Ένας μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί αναλοίωτα μήκη & γωνίες
  - π.χ. μοναδιαίο τεράγωνο ➲ μοναδιαίο τετράγωνο
  - Οποιαδήποτε σύνθεση T & R είναι μετασχηματισμός ομοιότητας
  - Αν στη σύνθεση υπάρχουν S & SH έχουμε μετασχηματισμό συσχετισμένο αλλά όχι ομοιότητας
    - » Διατηρείται παραλληλία ευθειών όχι όμως μήκη & γωνίες

Κατηγοριοποίηση Μετασχηματισμών

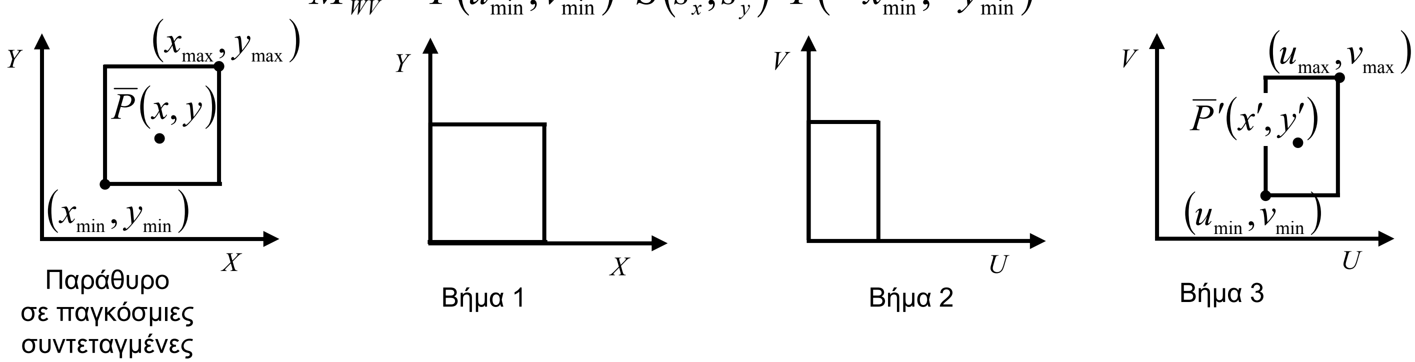


2Δ Μετασχηματισμός Παρατήρησης

- Δημιουργία εικόνας στο ΠΣΣ (WCS), απεικόνιση στο ΣΣΟ (PDC)
  - Χρήστης ορίζει παράθυρο WCS και πεδίο παρατήρησης PDC



- Υπολογισμός M_{WV} από $(x_{\min}, y_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}), (u_{\min}, v_{\min}), (u_{\max}, v_{\max})$
  - $T(-x_{\min}, -y_{\min})$
  - $S(s_x, s_y)$ με $s_x = \dfrac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$ $\quad s_y = \dfrac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}$
  - $T(u_{\min}, v_{\min})$
  - $M_{WV} = T(u_{\min}, v_{\min}) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_{\min}, -y_{\min})$



2Δ Μετασχηματισμός Παρατήρησης

- $$M_{WV} = \begin{bmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & u_{\min} - \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} x_{\min} \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & v_{\min} - \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Αλλοιώσεις σχημάτων αν $s_x \neq s_y$ ή $a_w \neq a_v$
  με $a_w = \frac{w_{dx}}{w_{dy}}, a_v = \frac{v_{dx}}{v_{dy}}$ όπου $w_{dx} = x_{\max} - x_{\min} \quad w_{dy} = y_{\max} - y_{\min}$

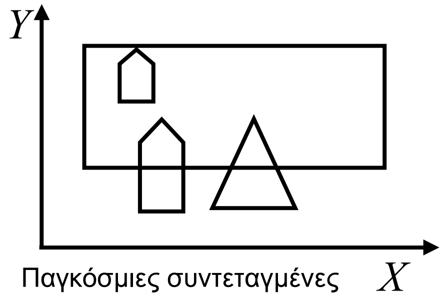
  $$v_{dx} = u_{\max} - u_{\min} \quad v_{dy} = v_{\max} - v_{\min}$$
- Διόρθωση παραμόρφωσης με μείωση πεδίου παράστασης

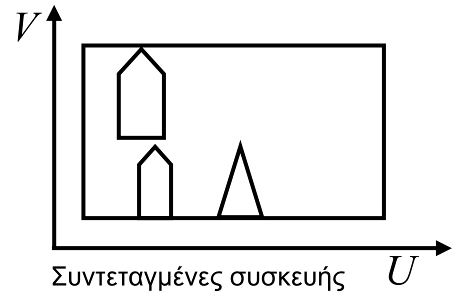
  if $a_v > a_w$ *then* $v_{dx} = v_{dy} * w_{dx} / w_{dy}$

  else if $1/a_v > 1/a_w$ *then* $v_{dy} = v_{dx} * w_{dy} / w_{dx}$

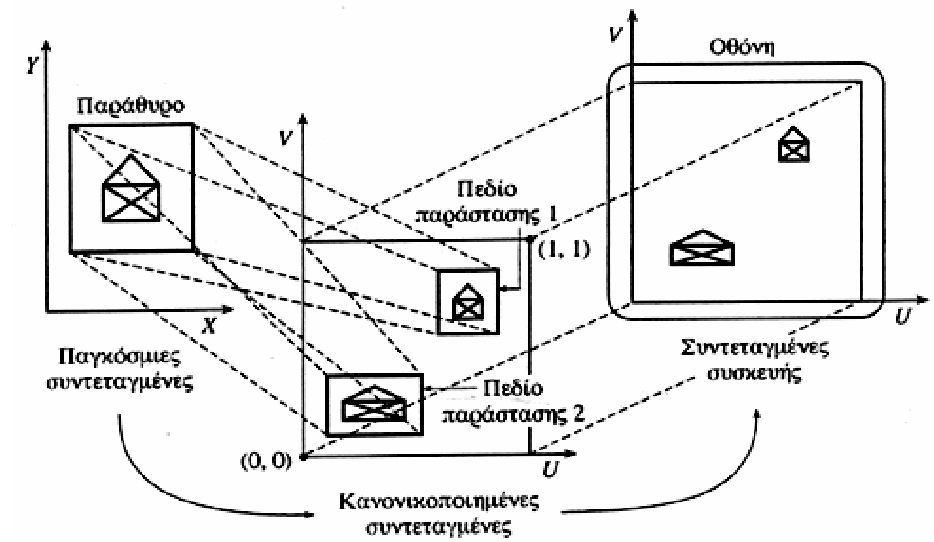
2Δ Μετασχηματισμός Παρατήρησης

- Συνδυασμός με αποκοπή



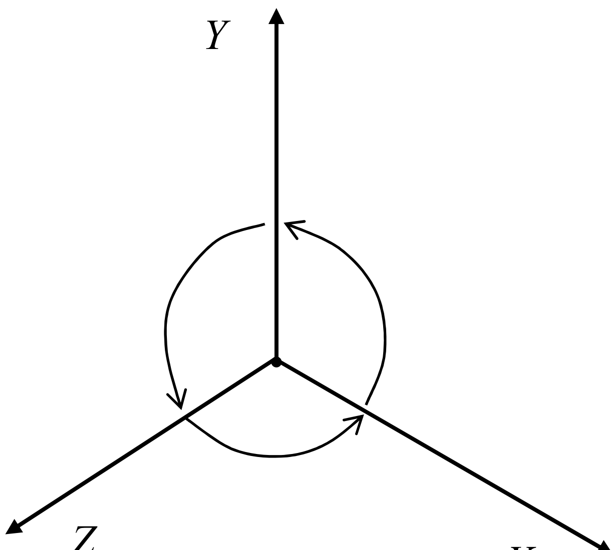


- Πολλαπλές συσκευές εξόδου: χρήση κανονικοποιημένων συντεταγμένων συσκευής (NDC) [0,1] x [0,1]
  - WCS ➲ NDC & NDC ➲ {PDC1, PDC2 … } (οδηγοί συσκευών)
  - NDC ➲ PDC είναι ομοιόμορφος μετασχηματισμός

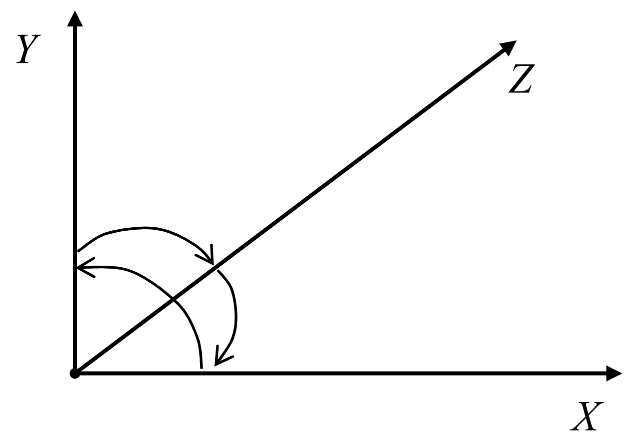


Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Ομογενείς συντεταγμένες σημείων **E**^{3}: (x,y,z,w)
  - Βασική παράσταση $(x,y,z,1)$
- Δεξιόστροφα (εδώ) & Αριστερόστροφα συστήματα



(α)



(β)

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Μεταφορά

$$T(\vec{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αλλαγή κλίμακας

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Στροφή: ανάγκη ορισμού θετικής στροφής σε δεξιόστροφο σύστημα
  - αντίθετη φοράς δεικτών ρολογιού όταν παρατηρητής στον +ve άξονα κοιτάει προς $\overline{O}$

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- R_x, R_y, R_z είναι ορθογώνιοι $\Rightarrow$ διατηρούν μήκη και γωνίες

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Αντίστροφοι

$$T^{-1}\left(\vec{d}\right) = T\left(-\vec{d}\right)$$

$$S^{-1}\left(s_x, s_y, s_z\right) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right)$$

$$R_x^{-1}(\theta) = R_x(-\theta),\ \ R_y^{-1}(\theta) = R_y(-\theta),\ \ R_z^{-1}(\theta) = R_z(-\theta)$$

- Για στροφή ισχύει (ορθογώνιος)

$$R_x^{-1}(\theta) = R_x^T(\theta),\ \ R_y^{-1}(\theta) = R_y^T(\theta),\ \ R_z^{-1}(\theta) = R_z^T(\theta)$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Στρέβλωση στο XY επίπεδο
  - α, b παράγοντες στρέβλωσης κατά X και Y άξονα
  - z συντεταγμένη αμετάβλητη

$$SH_{xy}(a,b)=\begin{bmatrix}1 & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & b & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- Στρέβλωση στο YZ επίπεδο

$$SH_{yz}(a,b)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0\\ b & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- Στρέβλωση στο XZ επίπεδο

$$SH_{xz}(a,b)=\begin{bmatrix}0 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$