1. ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να δώσει μια γενική εικόνα του τι είναι σήμα και να κατατάξει τα διάφορα σήματα σε κατηγορίες ανάλογα με τις βασικές ιδιότητες τους. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό θα οριστούν αντιπροσωπευτικά σήματα, τα οποία έχουν ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία σημάτων.

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται του βασικούς ορισμούς των σημάτων και ταξινομεί τα σήματα. Επίσης αναφέρονται οι βασικές ιδιότητες που παρουσιάζουν τα σήματα και οι μετατροπές σήματος ως προς το χρόνο. Στη συνέχεια ορίζονται μερικά στοιχειώδη σήματα, τα οποία παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στην θεωρία σημάτων, ως εργαλεία για τη μελέτη πολυπλοκότερων σημάτων. Τέλος στο παράρτημα Α υπάρχουν μερικά βασικά στοιχεία για τους μιγαδικούς αριθμούς.

Εισαγωγή

Ως σήμα ορίζεται ένα φυσικό μέγεθος το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο ή το χώρο ή, με οποιαδήποτε άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή ή μεταβλητές. Για παράδειγμα, το σήμα ομιλίας αντιστοιχεί στις μεταβολές της ακουστικής πίεσης σε σχέση με το χρόνο και προέρχεται από τις κινήσεις των φωνητικών χορδών. Το σήμα εικόνας αντιστοιχεί στις μεταβολές της φωτεινότητας σε σχέση με τις δύο χωρικές μεταβλητές. Άλλα παραδείγματα σηματών είναι τα σεισμικά σήματα, τα ιατρικά σήματα (όπως το καρδιογράφημα), επίσης ο ετήσιος δείκτης τιμών καταναλωτή, ο δείκτης του ποσοστού ανεργίας ανά μήνα κ.λπ.

Από μαθηματική άποψη, ένα σήμα εκφράζεται ως συνάρτηση μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών. Ανάλογα με το πλήθος των ανεξαρτήτων μεταβλητών τα σήματα χαρακτηρίζονται ως μονοδιάστατα σήματα (1-D), διδιάστατα (2-D), πολυδιάστατα σήματα.

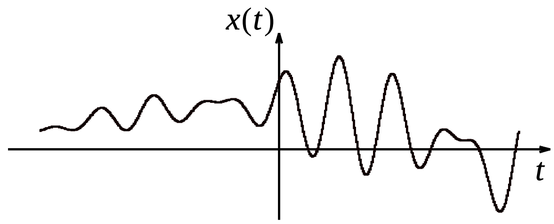
1.1 Ταξινόμηση Σημάτων

Ανάλογα με τον τύπο της ανεξάρτητης ή της εξαρτημένης μεταβλητής της συνάρτησης μπορούμε να κατατάξουμε τα σήματα στις παρακάτω κατηγορίες

1.1.1 Σήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα

Σήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα είναι τα σήματα των οποίων η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται σ’ ένα συνεχές διάστημα. Στα μονοδιάστατα σήματα το πεδίο ορισμού του σήματος είναι διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Στο Σχήμα 1.1

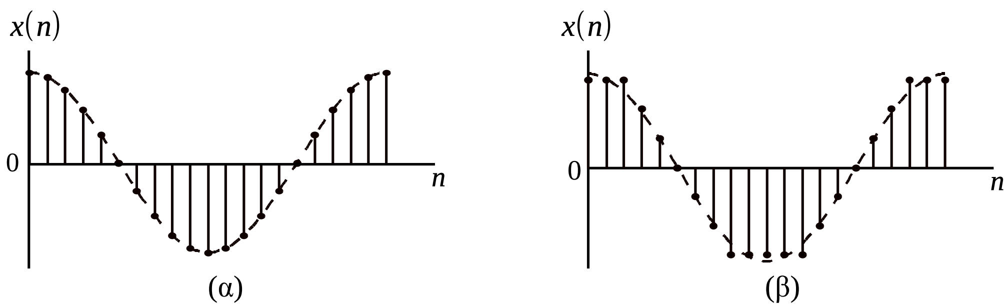
έχει σχεδιαστεί ένα αναλογικό σήμα. Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή t συνήθως είναι ο χρόνος τα σήματα αυτά ονομάζονται *σήματα συνεχούς χρόνου* ή *σήματα συνεχούς μεταβλητής*



Σχήμα 1.1 Γραφική αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος.

1.1.2 Σήματα διακριτού χρόνου

Σήματα διακριτού χρόνου είναι τα σήματα των οποίων το πεδίο ορισμού είναι κάποιο διακριτό σύνολο, (π.χ. το σύνολο των ακεραίων αριθμών), ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή είναι δυνατόν να λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή. Το σήμα στο Σχήμα 1.2α είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου.



Σχήμα 1.2 Γραφική αναπαράσταση (α) ενός σήματος διακριτού χρόνου και (β) ενός ψηφιακού σήματος.

1.1.3 Ψηφιακά σήματα

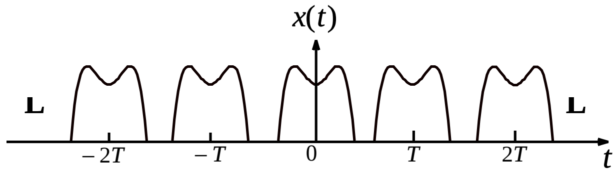
Ψηφιακά σήματα είναι τα σήματα στα οποία τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή, όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή μπορούν να λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές. Στο Σχήμα 1.2β φαίνεται ένα ψηφιακό σήμα.

1.2 Ιδιότητες Αναλογικών Σημάτων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται μερικές βασικές ιδιότητες που έχουν τα αναλογικά σήματα. Ανάλογες ιδιότητες έχουν και τα διακριτά σήματα.

1.2.1 Περιοδικά και Μη Περιοδικά Σήματα

Ένα αναλογικό σήμα $\boldsymbol{x(t)}$ λέγεται *περιοδικό,* όταν υπάρχει ένας θετικός αριθμός T για τον οποίο ισχύει $x(t) = x(t+T)$ για κάθε τιμή του t. Στο Σχήμα 1.3 έχει σχεδιαστεί ένα περιοδικό σήμα. Ο σταθερός αριθμός T λέγεται *περίοδος*. Η ελαχίστη δυνατή περίοδος είναι γνωστή ως *θεμελιώδης περίοδος* και συμβολίζεται με T_0. Στην πράξη πολλές φορές αναφερόμαστε απλώς στην περίοδο και ενοούμε τη θεμελιώδη.



Σχήμα 1.3 Περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου.

Παράδειγμα περιοδικού σήματος είναι το ημιτονοειδές σήμα

$$x(t) = \sin(\omega t + \theta) \tag{1.1}$$

με περίοδο $T = 2p/w$. Το ω είναι γνωστό ως *κυκλική συχνότητα* και είναι $\omega = 2\pi f$, όπου f η συχνότητα του ημίτονου.

Ένα άλλο περιοδικό σήμα είναι το μιγαδικό σήμα

$$y(t) = e^{j\omega t} \tag{1.2}$$

με την ίδια περίοδο $T = 2p/w$. Αν και τα μιγαδικά σήματα δεν έχουν φυσική υπόσταση είναι μαθηματικά ελκυστικά γιατί απλουστεύουν την άλγεβρα των πράξεων. Για παράδειγμα, πολλαπλασιασμός δύο εκθετικών σημάτων αντιστοιχεί απλώς στη πρόσθεση των εκθετών τους. Πράγματι, αν $y_1(t) = Ae^{j\omega_1 t}$ και $y_2(t) = Ae^{j\omega_2 t}$, τότε $y_1(t) \cdot y_2(t) = A^2\, e^{j(\omega_1+\omega_2)t}$. Στο Παράρτημα Α υπάρχει μια σύντομη παρουσίαση των μιγαδικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους.

1.2.2 Αιτιατά και Μη Αιτιατά Σήματα

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *αιτιατό*, εάν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του χρόνου t, δηλαδή,

$$x(t) = 0 \quad \text{για} \quad t < 0 \tag{1.3}$$

Στην αντίθετη περίπτωση, το σήμα λέγεται *μη αιτιατό*. Στο Σχήμα 1.4 εικονίζονται ένα αιτιατό και ένα μη αιτιατό σήμα.

(α) (β)

Σχήμα 1.4 Παράδειγμα (α) αιτιατού σήματος και (β) μη αιτιατού σήματος.

1.2.3 Σήματα Πεπερασμένα και Σήματα Πεπερασμένης και Άπειρης Διάρκειας

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *πεπερασμένο* αν $|x(t)| < \infty$, για κάθε τιμή του χρόνου t. Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται σήμα *πεπερασμένης διάρκειας* αν

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \le T_1 \\ 0, & t \ge T_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

όπου T_1 και T_2, $(T_1 < T_2)$, είναι πεπερασμένοι αριθμοί. Αν τουλάχιστον ένα από τα T_1 και T_2 γίνει ίσο με το άπειρο τότε το σήμα έχει *άπειρη διάρκεια*.

1.2.4 Άρτια και Περιττά σήματα

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *άρτιο* ή (παρουσιάζει άρτια συμμετρία) αν

$$x(-t) = x(t) \quad -\infty < t < +\infty \tag{1.5}$$

Αντίθετα, λέγεται *περιττό* (παρουσιάζει περιττή συμμετρία) αν

$$x(-t) = -x(t) \quad -\infty < t < +\infty \tag{1.6}$$

Το σήμα στο Σχήμα 1.5α παρουσιάζει άρτια συμμετρία και το σήμα στο Σχήμα 1.5β περιττή συμμετρία.

Σχήμα 1.5 Σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία παρουσιάζουν (α) άρτια συμμετρία και (β) περιττή συμμετρία.

Κάθε σήμα μιγαδικό ή πραγματικό μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα ενός άρτιου, $x_e(t)$, και ενός περιττού σήματος, $x_0(t)$,

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \tag{1.7}$$

όπου

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right] \text{ και } x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right] \tag{1.8}$$

1.2.5 Ενεργειακά Σήματα - Σήματα Ισχύος

Για κάθε σήμα $x(t)$ - $x(n)$, η ενέργεια του σήματος E_x, δίνεται από τη σχέση

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \quad - \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \tag{1.9}$$

όπου $|x(t)|$ - $|x(n)|$ είναι το μέτρο του σήματος.

Ένα σήμα χαρακτηρίζεται ως *ενεργειακό σήμα* αν

$$0 < E_x < \infty \tag{1.10}$$

Η μέση ισχύς P_x του σήματος $x(t)$ - $x(n)$ δίνεται από τη σχέση

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \quad - \quad P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{1.11}$$

Αν το σήμα είναι περιοδικό, τότε η μέση ισχύς του P_x δίνεται από τη σχέση

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt \quad - \quad P_x = \frac{1}{N_0}\sum_{0}^{N_0-1} |x(n)|^2 \tag{1.12}$$

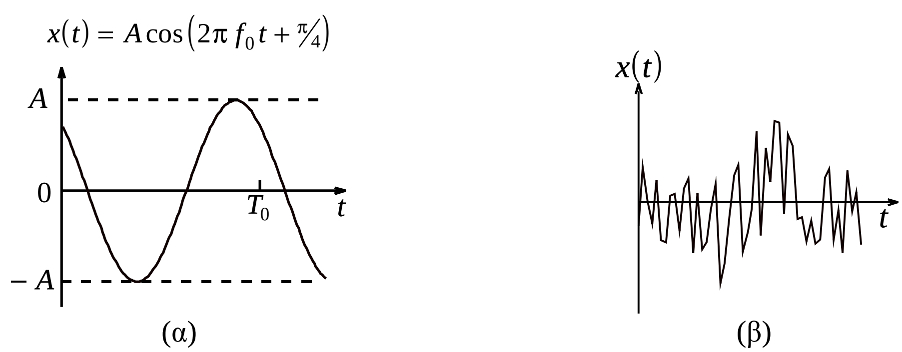
Ένα σήμα χαρακτηρίζεται ως *σήμα ισχύος* αν

$$0 < P_x < \infty \tag{1.13}$$

Σημειώνεται ότι για πραγματικά σήματα $|x(t)|^2 = x^2(t)$ (βλέπε Παράρτημα Α).

1.2.6 Αιτιοκρατικά και Τυχαία-Στοχαστικά Σήματα

Όταν οι τιμές που παίρνει ένα σήμα σε κάθε χρονική στιγμή ορίζονται χωρίς αβεβαιότητα το σήμα χαρακτηρίζεται ως *αιτιοκρατικό σήμα* ή *νομοτελειακό σήμα*. Ένα τέτοιο σήμα, για παράδειγμα, είναι το συνημίτονο (Σχήμα 1.6α). Στην πράξη, όμως, συναντάμε πολλά σήματα, όπως ο θερμικός θόρυβος, στα οποία η τιμή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δεν μπορεί να καθοριστεί με βεβαιότητα πριν εμφανιστούν. Τα σήματα αυτά ονομάζονται *τυχαία* ή *στοχαστικά σήματα* (Σχήμα 16β). Για να επεξεργαστούμε τέτοιου είδους σήματα αναγκαστικά καταφεύγουμε στη θεωρία των Πιθανοτήτων και Στατιστικής. Στο βιβλίο αυτό θα περιοριστούμε μόνο στα αιτιοκρατικά σήματα.



Σχήμα 1.6 Παράδειγμα (α) νομοτελειακού σήματος και (β) στοχαστικού σήματος.

Παράδειγμα 1.1

Δίνεται το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -3t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Να εκφράσετε το σήμα ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος.

Λύση

Το άρτιο σήμα $x_e(t)$ είναι

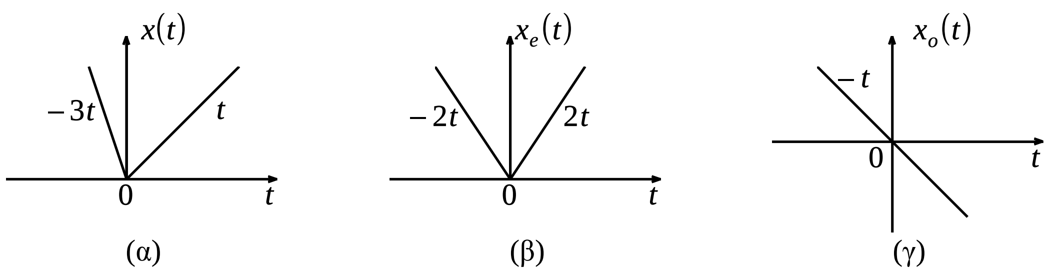
$$x_e(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-3t-t\right] & t<0\\ \frac{1}{2}\left[t+3t\right] & t\geq 0\end{cases}\Rightarrow x_e(t)=\begin{cases}-2t, & t<0\\ 2t, & t\geq 0\end{cases} \tag{1.15}$$

ενώ περιττό το σήμα $x_o(t)$ είναι

$$x_o(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-3t+t\right] & t<0\\ \frac{1}{2}\left[t-3t\right] & t\geq 0\end{cases}\Rightarrow x_o(t)=-t\ . \tag{1.16}$$

στο Σχήμα 1.7 εικονίζονται το σήμα $x(t)$, το $x_e(t)$ και το $x_o(t)$. Από τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(t)$ το $x_e(t)$ και το $x_o(t)$ φαίνεται ότι

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t) \tag{1.17}$$



Σχήμα 1.7 Γραφικές παραστάσεις για τα σήματα (α) $x(t)$, (β) $x_e(t)$ και (γ) $x_0(t)$.

1.3 Μετατροπές Σήματος ως προς το Χρόνο

Πολλές φορές στην πράξη παρουσιάζονται σήματα τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους με αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή του χρόνου. Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικές μετατροπές σήματος ως προς το χρόνο.

1.3.1 Ανάκλαση

Ένα σήμα $y(t)$ αποτελεί την *ανάκλαση* του σήματος $x(t)$ ως προς $t=0$ αν

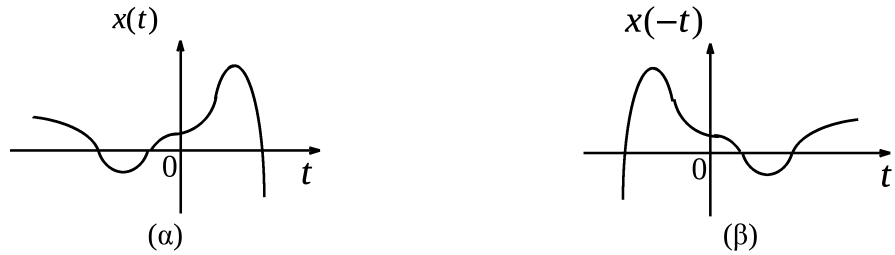
$$y(t)=x(-t) \tag{1.18}$$

Η μετατροπή της ανάκλασης έχει σαν αποτέλεσμα την εναλλαγή μεταξύ “παρελθόντος” και “μέλλοντος” ενός σήματος. Αν το σήμα $x(t)$ είναι η έξοδος ενός μαγνητοφώνου, τότε το σήμα $x(-t)$ είναι η έξοδος του ιδίου μαγνητοφώνου, όταν αυτό περιστέφεται αντίθετα. Στο Σχήμα 1.8 έχει σχεδιαστεί ένα σήμα συνεχούς χρόνου και η ανάκλασή του ως προς $t=0$.

1.3.2 Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου

Το σήμα $x_1(t)$ αποτελεί μια *χρονική συστολή* του σήματος $x(t)$, όταν

$$x_1(t)=x(a\cdot t) \text{ με } a>1 \tag{1.19}$$

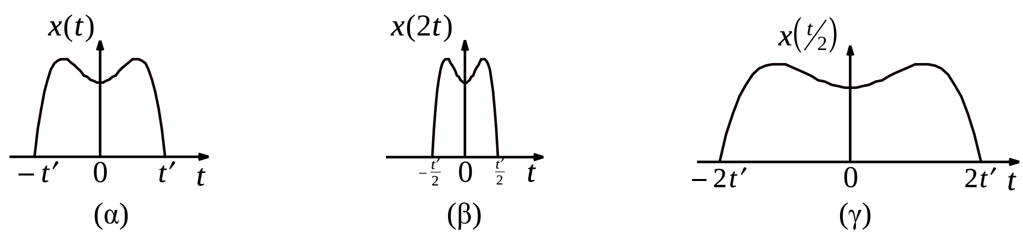


Σχήμα 1.8 (α) Ένα σήμα συνεχούς χρόνου και (β) η ανάκλασή του ως προς $t = 0$.

Το σήμα $x_2(t)$ αποτελεί μια *χρονική διαστολή* του σήματος $x(t)$, αν

$$x_2(t) = x(a \cdot t) \text{ με } 0 < a < 1 \tag{1.20}$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι η έξοδος ενός μαγνητοφώνου, τότε το σήμα $x(2t)$ είναι η εξόδος του ιδίου μαγνητοφώνου, όταν αυτό περιστρέφεται με διπλάσια ταχύτητα και $x(t/2)$ είναι η εξόδος, όταν αυτό περιστρέφεται με υποδιπλάσια ταχύτητα. Στο Σχήμα 1.9 έχουν σχεδιαστεί η χρονική συστολή και διαστολή ενός σήματος.



Σχήμα 1.9 (α) Σήμα, (β) η χρονική συστολή του και (γ) η χρονική διαστολή του.

1.3.3 Χρονική Μετατόπιση

Ένα σήμα $y(t)$ είναι μια *χρονικά μετατοπισμένη* κατά t_0 μορφή του σήματος $x(t)$ αν

$$y(t) = x(t - t_0) \tag{1.21}$$

Στο Σχήμα 1.10 έχει σχεδιαστεί ένα σήμα $x(t)$ και η χρονικά μετατοπισμένη μορφή του.

Σχήμα 1.10 (α) Το σήμα $x(t)$ και (β) η χρονικά μετατοπισμένη μορφή του.

Η χρονική μετατόπιση είναι μια πολύ συνηθισμένη μεταβολή στην πράξη. Σε περιπτώσεις μετάδοσης ενός σήματος έχουμε χρονικές καθυστερήσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τις ιδιότητες του μέσου μετάδοσης. Για παράδειγμα, σε ένα Τηλεπικοινωνιακό σύστημα το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης είναι χρονικά καθυστερημένο σε σχέση με αυτό που εκπέμπεται από το πομπό.

Παράδειγμα 1.2

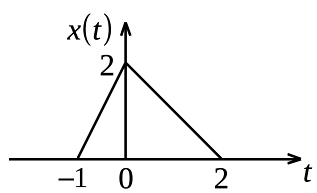
Δίνεται το σήμα

$$x(t)=\begin{cases}2t+2, & -1\le t<0\\ 2-t, & 0\le t<2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \tag{1.22}$$

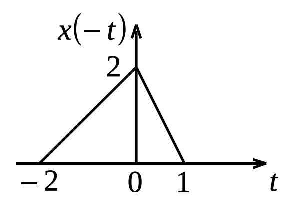
Να σχεδιάσετε το σήμα $y(t)=x(-t)$.

Λύση

Το σήμα $x(t)$ εικονίζεται στο Σχήμα 1.11. Το σήμα $y(t)$ αποτελεί την ανάκλαση του σήματος $x(t)$. Θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση του σήματος $y(t)$



Σχήμα 1.11 Το σήμα $x(t)$ του Παραδείγματος 1.2.



Σχήμα 1.12 Η γραφική παράσταση του σήματος $y(t)$

$$y(t)=x(-t)\Rightarrow y(t)=\begin{cases}2(-t)+2, & -1\le -t<0\\ 2-(-t), & 0\le -t<2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}\Rightarrow y(t)=\begin{cases}-2t+2, & 1\ge t>0\\ 2+t, & 0\ge -t>2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}t+2, & -2\le t<0\\ 2-2t, & 0\le t<1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \tag{1.23}$$

Η γραφική παράσταση του σήματος $y(t)=x(-t)$ δίνεται στο Σχήμα 1.12.

1.4 Στοιχειώδη Σήματα

Η ανάλυση ενός σήματος σε απλούστερα σήματα, των οποίων η συμπεριφορά είναι είτε γνωστή είτε ευκολότερο να μελετηθεί, αποτελεί βασική μεθοδολογία στην επεξεργασία σήματος. Στη συνέχεια θα ορίσουμε έναν αριθμό στοιχειωδών σημάτων που παίζουν ένα ιδιαίτερο ρόλο στην θεωρία σημάτων, ως εργαλεία για τη μελέτη πολυπλοκοτέρων σημάτων.

1.4.1 Μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Το *μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου* ορίζεται από τη σχέση

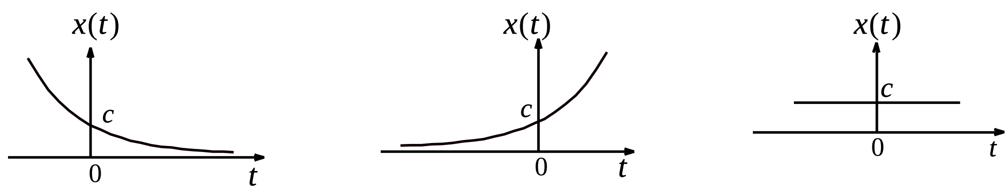
$$x(t) = c \cdot e^{st} \tag{1.24}$$

όπου $\boldsymbol{s} = s + \boldsymbol{j}w$ έτσι $\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e}^{st} \cdot \boldsymbol{e}^{jwt}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Είναι αντιστρέψιμο $(ce^{st})^{-1} = c^{-1} \cdot e^{-st}$.

(β) Είναι διαφορίσιμο $\frac{d}{ds}\left(ce^{st}\right) = c \cdot se^{st}$.

Μία σημαντική κατηγορία εκθετικών σημάτων συνεχούς χρόνου προκύπτει αν το s είναι πραγματικός αριθμός, $s = s$, οπότε το $\boldsymbol{x(t)}$ ονομάζεται *πραγματικό εκθετικό σήμα*, και παρουσιάζει ασυμπτωτική συμπεριφορά ανάλογα με τις τιμές του σ (βλέπε Σχήμα 1.13).



(α) (β) (γ)

Σχήμα 1.13 Το πραγματικό εκθετικό σήμα (α) για σ<0, (β) για σ>0 και (γ) για σ=0.

Μία άλλη σημαντική κατηγορία εκθετικών σημάτων συνεχούς χρόνου προκύπτει αν το s είναι φανταστικός αριθμός ($s = j\omega_0$), δηλαδή $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Το σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ είναι περιοδικό με περίοδο Τ, αν

- $\omega_0 = 0$, τότε $\boldsymbol{x(t)}=1$, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί περιοδικό για κάθε Τ.
- $\omega_0 \neq 0$, τότε η θεμελιώδης περίοδος T_0, δηλαδή η μικρότερη τιμή του T, είναι $T_0 = 2p/|w_0|$, Πράγματι, από το ορισμό ισχύει:

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 T} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\cos\left(w_0 T\right) + j\sin\left(w_0 T\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad w_0 T = 2kp \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2p / |w_0|$$

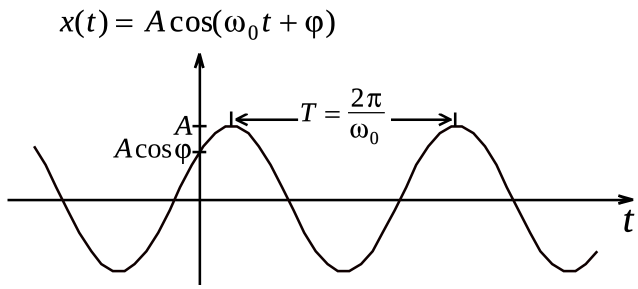
όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση του Euler $e^{jq} = \cos q + j \sin q$. Το γνωστό συνημιτονοειδές σήμα $x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$ (βλέπε Σχήμα 1.14) είναι επίσης περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $\boldsymbol{T_0}$ και θεμελιώδη συχνότητα $\boldsymbol{f_0}$ όπου $f_0 = 1/T_0$ και $\omega_0 = 2\pi f_0$. Το συνημιτονοειδές σήμα σχετίζεται άμεσα με το μιγαδικό εκθετικό σήμα. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε το φανταστικό εκθετικό σήμα με τη βοήθεια ημιτονοειδών σημάτων της ιδίας θεμελιώδους περιόδου, από τη σχέση

$$e^{j\left(\omega_0 t + \varphi\right)} = cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + j \cdot sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) \tag{1.25}$$

Μπορούμε, προφανώς, να γράψουμε

$$cos\left(w_0 t + j\right) = \Re e\left\{e^{j\left(w_0 t + j\right)}\right\} \quad kai \quad sin\left(w_0 t + j\right) = \Im m\left\{e^{j\left(w_0 t + j\right)}\right\} \tag{1.26}$$

όπου $\Re e\{\}$ συμβολίζει το πραγματικό και $\Im m\{\}$ το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού.



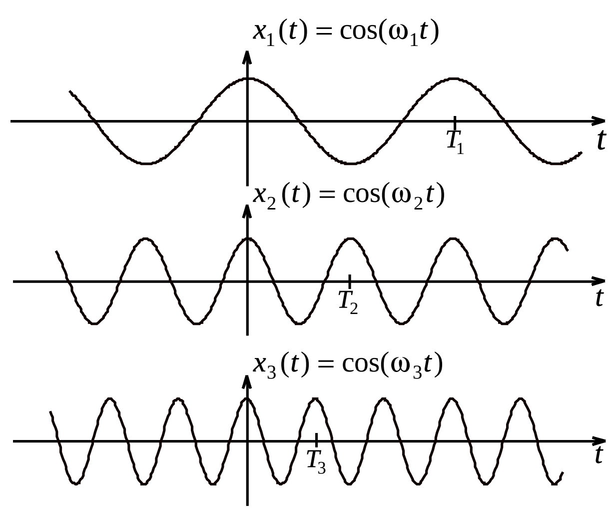
Σχήμα 1.14 Το συνημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου.

Η σχέση του Euler αντιστρέφεται και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το ημίτονο ή το συνημίτονο με τη βοήθεια εκθετικών μιγαδικών όρων, όπως για παράδειγμα

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \text{και} \quad \sin(w_0 t) = \frac{e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}}{2j} \tag{1.27}$$

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα $e^{j\omega_0 t}$, όπως το (συν)ημιτονοειδές σήμα $\cos(w_0 t)$, $\sin(w_0 t)$, είναι γνωστό ως σήμα μιας συχνότητας ή σήμα απλής συχνότητας. Όπως θα δούμε τα σήματα αυτά χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τα χαρακτηριστικά πολλών φυσικών διαδικασιών.

Στο Σχήμα 1.15 δίνονται τρία παραδείγματα συνημιτονοειδών σημάτων με διαφορετική κυκλική συχνότητα και περιόδο. Παρατηρούμε ότι, όταν η συχνότητα αυξάνει, $w_1 < w_2 < w_3$, η θεμελιώδης περίοδος ελαττώνεται, $\boldsymbol{T}_1 > \boldsymbol{T}_2 > \boldsymbol{T}_3$, και αυξάνει ο ρυθμός των ταλαντώσεων του σήματος, δηλαδή αυξάνει ο ρυθμός μεταβολής του σήματος. *Ένα σήμα χαμηλής συχνότητας μεταβάλλεται με αργό ρυθμό σε αντίθεση με ένα σήμα υψηλής συχνότητας που μεταβάλλεται με γρήγορο ρυθμό.*



Σχήμα 1.15 Η συμπεριφορά του συνημιτόνου για διαφορετικές συχνότητες $w_1 < w_2 < w_3$.

Η γενική περίπτωση μιγαδικού εκθετικού σήματος συνεχούς χρόνου είναι

$$x(t) = c \cdot e^{st} \quad \text{όπου} \quad c = |c| e^{j\theta} \quad \text{και} \quad s = \sigma + j\omega_0 \tag{1.28}$$

έτσι

$$x(t) = |c|e^{j\theta}e^{(\sigma+j\omega_0)t} = |c|e^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t+\theta)} \tag{1.29}$$

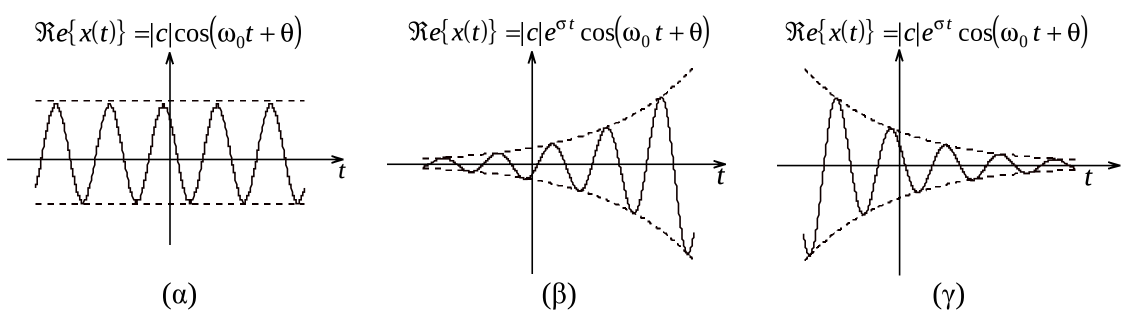
Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= |c|e^{st}\cos(w_0 t + q) + j|c|e^{st}\sin(w_0 t + q) \\ &= |c|e^{st}\cos(w_0 t + q) + j|c|e^{st}\cos(w_0 t + q - p/2) \end{aligned} \tag{1.30}$$

- Για σ=0 το πραγματικό και το φανταστικό μέρος (τμήμα) είναι (συν)ημιτονοειδή σήματα (Σχήμα 1.16α).

- Για σ>0 τα αντίστοιχα (συν)ημιτονοειδή σήματα πολλαπλασιάζονται μ΄ έναν αυξανόμενο εκθετικό παράγοντα (Σχήμα 1.16β).

Για σ<0 τα αντίστοιχα (συν)ημιτονοειδή σήματα πολλαπλασιάζονται μ΄ έναν εκθετικό παράγοντα που φθίνει (Σχήμα 1.16γ). Τα σήματα αυτά είναι γνωστά ως *φθίνοντα ημιτονοειδή σήματα* και εμφανίζονται στις φθίνουσες αρμονικές μηχανικές ή ηλεκτρικές ταλαντώσεις όπως θα δούμε. Στο Σχήμα 1.16 οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $\pm|c|e^{st}$ και αποτελούν την περιβάλλουσα της καμπύλης ταλάντωσης.



Σχήμα 1.16 Γραφική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους του μιγαδικού εκθετικού σήματος (α) σ = 0, (β) σ > 0 και (γ) σ < 0.

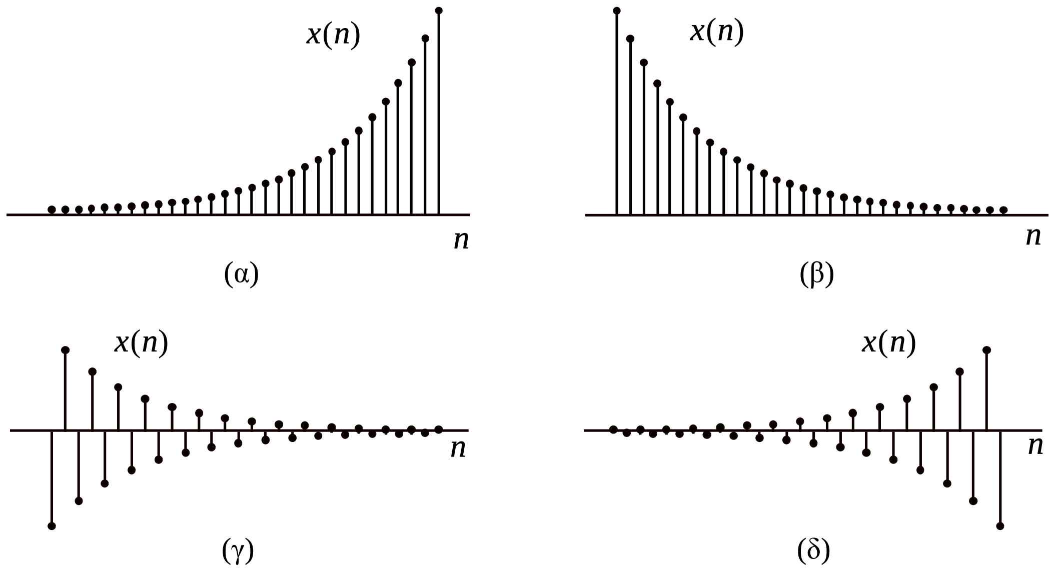
1.4.2 Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου, ορίζεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{x(n) = c \cdot a^n} \tag{1.31}$$

όπου c και α είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί (εναλλακτικά ορίζεται από τη $x(n) = c \cdot e^{\beta n}$ όπου $\boldsymbol{a = e^b}$).

(α) Αν c και α είναι πραγματικοί αριθμοί έχουμε τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 1.17).



Σχήμα 1.17 Το πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου (α) α>1, (β) 0<α<1,(γ) -1<α<0 και (δ) α<-1.

(β) Αν β είναι καθαρός φανταστικός αριθμός ($\beta = j\Omega_0$) τότε $\boldsymbol{x(n)= e^{j\Omega_0 n}}$. Το σήμα αυτό συνδέεται με το (συν)ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου $\boldsymbol{x(n)= A}\cos(\Omega_0 \boldsymbol{n} + f)$ με τη βοήθεια της σχέσης του Euler. Πράγματι,

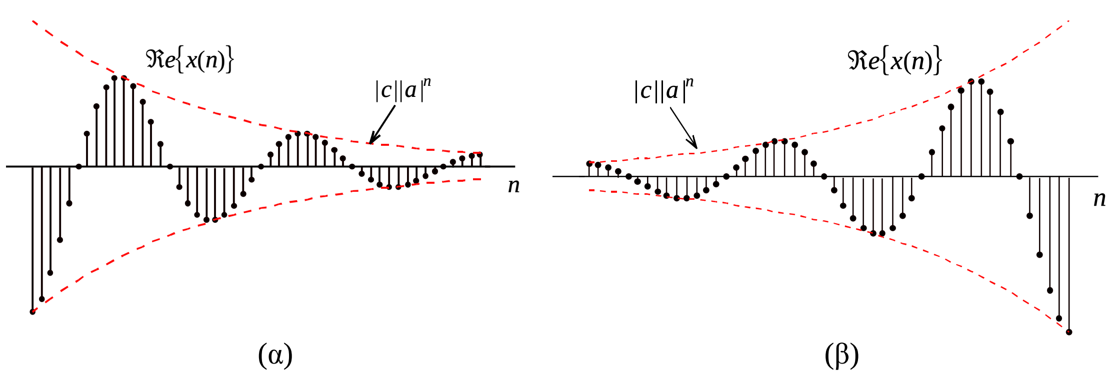
$$A\cos(\Omega_0 n + f) = \frac{A}{2} e^{jf} e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-jf} e^{-j\Omega_0 n}$$

(γ) Η γενική περίπτωση $c = |c| e^{j\theta}$ $a = |a| e^{j\Omega_0}$ δίνει

$$x(n) = |c||a|^n \cos(\Omega_0 n + q) + j|c||a|^n \sin(\Omega_0 n + q) \qquad (1.32)$$

Στο Σχήμα 1.18 εικονίζονται το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου.

Αν το n δεν έχει διαστάσεις τότε το Ω_0 και θ έχουν διαστάσεις γωνίας (rad).



Σχήμα 1.18 Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου (α) $|a|<1$ και (β) $|a|>1$.

1.4.3 Ιδιότητες των εκθετικών σημάτων

(α) Η πρώτη ιδιότητα αφορά την περιοδικότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου, ως προς τη συχνότητα. Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνεχούς χρόνου, $e^{j\omega_1 t}$ και $e^{j\omega_2 t}$, όταν $\omega_1 \neq \omega_2$ είναι διαφορετικά σήματα. Το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου, με συχνότητα $\Omega_0 + 2p$ είναι το ίδιο με το αντίστοιχο της συχνότητας Ω_0. Πράγματι:

$$e^{j(\Omega_0+2p)n} = e^{j2pn}e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}$$

Έτσι το εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου με συχνότητα Ω_0 είναι το ίδιο με συχνότητες $\Omega_0 + 2p$, $\Omega_0 + 4p, \mathbf{K}$ και γιαυτό το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου χρειάζεται να περιγραφεί στο διάστημα συχνοτήτων $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$ ή $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$.

Στο εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η ω τόσο αυξάνει και ο ρυθμός των ταλαντώσεων. Στα εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου, όσο το Ω_0 αυξάνει από 0, μέχρι τη τιμή $\Omega_0 = \pi$, έχουμε σήματα με ρυθμό ταλάντωσης που επίσης αυξάνεται (Σχήμα 1.19). Αν το Ω_0 αυξάνεται από την τιμή π, μέχρι την τιμή $\Omega_0 = 2\pi$, έχουμε τώρα μείωση του ρυθμού ταλάντωσης η οποία είναι η ίδια για $\Omega_0 = 0$. Έτσι διακριτά σήματα τα οποία παρουσιάζουν μικρούς ρυθμούς μεταβολής (χαμηλές συχνότητες) αποτελούνται από συχνότητες που βρίσκονται στη περιοχή του 0 και 2π ή σε κάθε άρτιο πολλαπλάσιο του π. Αντίθετα διακριτά σήματα τα οποία παρουσιάζουν μεγάλους ρυθμούς μεταβολής (υψηλές συχνότητες) αποτελούνται από συχνότητες στην περιοχή του π ή σε κάθε περιττό πολλαπλάσιο του π.

(β) Η δεύτερη ιδιότητα αφορά την περιοδικότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου, ως προς τη μεταβλητή n. Αν το $\boldsymbol{e^{j\Omega_0 n}}$ είναι περιοδικό με περίοδο N>0 πρέπει

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \Rightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1 \Rightarrow \cos(\Omega_0 N) + j\sin(\Omega_0 N) = 1$$

δηλαδή το $\Omega_0 \boldsymbol{N}$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 2π έτσι

$$\Omega_0 N = 2\pi k \text{ ή } \frac{\Omega_0}{2p} = \frac{k}{N} \tag{1.33}$$

Παρατηρούμε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα δεν είναι γενικά περιοδικό, είναι περιοδικό όταν $\Omega_0/2p$ είναι ρητός αριθμός.

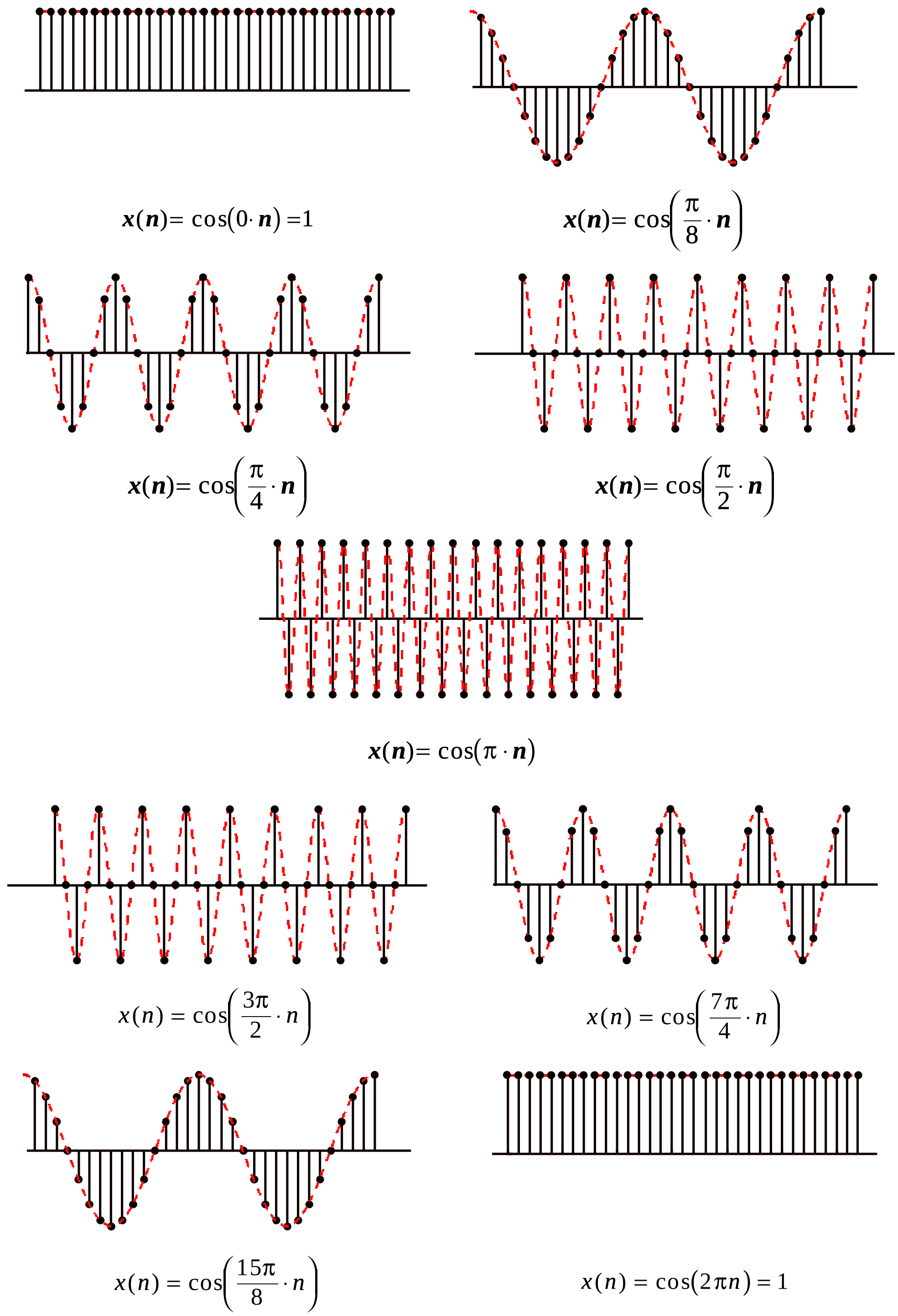
Έχουνε λοιπόν για τα μιγαδικά εκθετικά σήματα:

- Αν $\boldsymbol{x(n)}$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N η θεμελιώδης συχνότητα είναι $2p/N$.
- Για να είναι περιοδικό πρέπει $\Omega_0/2p = k/N$. Αν οι k και N είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε η θεμελιώδης περίοδος είναι N.
- Η θεμελιώδης περίοδος μπορεί να γραφεί $N = k(2p/\Omega_0)$.
- Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνεχούς χρόνου που έχουν συχνότητες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους $w_0 = 2p/T_0$ (αρμονικές), $e^{jk(2p/T_0)t}$, είναι διαφορετικά δηλαδή:

$$e^{jk\frac{2p}{\mathrm{T}}t} \neq e^{jm\frac{2p}{\mathrm{T}}t} \qquad k \neq m$$

- Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τα διακριτού χρόνου όπου λόγω της $\boldsymbol{e^{j(\Omega_0+2p)n} = e^{j\Omega_0 n}}$ τα σήματα $f_k(n) = e^{jk(2p/N)n}$ $k = 0, \pm 1, \mathbf{L}$ είναι τα ίδια για τιμές του k που διαφέρουν πολλαπλάσιο του N. Πράγματι

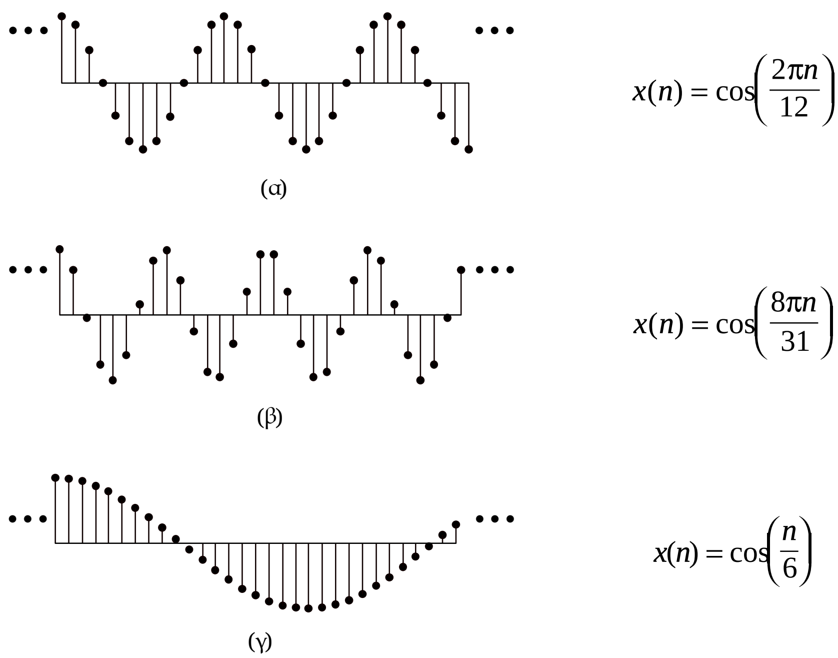
$$f_{k+N}(n) = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n}e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = f_k(n)$$



Σχήμα 1.19 Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου για διάφορες συχνότητες.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο N διαφορετικά μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Τα σήματα αυτά ορίζουν το σύνολο $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{n}), \mathbf{K}\ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{N}-1}(\boldsymbol{n})\}$. Αν $\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{n})\notin \boldsymbol{A}$ τότε είναι ίδιο με ένα από αυτά, δηλαδή, $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{N}-1}(\boldsymbol{n})$ και ούτω καθεξής.

Τελειώνοντας, έστω $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})$ η ακολουθία διακριτού χρόνου η οποία προέρχεται από τη δειγματοληψία του $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}w_0\boldsymbol{t}}$ σε σημεία τα οποία χρονικά ισαπέχουν $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}w_0\boldsymbol{nT}}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}(w_0\boldsymbol{T})\boldsymbol{n}}$ επειδή $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\Omega_0\boldsymbol{n}}$ έχουμε $\Omega_0=w_0\boldsymbol{T}$ το $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})$ είναι περιοδικό μόνο όταν $\Omega_0/2p=k/N$ ή $w_0T/2p=k/N$. Αν δειγματοληπτήσουμε το περιοδικό αναλογικό σήμα $x(t)=\cos(2\pi t)$ με περιόδο $T=1/12$ προκύπτει το διακριτό σήμα $x(n)=\cos\left(2pn/12\right)$, (βλέπε Σχήμα 1.20α), το οποίο είναι περιοδικό, αφού ικανοποιείται η σχέση (1.33). Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε όταν η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T=4/31$, (βλέπε Σχήμα 1.20β). Αντίθετα αν η περίοδος είναι $T=1/12p$ το διακριτό σήμα $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})$, σε αντίθεση με το $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$, δεν είναι περιοδικό (βλέπε Σχήμα 1.20γ).



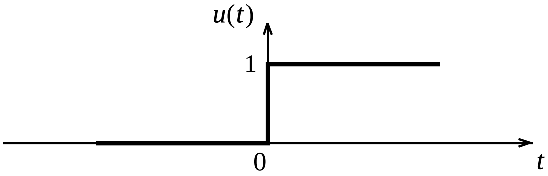
Σχήμα 1.20 Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου.

1.4.4 Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος συνεχούς χρόνου

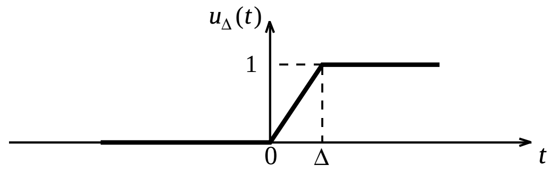
Μια ειδική μορφή σήματος είναι η *συνάρτηση μοναδιαίου βήματος* συνεχούς χρόνου, η οποία ορίζεται ως

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases} \tag{1.34}$$

και έχει τη μορφή του Σχήματος 1.21.



Σχήμα 1.21 Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (συνεχούς χρόνου).



Σχήμα 1.22 Η συνεχής προσέγγιση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος.

Η συνάρτηση $u(t)$ είναι ασυνεχής και δεν ορίζεται στο $t=0$. Ένας άλλος τρόπος να δούμε τη συνάρτηση $u(t)$ είναι ως όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων

$$u_\Delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{\Delta}t, & 0<t<\Delta\\ 1, & t\geq\Delta\end{cases} \tag{1.35}$$

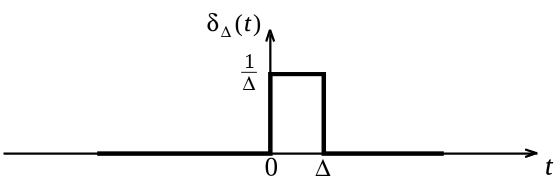
Η συνάρτηση $u_\Delta(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.22. Παρατηρούμε ότι $u(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)$.

1.4.5 Η κρουστική συνάρτηση συνεχούς χρόνου ή Συνάρτηση δέλτα

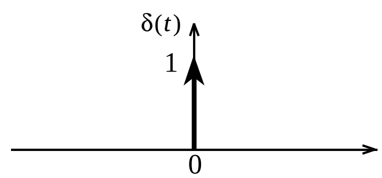
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράγωγος της συνάρτησης $u_\Delta(t)$

$$d_\Delta(t)\equiv\frac{du_\Delta(t)}{dt}=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0\leq t<\Delta\\ 0 & \Delta\leq t\end{cases} \tag{1.36}$$

η οποία δεν ορίζεται στα σημεία ασυνέχειας 0 και Δ και φαίνεται στο Σχήμα 1.23.



Σχήμα 1.23 Η παράγωγος της συνάρτησης $u_\Delta(t)$.



Σχήμα 1.24 Η συνάρτηση Δέλτα.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό της $\delta_\Delta(t)$ είναι ίσο με τη μονάδα για κάθε τιμή της Δ και ότι η συνάρτηση $\delta_\Delta(t)$ είναι ίση με το μηδέν έξω από το διάστημα $0\leq t\leq\Delta$. Όταν $\Delta\to 0$ η χρονική διάρκεια του παλμού ελαττώνεται και αυξάνεται το ύψος του, *το εμβαδό όμως παραμένει σταθερό και ίσο με τη μονάδα.*

Στο όριο $\Delta\to 0$ γράφουμε

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t) \tag{1.37}$$

Η $\delta(t)$ ονομάζεται *συνάρτηση δέλτα* ή συνάρτηση Dirac ή *κρουστική συνάρτηση*.

Η $\delta(t)$ δεν είναι συνάρτηση με τη συνήθη έννοια και ορίζεται μέσα από τις ιδιότητές της, δηλαδή

$$d(t)=0,\quad t\neq 0 \tag{1.38}$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad (1.39)$$

Η κρουστική συνάρτηση είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος.

Ένας γενικότερος ορισμός της $d\,(t)$ είναι

$$d(t) = 0, \quad t \neq 0 \qquad (1.40)$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad (1.41)$$

όπου $x\,(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο t_0 Μία βασική ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα είναι

$$d(t) = d(-t)$$

Η συνάρτηση $d\,(t)$ γραφικά παριστάνεται όπως στο Σχήμα 1.24. Το μέτρο του διανύσματος το οποίο χρησιμοποιούμε για να αποδόσουμε τη συνάρτηση δέλτα επιλέγεται ώστε να είναι ίσο με το εμβαδό της.

Παράδειγμα 1.3

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή όχι. Αν το σήμα είναι περιοδικό να υπολογιστεί η θεμελιώδης συχνότητά του.

1) $x(t) = 3\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$

2) $x(t) = 2\,e^{j(\pi t - 1)}$

3) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-2n)^2}$

4) $x(t) = [\cos(2\pi t)]u(t)$

Λύση

(1) Εξετάζουμε αν υπάρχει θετικός αριθμός T για τον οποίο $x(t+T) = x(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t. Έτσι έχουμε

$$x(t+T) = x(t) \quad \Rightarrow \quad 3\cos\left(5t + 5T + \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1.42)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $\cos\varphi = \cos\theta$ τότε $\varphi \pm \theta = 2k\pi$, και επομένως προκύπτει ότι:

$$\left(5t + 5T + \frac{p}{4}\right) + \left(5t + \frac{p}{4}\right) = 2kp \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = \frac{2kp}{5} - 2t - \frac{p}{10} \qquad (1.43)$$

ή

$$\left(5t + 5T + \frac{p}{4}\right) - \left(5t + \frac{p}{4}\right) = 2kp \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = \frac{2kp}{5} \qquad (1.44)$$

Από την (1.43) δεν προκύπτει σταθερή τιμή για την περίοδο. Από την (1.44) παρατηρούμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = 2p/5$ και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 5/2p$.

(**2**) Με όμοιο τρόπο σκέψης έχουμε

$$x(t+T)=x(t)\ \Rightarrow\ 2e^{j(\pi t+\pi T-1)}=2e^{j(\pi t-1)}\ \Rightarrow\ e^{j\pi T}=1\ \Rightarrow$$

$$\cos(\pi T)+j\sin(\pi T)=1\ \Rightarrow\ \pi T=2k\pi\ \Rightarrow\ T=2k$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0=2$ και θεμελιώδη συχνότητα $f_0=1/2$.

(3) Για το σήμα

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-(t-2n)^2} \tag{1.45}$$

έχουμε

$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-(t+T-2n)^2}$ θέτοντας $T=2k$ έχουμε $x(t+2k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-[t-2(n-k)]^2}$ με αλλαγή μεταβλητής $n-k=n'$ το σήμα αποκτά τη μορφή

$$x(t+2k)=\sum_{n'=-\infty}^{\infty}e^{-(t-2n')^2} \tag{1.46}$$

Συγκρίνοντας τις (1.45) και (1.46) παρατηρούμε ότι $x(t+2k)=x(t)$, άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T=2k$. Η θεμελιώδης περίοδος του σήματος είναι $T_0=2$ και η θεμελιώδης συχνότητα $f_0=1/2$.

(4) Παρατηρούμε ότι το σήμα

$$x(t)=[\cos(2\pi t)]u(t)=\begin{cases}\cos(2\pi t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1.47}$$

δεν είναι περιοδικό.

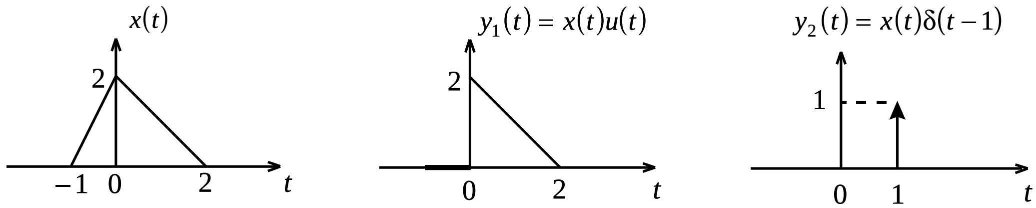
Παράδειγμα 1.4

Αν $x(t)$ είναι το σήμα που δίνεται στο Παράδειγμα 1.2 (σχέση 1.22) να υπολογιστούν τα σήματα

$$y_1(t)=x(t)\,u(t) \qquad\qquad y_2(t)=x(t)\,\delta(t-1)$$

Λύση

Με τη βοήθεια της σχέσης ορισμού της συνάρτησης $u(t)$ παρατηρούμε ότι το σήμα $y_1(t)$ είναι το αιτιατό τμήμα του σήματος $x(t)$. Το σήμα $y_2(t)$ είναι η συνάρτηση δέλτα χρονικά μετατοπισμένη κατά 1 με πλάτος $x(1)=1$. Στο Σχήμα 1.25 εικονίζονται τα σήματα $x(t)$, $y_1(t)$ και $y_2(t)$.



Σχήμα 1.25 Γραφικές παραστάσεις για τα σήματα $x(t)$, $y_1(t)$ και $y_2(t)$.

Παράδειγμα 1.5

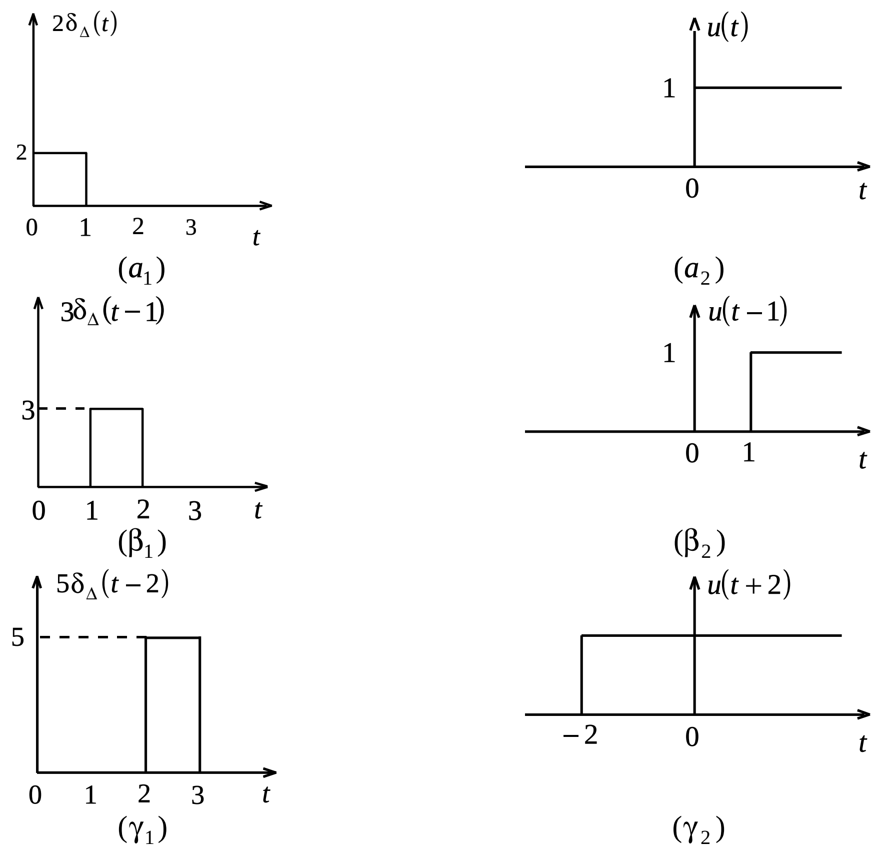
Να σχεδιάσετε τα ακόλουθα σήματα

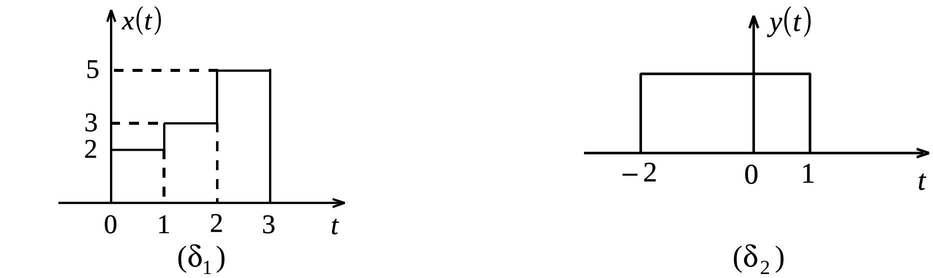
$$x(t)=2\delta_\Delta(t)+3\,\delta_\Delta(t-1)+5\,\delta_\Delta(t-2) \quad \text{όταν} \quad \Delta=1$$

$$y(t)=u(t+2)-u(t-1)$$

Λύση:

Στο Σχήμα 1.26 απεικονίζεται ο τρόπος δημιουργίας του σηματος $x(t)$. Παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ είναι το άθροισμα του σήματος $2\delta_\Delta(t)$ Σχήμα $1.26a_1$, του $3\delta_\Delta(t-1)$ Σχήμα $1.26\beta_1$ και του $5\delta_\Delta(t-2)$ Σχήμα $1.26\gamma_1$. Επίσης το σήμα $y(t)$ είναι η διαφορά του σήματος $u(t-1)$ Σχήμα $1.26\beta_2$ από το $u(t+2)$ Σχήμα $1.26\gamma_2$.





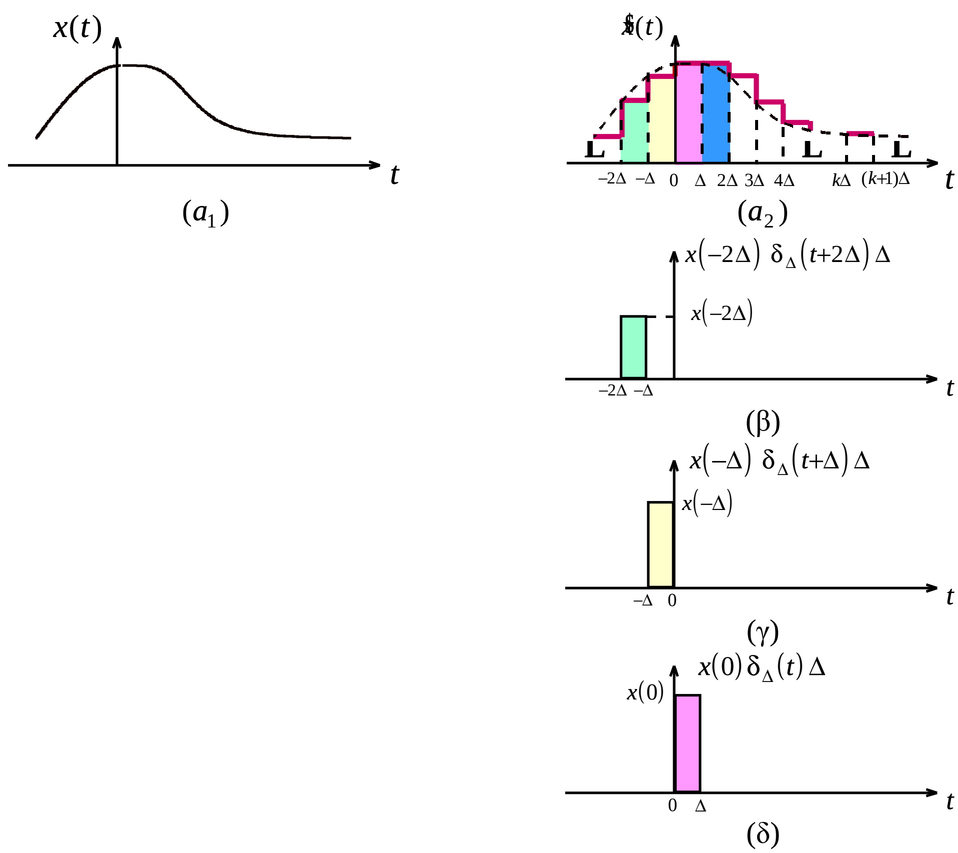
Σχήμα 1.26 Ο τρόπος δημιουργίας των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ του Παραδείγματος 1.5.

Παράδειγμα 1.6

Να αναπτυχθεί ένα τυχαίο αναλογικό σήμα σε άθροισμα από ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος.

Λύση:

Έστω το τυχαίο αναλογικό σήμα $x(t)$ του σχήματος $1.27\, a_1$. Θεωρούμε το κλιμακωτό σήμα $\hat{x}(t)$, του Σχήματος $1.27\, a_2$, το οποίο προσεγγίζει το σήμα $x(t)$.



Σχήμα 1.27 Ανάπτυγμα σήματος συνεχούς χρόνου σε ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος.

Υπενθυμίζουμε ότι η $\Delta \cdot \delta_\Delta(t - t_0)$ είναι ένας παλμός με αρχή τη χρονική στιγμή t_0, με διάρκεια Δ και πλάτος ίσο με ένα. Ο παλμός, του σχήματος 1.27*β*, με αρχή τη χρονική στιγμή $t=-2\Delta$ και ύψος ίσο με την τιμή του σήματος την ίδια χρονική στιγμή, $x(-2\Delta)$ εκφράζεται από την

$$x(-2\Delta)\,\delta_\Delta(t+2\Delta)\,\Delta \tag{1.48}$$

Με ανάλογο τρόπο εκφράζονται και οι άλλοι παλμοί, οι οποίοι προσδιορίζονται από το σήμα $\hat{x}(t)$ (βλέπε Σχήμα 1.27*γ και δ)*. Έτσι το σήμα $\hat{x}(t)$ εκφράζεται από την εξίσωση

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) d_\Delta(t-k\Delta)\Delta \tag{1.49}$$

Αν $\Delta \to 0$, το σήμα $\hat{x}(t) \to x(t)$, έτσι

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) d_\Delta(t-k\Delta)\Delta \tag{1.50}$$

Όταν $\Delta \to 0$, το $k\Delta$ γίνεται η συνεχής μεταβλητή t, το παραπάνω άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και επειδή $\delta(t) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t)$, το σήμα $x(t)$ δίνεται από την εξίσωση:

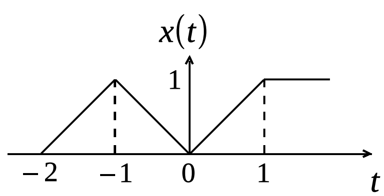
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d(t-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d(t-t) dt \tag{1.51}$$

Το παραδειγμα αυτό αναδεικνύει μια φυσική προέκταση του ορισμού (1.41) και θα μας φανεί χρήσιμο στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1.7

Δίνεται το σήμα του Σχήματος 1.28. Να σχεδιάσετε τα σήματα $x^+(t)=x(t)u(t)$ και $x^-(t)=x(-t)u(t)$. Παρατηρήστε ότι τα σήματα $x^+(t)$ και $x^-(t)$ είναι αιτιατά σήματα. Το μη αιτιατό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο σημάτων με τη βοήθεια της σχέσης:

$$x(t) = x^+(t) + x^-(-t) \tag{1.52}$$



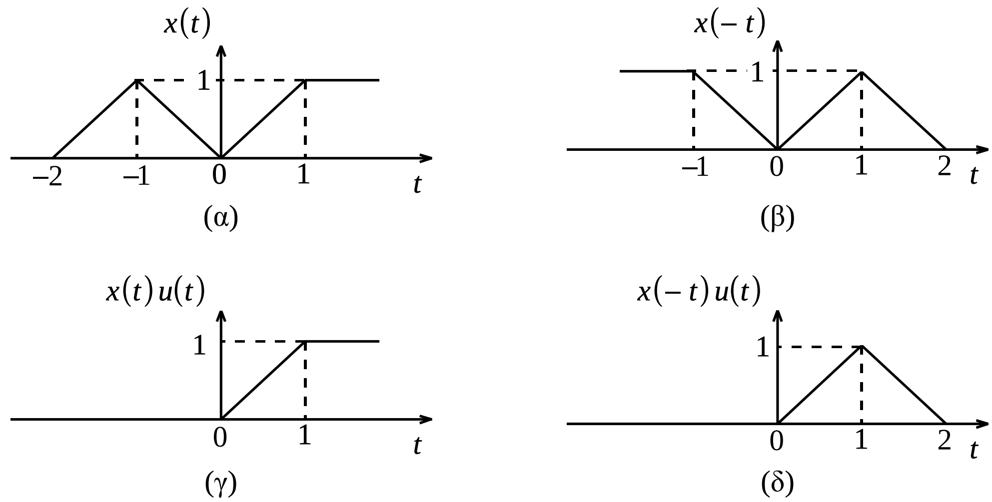
Σχήμα 1.28 Το σήμα του Παραδείγματος 1.7.

Λύση

Στο Σχήμα 1.29α εικονίζεται το σήμα $x(t)$, και στο Σχήμα 1.29β η ανάκλασή του $x(-t)$. Το αιτιατό τμήμα του σήματος, $x(t)$, $x^+(t)=x(t)u(t)$ εικονίζεται στο Σχήμα 1.29γ και το αιτιατό τμήμα του σήματος, $x(-t)$, $x^-(t)=x(-t)u(t)$ εικονίζεται στο Σχήμα 1.29δ.

Παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι το σήμα $x(t)$ είναι ίσο με το άθροισμα του σήματος $x^{+}(t)$ και της ανάκλασης $x^{-}(-t)$ του σήματος $x^{-}(t)$, δηλαδή είναι

$$x(t) = x^{+}(t) + x^{-}(-t)$$



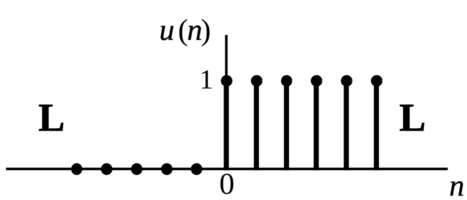
Σχήμα 1.29 Τα σήματα του Παραδείγματος 1.7.

1.4.6 Μοναδιαία βηματική ακολουθία-Μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου

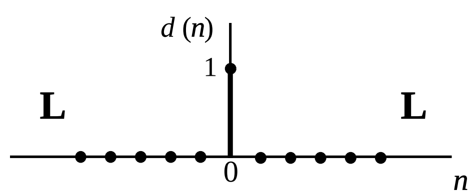
Η μοναδιαία βηματική ακολουθία λαμβάνεται από τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, αν αντικαταστήσουμε το t με το n και υπολογίσουμε αυτό μόνο για ακέραιες τιμές του χρόνου. Έτσι έχουμε

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \tag{1.53}$$

Στο Σχήμα 1.30 έχουμε τη γραφική παράσταση του μοναδιαίου βήματος διακριτού χρόνου.



Σχήμα 1.30 Η μοναδιαία βηματική ακολουθία.



Σχήμα 1.31 Η κρουστική ακολουθία

1.4.7 Το μοναδιαίου δείγμα-Κρουστική ακολουθία

Το μοναδιαίο δείγμα ορίζεται με τη σχέση

$$d(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1.54}$$

Στο Σχήμα 1.31 έχουμε τη γραφική παράσταση της κρουστικής ακολουθίας.

Η μοναδιαία βηματική ακολουθία συνδέεται με τη κρουστική ακολουθία με τη σχέση

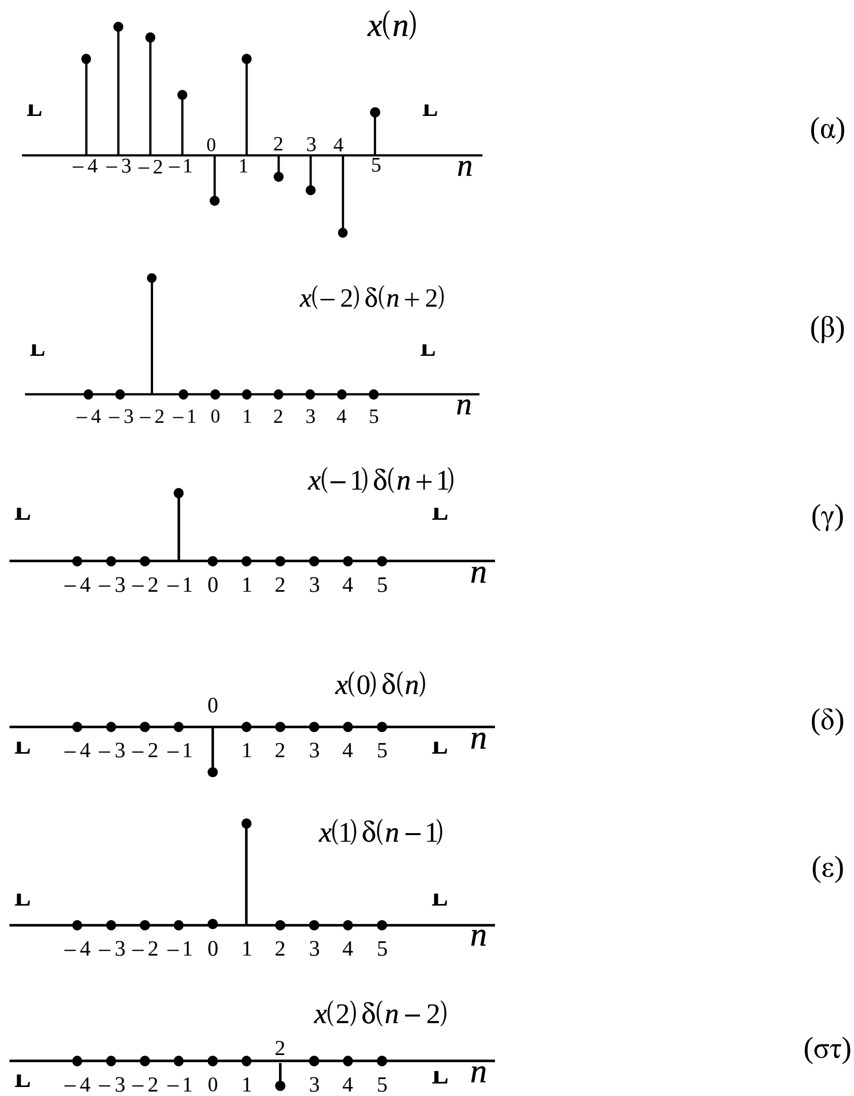
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} d(k) \tag{1.55}$$

ενώ η κρουστική ακολουθία συνδέεται με τη μοναδιαία βηματική ακολουθία με τη σχέση

$$d(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.56}$$

Παράδειγμα 1.8

Να αναπτυχθεί το διακριτό σήμα $x(n)$, του Σχήματος 1.32α, σε άθροισμα από ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος.



Σχήμα 1.32 Ανάπτυγμα σήματος διακριτού χρόνου σε ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος.

Λύση

Υπενθυμίζουμε ότι $\delta(n-n_0)$ είναι η ακολουθία της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, εκτός από το στοιχείο για $n=n_0$, το οποίο είναι ίσο με ένα. Η ακολουθία του Σχήματος 1.32β, της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν, εκτός από το στοιχείο τη χρονική στιγμή $n=n_0$, το οποίο είναι ίσο με $x(-2)$, εκφράζεται από τη

$$x(-2)\,\delta(n+2) \tag{1.57}$$

Με ανάλογο τρόπο εκφράζονται και οι ακολουθίες στα Σχήματα 1.32γ έως ζ. Έτσι το διακριτό σήμα $x(n)$ του Σχήματος 1.32α, μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{1.58}$$

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό δόθηκε ο ορισμός της έννοιας "σήμα" και η μαθηματική της έκφραση. Κατατάξαμε τα σήματα σε τρεις κατηγορίες, τα Αναλογικά Σήματα, τα Σήματα Διακριτού Χρόνου και τα Ψηφιακά Σήματα. Περιγράψαμε τις βασικές ιδιότητες που έχουν τα αναλογικά σήματα, που αποτελούν το αντικείμενο αυτού του βιβλίου, και αναφέραμε τις μεταβολές που υφίσταται ένα αναλογικό σήμα ως προς το χρόνο.

Επίσης στο κεφάλαιο αυτό περιγράψαμε το μιγαδικό εκθετικό σήμα και το ημιτονοειδές σήμα. Αναφέραμε δύο σημαντικές συναρτήσεις, τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος και τη συνάρτηση δέλτα.

1.5 Ασκήσεις

1.1 Ποιά από τα σήματα είναι περιοδικά;

$x_1(t)=\sin(10\pi t)$ $\quad x_2(t)=\sin(20\pi t)$ $\quad x_3(t)=\sin(31t)$

$x_4(t)=x_1(t)+x_2(t)$ $\quad x_5(t)=x_1(t)+x_3(t)$

1.2 Δίνεται το σήμα, το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση (1.22) στο Παράδειγμα 1.2. Να σχεδιάσετε τα σήματα

$y_1(t)=x(t+1)$ $\quad y_2(t)=x(2t)$ $\quad y_3(t)=x(t/2)$

$y_4(t)=x(1-t)$ $\quad y_5(t)=x(2t-1)$

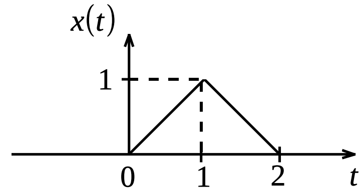
1.3 Δίνονται οι βασικές συναρτήσεις

$$\Pi(t)=u\left(t+\tfrac{1}{2}\right)-u\left(t-\tfrac{1}{2}\right) \qquad \Lambda(t)=\begin{cases} t+1, & -1\le t\le 0 \\ -t+1, & 0\le t\le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad r(t)=\begin{cases} t, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

Να σχεδιάσετε τα σήματα

$x_1(t)=\Pi(2t+6)$ $\quad x_2(t)=\Lambda(2t-1)$ $\quad x_3(t)=r(-0{,}5t+2)$

1.4 Να σχεδιάσετε τα σήματα (α) $x_0(t)u(t)$ και (β) $x_e(t)u(t)$ όπου $x_0(t)$ είναι το περιττό μέρος του σήματος $x(t)$ και $x_e(t)$ το άρτιο μέρος του.



1.5 Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή όχι. Αν το σήμα είναι περιοδικό να υπολογιστεί η θεμελιώδης συχνότητά του.

1) $x(t)=2\cos\left(3t+\frac{p}{4}\right)$

2) $x(t)=e^{j(pt-1)}$

3) $x(n)=\cos\left(\frac{8p}{7}n+2\right)$

4) $x(n)=e^{j\left(\frac{n}{8}-p\right)}$

5) $x(t)=\left[\sin\left(t-\frac{p}{6}\right)\right]^2$

6) $x(n)=\cos\left(\frac{p}{8}n^2\right)$

7) $x(n)=\cos\left(\frac{n}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{p}{4}n\right)$

8) $x(n)=2\cos\left(\frac{p}{4}n\right)+\sin\left(\frac{p}{8}n\right)-2\cos\left(\frac{p}{2}n-\frac{p}{6}\right)$

9) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-(t-3n)^2}$

1.6 Να εξεταστεί αν τα σήματα είναι ενεργειακά σήματα ή σήματα ισχύος και να υπολογιστεί η ενέργειά τους ή η ισχύς τους.

α) $x(t)=c\cdot e^{-at}\,u(t)\quad a>0$ β) $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$ γ) $x(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\theta)}$