

Εισαγωγή στην επιστήμη των υπολογιστών

Υπολογιστές και Δεδομένα

Κεφάλαιο 3ο

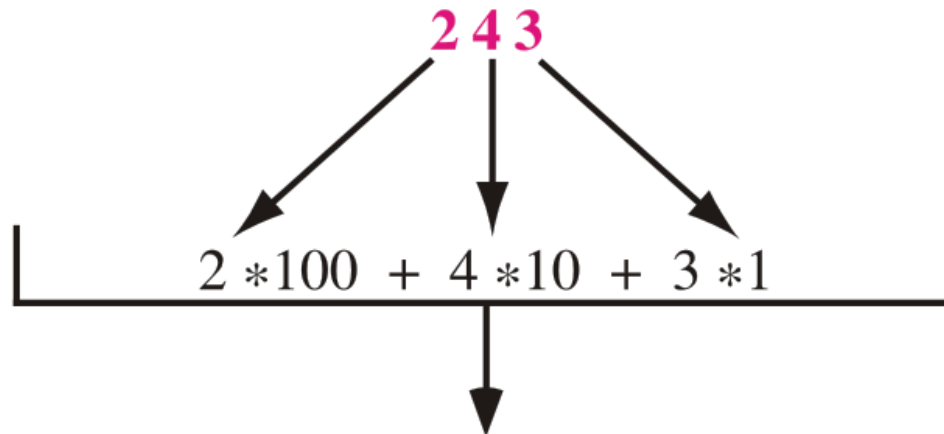
Αναπαράσταση Αριθμών

www.di.uoa.gr/~organosi

Δεκαδικό και Δυαδικό

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10.000	1000	100	10	1

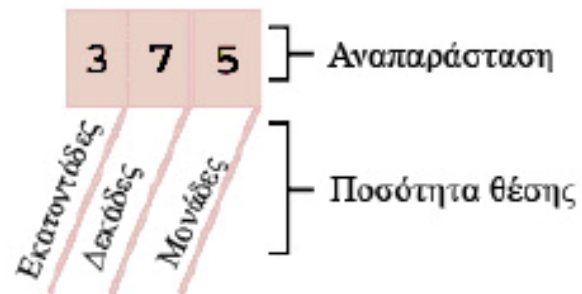
Δεκαδικές θέσεις



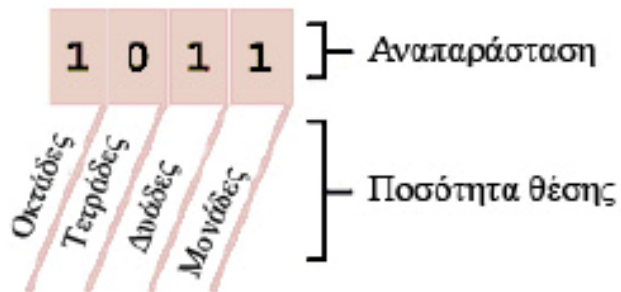
Διακόσια Σαράντα Τρία

Δεκαδικό σύστημα

α. Δεκαδικό σύστημα



β. Δυαδικό σύστημα



Δεκαδικό και Δυαδικό

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

Δυαδικές θέσεις

1 1 1 1 0 0 1 1

$$1*128 + 1*64 + 1*32 + 1*16 + 0*8 + 0*4 + 1*2 + 1*1$$

Διακόσια Σαράντα Τρία

Δυαδικό Σύστημα

Μετατροπή

- ♦ Για τη μετατροπή ενός αριθμού από το δυαδικό σύστημα στο δεκαδικό, πολλαπλασιάζουμε κάθε δυαδικό ψηφίο του αριθμού με το βάρος του και το αποτέλεσμα θα είναι είτε 0 είτε η τιμή του βάρους. Κατόπιν προσθέτουμε τα αποτελέσματα

0 1 0 1 1 0 1

δυαδικός αριθμός

64 32 16 8 4 2 1

τιμές θέσης

0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1

αποτελέσματα

45

δεκαδικός αριθμός

Δυαδικό
σχήμα

1	0	0	1	0	1				
					1	x	ένα	=	1
					0	x	δύο	=	0
					1	x	τέσσερα	=	4
					0	x	οκτώ	=	0
					0	x	δεκαέξι	=	0
					1	x	τριάντα-δύο	=	<u>32</u>

Τιμή
bit

Ποσότητα
θέσης

37 Σύνολο

Μετατροπή

◆ Μετατρέψτε τον δυαδικό αριθμό 10011 στο δεκαδικό σύστημα

◆ Λύση

- Γράφουμε τα μπιτ και τα βάρη τους. Πολλαπλασιάζουμε κάθε μπιτ με το αντίστοιχο βάρος και σημειώνουμε το αποτέλεσμα. προσθέτουμε τα αποτελέσματα για να πάρουμε τον δεκαδικό αριθμό.

Δυαδικός	1	0	0	1	1
----------	---	---	---	---	---

Βάρη	16	8	4	2	1
------	----	---	---	---	---

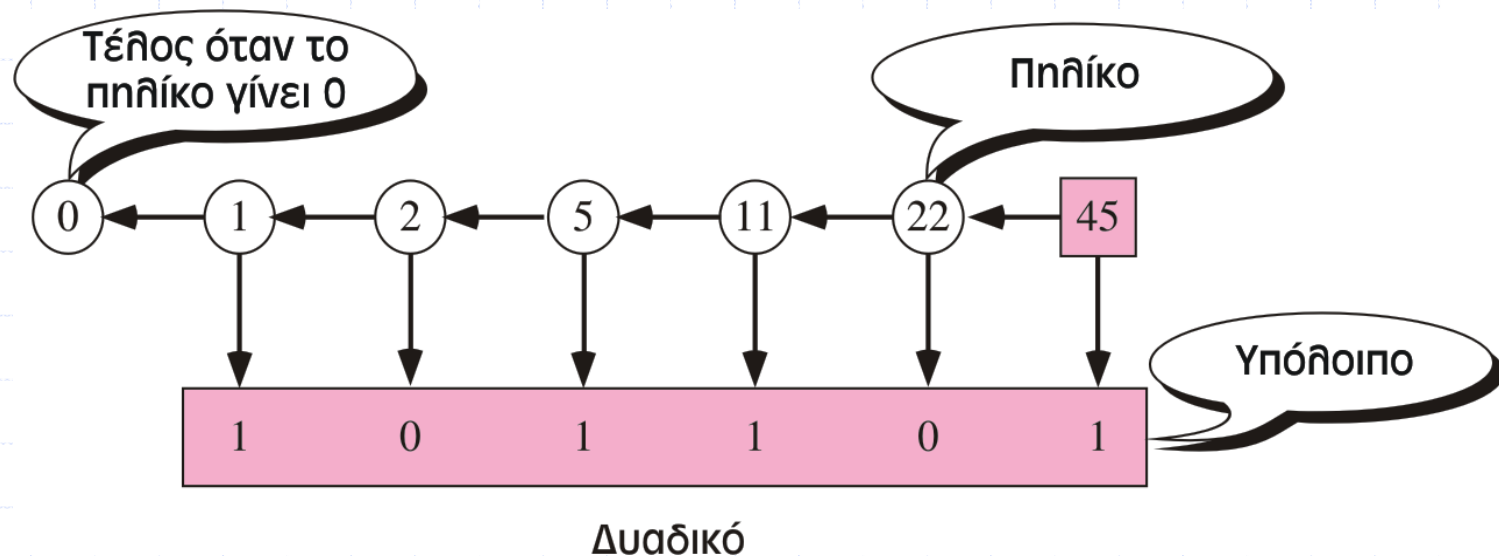
16	+	0	+	0	+	2	+	1
----	---	---	---	---	---	---	---	---

Δεκαδικός

19

Μετατροπή

- ◆ Για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε δυαδικό, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνεχείς διαιρέσεις.
- ◆ Ο αρχικός αριθμός του παραδείγματος, ο 45, διαιρείται με το 2. Το υπόλοιπο (1) αποτελεί το πρώτο δυαδικό ψηφίο,
- ◆ Το δεύτερο ψηφίο προσδιορίζεται από τη διαίρεση του πηλίκου (22) με το 2. Το υπόλοιπο (0) αποτελεί το δεύτερο δυαδικό ψηφίο
- ◆ Το πηλίκο διαιρείται με το 2 για να βρεθεί η επόμενη θέση. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το πηλίκο να γίνει 0.



Αλγόριθμος για την εύρεση της δυαδικής αναπαράστασης ενός ακέραιου θετικού

Βήμα 1. Διαίρεσε την τιμή με το δύο και σημείωσε το υπόλοιπο.

Βήμα 2. Όσο το πηλίκο είναι διάφορο του 0, συνέχισε να διαιρείς το νέο πηλίκο με το δύο και κατέγραφε το υπόλοιπο.

Βήμα 3. Τώρα που προέκυψε πηλίκο ίσο με μηδέν, η δυαδική αναπαράσταση της αρχικής τιμής αποτελείται από τα υπόλοιπα γραμμένα από τα δεξιά προς τα αριστερά με τη σειρά που σημειώθηκαν.

Μετατροπή

◆ Μετατρέψτε τον δεκαδικό αριθμό 35 στο δυαδικό σύστημα

◆ Λύση

- Γράφουμε τον αριθμό στη δεξιά γωνία. Διαιρούμε συνεχώς τον αριθμό με το 2 και σημειώνουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο. Τα πηλικά προχωρούν προς τα αριστερά, ενώ το υπόλοιπο σημειώνεται κάτω από την αντίστοιχη πράξη. Σταματάμε όταν το πηλίκο γίνει 0

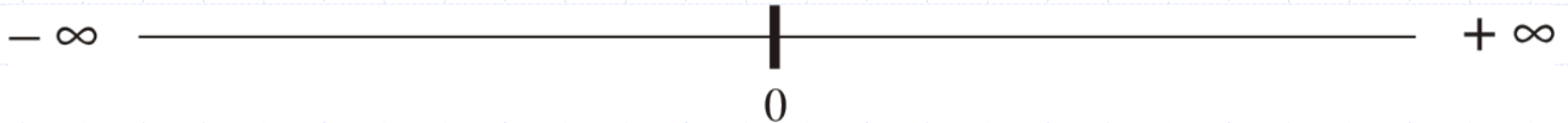
0 ← 1 ← 2 ← 4 ← 8 ← 17 ← 35 (Δεκαδικός)

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

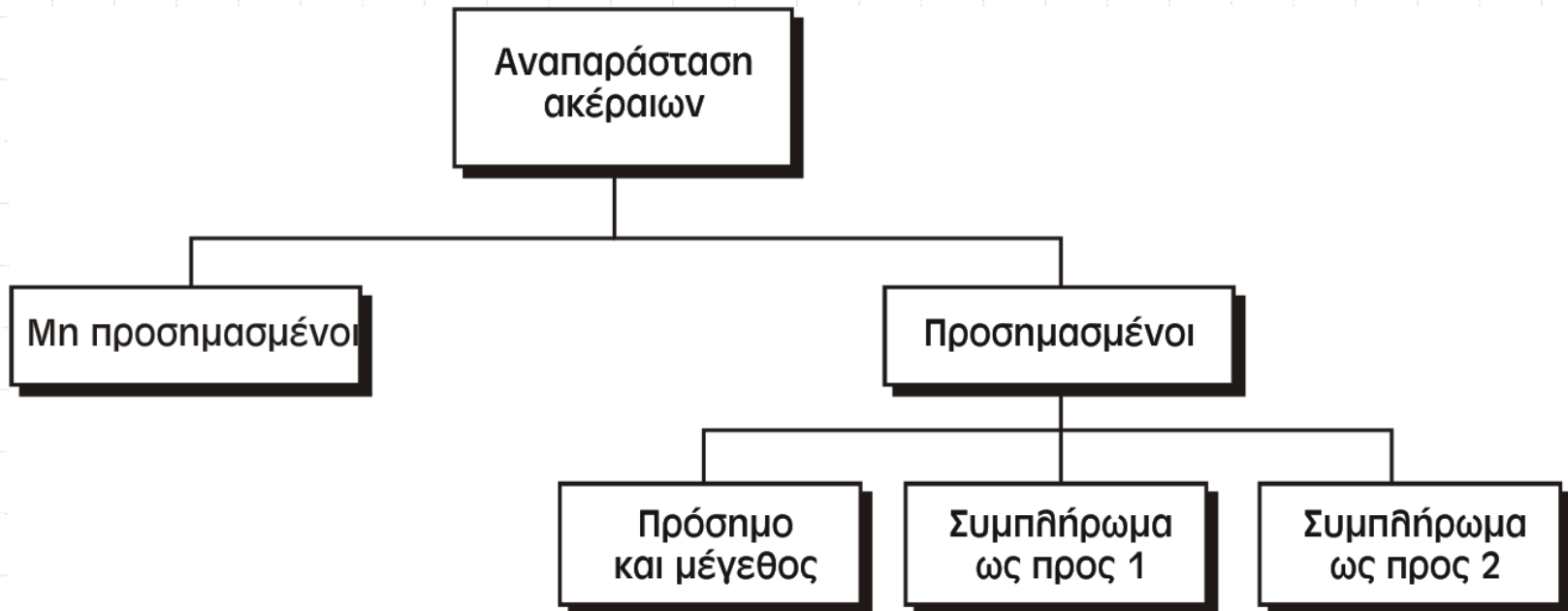
Δυαδικός

1 0 0 0 1 1

Αναπαράσταση Ακεραίων



Δεν υπάρχει υπολογιστής που να μπορεί να αποθηκεύσει όλους τους ακέραιους σε αυτό το διάστημα τιμών



Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

- ◆ Ένας **μη προσημασμένος ακέραιος** είναι ένας ακέραιος χωρίς πρόσημο που μπορεί να πάρει τιμές από το 0 μέχρι το θετικό άπειρο
- ◆ Επειδή δεν υπάρχει υπολογιστής που να μπορεί να αναπαραστήσει όλους τους ακέραιους σε αυτό το διάστημα τιμών, ορίζεται μια σταθερά που ονομάζεται **μέγιστος μη προσημασμένος ακέραιος** και έτσι ένας μη προσημασμένος ακέραιος μπορεί να πάρει τιμές από το 0 μέχρι αυτή τη σταθερά
- ◆ Ο μέγιστος μη προσημασμένος ακέραιος εξαρτάται από τον αριθμό των μπιτ N που χρησιμοποιεί ο υπολογιστής για την αναπαράσταση ενός μη προσημασμένου ακέραιου
- ◆ Διάστημα τιμών: $0 \dots (2^N - 1)$

Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

Αριθμός μπιτ	Διάστημα τιμών
8	0...255
16	0...65.535

- ◆ Η αποθήκευση μη προσημασμένων ακέραιων είναι μια απλή διαδικασία η οποία περιγράφεται με τα επόμενα βήματα:
 - Ο αριθμός μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα.
 - Αν το πλήθος των μπιτ είναι μικρότερο από N , τότε προστίθενται μηδενικά στα αριστερά του δυαδικού αριθμού ώστε να υπάρχουν συνολικά N μπιτ.

Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό 7 σε μια θέση μνήμης 8 μπιτ

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα (111).
- Προσθέτουμε πέντε μηδενικά ώστε να έχουμε ένα σύνολο από $N(8)$ μπιτ (00000111).
- Ο αριθμός κατόπιν αποθηκεύεται στη θέση μνήμης.

Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό 258 σε μια θέση μνήμης 16 μπιτ

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα (100000010).
- Προσθέτουμε επτά μηδενικά ώστε να έχουμε ένα σύνολο από $N(16)$ μπιτ (0000000100000010)
- Τέλος, ο αριθμός αποθηκεύεται στη θέση μνήμης

Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

- Αν ο ακέραιος προς αποθήκευση είναι μεγαλύτερος από το μέγιστο μη προσημασμένο τότε έχουμε μια κατάσταση που ονομάζεται **υπερχείλιση**

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 μπιτ	Δέσμευση 16 μπιτ
7	00000111	00000000000000111
234	11101010	0000000011101010
258	Υπερχείλιση	0000000100000010
24.760	Υπερχείλιση	0110000010111000
1.245.678	Υπερχείλιση	Υπερχείλιση

Αποθήκευση μη προσημασμένων ακεραίων σε δύο διαφορετικούς υπολογιστές με δέσμευση 8 και 16 μπιτ αντίστοιχα

Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

◆ Ερμηνεύστε τον αριθμό 00101011 στο δεκαδικό σύστημα, έχοντας ως δεδομένο ότι ο αριθμός έχει αποθηκευτεί ως μη προσημασμένος ακέραιος

◆ Λύση

- Εφαρμόζοντας τη διαδικασία μετατροπής από δυαδικό σε δεκαδικό που παρουσιάστηκε προηγουμένως, βρίσκουμε ότι ο αριθμός στο δεκαδικό σύστημα είναι ο 43

Μη Προσημασμένοι Ακέραιοι

- ◆ Εφαρμογές (σε οποιαδήποτε περίπτωση δεν χρειάζονται αρνητικοί αριθμοί)
 - Καταμέτρηση.
 - Διευθυνσιοδότηση.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

- ◆ Η αποθήκευση ενός ακεραίου σε μορφή πρόσημου και μεγέθους (sign and magnitude) απαιτεί ένα μπιτ για την αναπαράσταση του πρόσημου (0 για θετικό αριθμό, 1 για αρνητικό αριθμό)
- ◆ Σε μια δέσμευση 8 μπιτ, μόνο τα 7 από αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση της απόλυτης τιμής του αριθμού (δηλαδή του αριθμού χωρίς το πρόσημο).
- ◆ Έτσι, η μέγιστη θετική τιμή είναι το μισό της μη προσημασμένης τιμής.
- ◆ Διάστημα τιμών: $-(2^{N-1} - 1) \dots + (2^{N-1} - 1)$

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

- ◆ Στην αναπαράσταση πρόσημου και μεγέθους, το τελευταίο αριστερά μπιτ καθορίζει το πρόσημο του αριθμού. Αν είναι 0, ο αριθμός είναι θετικός. Αν είναι 1, ο αριθμός είναι αρνητικός.
- ◆ Υπάρχουν δύο μηδενικά: ένα θετικό και ένα αρνητικό. Η μορφή τους σε μια δέσμευση 8 μπιτ είναι η εξής:
 - +0 00000000
 - -0 10000000

Πλήθος μπιτ	Διάστημα τιμών
8	-127 ... -0 +0 ... +127
16	-32.767 ... -0 +0 ... +32.767
32	-2.147.483.647 ... -0 +0 .. + 2.147.483.647

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

- ◆ Η αποθήκευση ακεραίων πρόσημου και μεγέθους είναι απλή διαδικασία:
 - Ο αριθμός μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα, το πρόσημο αγνοείται.
 - Αν το πλήθος των μπιτ είναι μικρότερο από $N-1$, προστίθενται μηδενικά στα αριστερά του αριθμού ώστε να υπάρχει ένα σύνολο από $N-1$ μπιτ.
 - Αν ο αριθμός είναι θετικός, προστίθεται στα αριστερά ένα μηδενικό (ώστε να έχουμε σύνολο N μπιτ). Αν ο αριθμός είναι αρνητικός, προστίθεται στα αριστερά η μονάδα (ώστε και πάλι το σύνολο να είναι N μπιτ).

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό +7 σε μια θέση μνήμης 8 μπιτ με την αναπαράσταση πρόσημου και μεγέθους.

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό ισοδύναμό του (111).
- Προσθέτουμε τέσσερα 0 ώστε να έχουμε σύνολο $N-1$ (7) μπιτ (0000111)
- Επειδή ο αριθμός είναι θετικός, προσθέτουμε ένα επιπλέον 0, το οποίο εδώ φαίνεται με έντονη γραφή. Το αποτέλεσμα είναι **00000111**

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό -258 σε μια θέση μνήμης 16 μπιτ με την αναπαράσταση πρόσημου και μεγέθους

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα (100000010).
- Προσθέτουμε έξι 0 ώστε να έχουμε σύνολο $N-1$ (15) μπιτ (000000100000010)
- Επειδή ο αριθμός είναι αρνητικός, προσθέτουμε ένα 1, το οποίο φαίνεται με έντονη γραφή. Το αποτέλεσμα είναι **1**000000100000010

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 μπιτ	Δέσμευση 16 μπιτ
+7	00000111	0000000000000111
-124	11111100	1000000001111100
+258	Υπερχείλιση	0000000100000010
-24.760	Υπερχείλιση	1110000010111000

Αποθήκευση ακεραίων πρόσημου και μεγέθους σε δύο διαφορετικούς υπολογιστές

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

- ◆ Η διαδικασία της ερμηνείας μιας δυαδικής αναπαράστασης πρόσημου και μεγέθους στο δεκαδικό σύστημα είναι απλή.
 - Αγνοούμε το πρώτο (το τελευταίο αριστερά) μπιτ.
 - Μετατρέπουμε τα $N-1$ μπιτ από το δυαδικό στο δεκαδικό με τον τρόπο που δείξαμε στην αρχή του κεφαλαίου.
 - Προσθέτουμε ένα σύμβολο $+$ ή $-$ στον αριθμό, ανάλογα με το τελευταίο αριστερά μπιτ.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

◆ Ερμηνεύστε τον αριθμό 10111011 στο δεκαδικό σύστημα, έχοντας ως δεδομένο ότι ο αριθμός έχει αποθηκευτεί ως ακέραιος πρόσημου και μεγέθους

◆ Λύση

- Αν αγνοήσουμε το τελευταίο αριστερά μπιτ, το υπόλοιπο είναι 0111011.
- Αυτός ο αριθμός αντιστοιχεί με στον αριθμό 59 του δεκαδικού συστήματος.
- Το αριστερό μπιτ είναι το 1, άρα ο αριθμός είναι ο -59.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Πρόσημου και Μεγέθους

- ◆ Εφαρμογές (η μετατροπή από το δεκαδικό στο δυαδικό, και το αντίστροφο, είναι πολύ εύκολη και έτσι η αναπαράσταση είναι βολική για εφαρμογές στις οποίες δεν είναι απαραίτητες οι πράξεις με αριθμούς)
 - Μετατροπή αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά. Αφού ληφθεί δείγμα του αναλογικού σήματος, του αντιστοιχίζεται ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός ο οποίος μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα και στέλνεται μέσω των καναλιών επικοινωνίας.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

- ◆ Για την αναπαράσταση ενός θετικού αριθμού χρησιμοποιείται η σύμβαση των μη προσημασμένων ακεραίων
- ◆ Για την αναπαράσταση ενός αρνητικού αριθμού χρησιμοποιείται το συμπλήρωμα του θετικού αριθμού.
 - Το +7 αναπαρίσταται όπως και ένας μη προσημασμένος ακέραιος, ενώ το -7 αναπαρίσταται ως το συμπλήρωμα του +7.
- ◆ Το συμπλήρωμα είναι ο αριθμός που προκύπτει αν όλα τα 0 μετατραπούν σε 1 και όλα τα 1 μετατραπούν σε 0.
- ◆ Το τελευταίο αριστερά μπιτ καθορίζει το πρόσημο του αριθμού. Αν είναι 0, ο αριθμός είναι θετικός. Αν είναι 1, ο αριθμός είναι αρνητικός
- ◆ Διάστημα τιμών: $-(2^{N-1}-1) \dots + (2^{N-1}-1)$

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

- ◆ Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα υπάρχουν δύο μηδενικά: ένα θετικό και ένα αρνητικό. Σε μια δέσμευση 8 μπιτ αυτό έχει ως εξής:

+0 00000000
-0 11111111

Πλήθος μπιτ	Διάστημα τιμών
8	-127 ... -0 +0 ... +127
16	-32.767 ... -0 +0 ... +32.767
32	-2.147.483.647 ... -0 +0 .. + 2.147.483.647

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

- ◆ Η αποθήκευση ακεραίων συμπληρώματος ως προς ένα απαιτεί την ακόλουθη διαδικασία:
 - Ο αριθμός μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα, το πρόσημο αγνοείται.
 - Προστίθενται μηδενικά στα αριστερά του αριθμού ώστε να υπάρχει ένα σύνολο από N μπιτ.
 - Αν ο αριθμός είναι θετικός, δε χρειάζεται άλλη ενέργεια. Αν ο αριθμός είναι αρνητικός, κάθε μπιτ αντικαθίσταται από το συμπλήρωμά του (τα 0 γίνονται 1 και τα 1 γίνονται 0).

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό $+7$ σε μια θέση μνήμης 8 μπιτ με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό ισοδύναμό του (111).
- Προσθέτουμε πέντε 0 ώστε να έχουμε σύνολο $N(8)$ μπιτ (00000111).
- Ο αριθμός είναι θετικός, οπότε δε χρειάζεται καμία άλλη ενέργεια

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

- ◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό -258 σε μια θέση μνήμης 16 μπιτ με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα
- ◆ Λύση
 - Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα (100000010).
 - Προσθέτουμε επτά 0 ώστε να έχουμε σύνολο N (16) μπιτ (0000000100000010).
 - Ο αριθμός είναι αρνητικός, οπότε αντικαθιστούμε κάθε μπιτ με το συμπλήρωμά του. Το αποτέλεσμα είναι 11111101111101.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 μπιτ	Δέσμευση 16 μπιτ
+7	00000111	00000000000000111
-7	11111000	11111111111111000
+124	01111100	0000000001111100
-124	10000001	1111111110000011
+24.,760	Υπερχείλιση	0110000010111000
-24.,760	Υπερχείλιση	1001111101000111

Αποθήκευση ακεραίων συμπληρώματος ως προς ένα σε δύο διαφορετικούς υπολογιστές

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

- ◆ Η διαδικασία για την ερμηνεία μιας δυαδικής αναπαράστασης συμπληρώματος ως προς ένα στο δεκαδικό σύστημα είναι τα ακόλουθα:
 - Αν το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι 0 (θετικός αριθμός),
 - ◆ Μετατρέπουμε ολόκληρο τον αριθμό από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα.
 - ◆ Τοποθετούμε θετικό πρόσημο (+) μπροστά από τον αριθμό.
 - Αν το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι 1 (αρνητικός αριθμός),
 - ◆ Αντικαθιστούμε τον αριθμό με το συμπλήρωμά του (αλλάζουμε όλα τα 0 σε 1, και το αντίστροφο).
 - ◆ Μετατρέπουμε ολόκληρο τον αριθμό από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα.
 - ◆ Τοποθετούμε μπροστά από τον αριθμό αρνητικό πρόσημο (-).

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

◆ Ερμηνεύστε τον αριθμό 11110110 στο δεκαδικό σύστημα, έχοντας ως δεδομένο ότι ο αριθμός έχει αποθηκευτεί ως ακέραιος συμπληρώματος ως προς ένα

◆ Λύση

- Το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι το 1, άρα ο αριθμός είναι αρνητικός.
- Πρώτα βρίσκουμε το συμπλήρωμά του. Το αποτέλεσμα είναι 00001001, το οποίο στο δεκαδικό είναι ο αριθμός 9.
- Επομένως ο αρχικός αριθμός είναι το -9 .

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Ένα

◆ Εφαρμογές

- Επικοινωνία Δεδομένων
- Ανίχνευση και διόρθωση σφαλμάτων

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

- ◆ Η αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα έχει δύο μηδέν ($+0$ και -0), γεγονός που μπορεί να προκαλέσει σύγχυση σε υπολογισμούς
- ◆ Αν προσθέσουμε έναν αριθμό με το συμπλήρωμά του (π.χ. $+4$ και -4) σε αυτή την αναπαράσταση, παίρνουμε ως αποτέλεσμα αρνητικό μηδέν (-0) αντί για θετικό ($+0$)
- ◆ Η **αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο** λύνει όλα αυτά τα προβλήματα

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

- ◆ Το συμπλήρωμα ως προς δύο αποτελεί σήμερα τον πιο συνηθισμένο, τον πιο σημαντικό, και τον πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο τρόπο αναπαράστασης ακεραίων.
- ◆ Διάστημα τιμών: $-(2^{N-1}) \dots + (2^{N-1}-1)$

Πλήθος μπιτ	Διάστημα τιμών
8	-128 ... 0 ... +127
16	-32.768 ... 0 ... +32.767
32	-2.147.483.648 ... 0 .. + 2.147.483.647

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

- ◆ Η αποθήκευση αριθμών συμπληρώματος ως προς δύο απαιτεί τα ακόλουθα βήματα:
 - Ο αριθμός μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα, το πρόσημο αγνοείται.
 - Αν το πλήθος των μπιτ είναι μικρότερο από N , προστίθενται μηδενικά στα αριστερά του αριθμού ώστε να υπάρχει ένα σύνολο από N μπιτ.
 - Αν το πρόσημο είναι θετικό, δε χρειάζεται καμία άλλη ενέργεια. Αν το πρόσημο είναι αρνητικό, μένουν ως έχουν όλα τα δεξιότερα 0 και το πρώτο 1. Τα υπόλοιπα μπιτ αντικαθίστανται από το συμπλήρωμά τους.
- ◆ Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο, το τελευταίο αριστερά μπιτ καθορίζει το πρόσημο του αριθμού. Αν είναι 0, ο αριθμός είναι θετικός. Αν είναι 1, ο αριθμός είναι αρνητικός.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

α. Χρήση σχημάτων μήκους τρία

Σχήμα bit	Τιμή
011	3
010	2
001	1
000	0
111	-1
110	-2
101	-3
100	-4

β. Χρήση σχημάτων μήκους τέσσερα

Σχήμα bit	Τιμή
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

Συμβολισμός συμπληρώματος
ως προς δύο για το 6
με χρήση τεσσάρων bits

0 1 1 0

Αντιγραφή των bits
από τα δεξιά προς τα
αριστερά **μέχρι και το
πρώτο 1**

Συμβολισμός συμπληρώματος
ως προς δύο για το -6
με χρήση τεσσάρων bits

1 0 1 0

Αντικατάσταση των
υπολοίπων bits με
το συμπλήρωμα τους

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό $+7$ σε μια θέση μνήμης 8 μπιτ με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα (111).
- Προσθέτουμε πέντε 0 ώστε να έχουμε σύνολο N (8) μπιτ (00000111).
- Ο αριθμός είναι θετικός, οπότε δε χρειάζεται καμία άλλη ενέργεια

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

◆ Αποθηκεύστε τον αριθμό -40 σε μια θέση μνήμης 16 μπιτ με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα (101000).
- Προσθέτουμε δέκα 0 ώστε να έχουμε σύνολο N (16) μπιτ (00000000000101000).
- Ο αριθμός είναι αρνητικός, οπότε αφήνουμε τα δεξιότερα 0 μέχρι το πρώτο 1 (και το 1) ως έχουν, και αντικαθιστούμε τα υπόλοιπα μπιτ με το συμπλήρωμά τους.
- Το αποτέλεσμα είναι 11111111101**1000**.

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 μπιτ	Δέσμευση 16 μπιτ
+7	00000111	00000000000000111
-7	11111001	11111111111111001
+124	01111100	0000000001111100
-124	10000100	1111111110000100
+24.760	Υπερχείλιση	0110000010111000
-24.760	Υπερχείλιση	1001111101001000

Παράδειγμα αναπαράστασης συμπληρώματος ως προς δύο σε δύο υπολογιστές

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

- ◆ Τα βήματα για την ερμηνεία μιας δυαδικής αναπαράστασης συμπληρώματος ως προς δύο στο δεκαδικό σύστημα είναι τα εξής:
 - Αν το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι 0 (θετικός αριθμός)
 - ◆ Μετατρέπουμε ολόκληρο τον αριθμό από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα.
 - ◆ Τοποθετούμε θετικό πρόσημο (+) μπροστά από τον αριθμό.
 - Αν το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι 1 (αρνητικός αριθμός)
 - ◆ Αφήνουμε τα δεξιότερα μπιτ μέχρι το πρώτο 1 (μαζί με αυτό) ως έχουν. Αντικαθιστούμε τα υπόλοιπα μπιτ με το συμπλήρωμά τους.
 - ◆ Μετατρέπουμε ολόκληρο τον αριθμό από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα.
 - ◆ Τοποθετούμε μπροστά από τον αριθμό αρνητικό πρόσημο (-).

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

◆ Ερμηνεύστε τον αριθμό 11110110 στο δεκαδικό σύστημα, έχοντας ως δεδομένο ότι ο αριθμός έχει αποθηκευτεί ως ακέραιος συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Λύση

- Το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι το 1, άρα ο αριθμός είναι αρνητικός.
- Αφήνουμε τα δεξιότερα μπιτ (10) ως έχουν, και βρίσκουμε το συμπλήρωμα των υπολοίπων.
- Το αποτέλεσμα είναι 000010**10**.
- Ο αριθμός του συμπληρώματος ως προς δύο είναι το 10. Επομένως ο αρχικός αριθμός ήταν το -10_{46}

Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Μορφή Συμπληρώματος ως προς Δύο

◆ Εφαρμογές

- Η αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο αποτελεί τον τυπικό τρόπο αναπαράστασης για την αποθήκευση ακέραιων στους σύγχρονους υπολογιστές

Πλεόνασμα (Υπέρβαση)

- ◆ Άλλη μια μορφή αναπαράστασης που επιτρέπει την αποθήκευση τόσο θετικών όσο και αρνητικών αριθμών σε έναν υπολογιστή είναι το **σύστημα πλεονάσματος** (Excess system)
- ◆ Για να γίνει μια μετατροπή πλεονάσματος χρησιμοποιείται ένας θετικός αριθμός, ο οποίος ονομάζεται "μαγικός".
- ◆ Ο μαγικός αριθμός συνήθως είναι ο (2^{N-1}) ή ο $(2^{N-1}-1)$, όπου N η δέσμευση μπιτ.
- ◆ Για παράδειγμα, αν το N είναι 8, ο μαγικός αριθμός είναι είτε ο 128 είτε ο 127. Στην πρώτη περίπτωση ονομάζουμε την αναπαράσταση πλεόνασμα του 128 (Excess_128), και στη δεύτερη περίπτωση πλεόνασμα του 127 (Excess_127).

Πλεόνασμα

- ◆ Για την αναπαράσταση ενός αριθμού στο σύστημα πλεονάσματος χρησιμοποιείται η ακόλουθη διαδικασία:
 - Ο μαγικός αριθμός προστίθεται στον ακέραιο.
 - Το αποτέλεσμα μετατρέπεται στο δυαδικό και προστίθενται μηδενικά ώστε να υπάρχουν συνολικά N μπιτ.

Υπέρβαση κατά 8

Σχήμα bit	Τιμή
1111	7
1110	6
1101	5
1100	4
1011	3
1010	2
1001	1
1000	0
0111	-1
0110	-2
0101	-3
0100	-4
0011	-5
0010	-6
0001	-7
0000	-8

Πλεόνασμα

◆ Αναπαραστήστε το -25 σε σύστημα πλεονάσματος 127 με δέσμευση 8 μπιτ

◆ Λύση

- Πρώτα προσθέτουμε στο -25 το 127 , και παίρνουμε αποτέλεσμα 102 .
- Στο δυαδικό σύστημα αυτός ο αριθμός είναι ο 1100110 .
- Προσθέτουμε ένα μπιτ για να κάνουμε το μήκος 8 μπιτ.
- Η αναπαράσταση είναι 01100110 .

Πλεόνασμα

◆ Για να ερμηνεύσουμε έναν αριθμό στο σύστημα πλεονάσματος, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη διαδικασία:

- Μετατρέπουμε τον αριθμό στο δεκαδικό σύστημα.
- Αφαιρούμε τον μαγικό αριθμό από τον ακέραιο.

Πλεόνασμα

◆ Ερμηνεύστε τον αριθμό 1111110, με δεδομένο ότι η αναπαράσταση είναι σε σύστημα πλεονάσματος 127

◆ Λύση

- Πρώτα μετατρέπουμε τον αριθμό στο δεκαδικό σύστημα. Είναι ο 254.
- Κατόπιν αφαιρούμε το 127 από τον αριθμό.
- Το αποτέλεσμα στο δεκαδικό είναι 127.

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

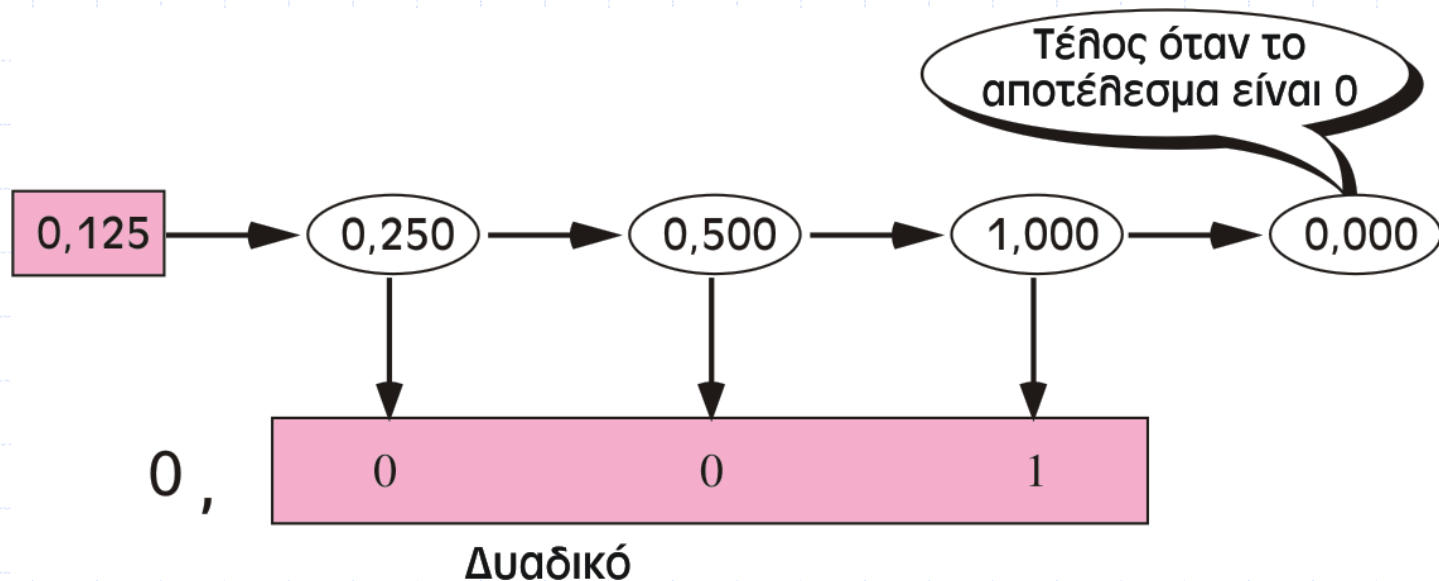
- ◆ Για να αναπαρασταθεί ένας αριθμός **κινητής υποδιαστολής** (floating point — ένας αριθμός που περιέχει έναν ακέραιο και ένα **κλασματικό μέρος**), διαιρείται σε δύο μέρη:
 - στο ακέραιο μέρος
 - στο κλασματικό μέρος.
- ◆ Για παράδειγμα, ο αριθμός κινητής υποδιαστολής 14,234 έχει το ακέραιο μέρος 14 και το κλασματικό μέρος 0,234.

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό κινητής υποδιαστολής στο δυαδικό σύστημα, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη διαδικασία:
 - Μετατρέπουμε το ακέραιο μέρος στο δυαδικό.
 - Μετατρέπουμε το κλασματικό μέρος στο δυαδικό.
 - Τοποθετούμε μια υποδιαστολή ανάμεσα στα δύο μέρη

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Η μετατροπή του ακέραιου μέρους γίνεται κατά τα γνωστά
- ◆ Η μετατροπή του κλασματικού μέρους γίνεται ως εξής:
 - Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος επί 2 μέχρι το κλασματικό μέρος του αποτελέσματος να γίνει 0 ή να συμπληρώσουμε τον αριθμό των μπιτ που δεσμεύονται



Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Μετατρέψτε το κλασματικό μέρος 0,875 στο δυαδικό σύστημα
- ◆ Λύση
 - Γράφουμε το κλασματικό μέρος στην αριστερή γωνία.
 - Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος συνεχώς με το 2, παίρνοντας κάθε φορά το ακέραιο μέρος ως το δυαδικό ψηφίο.
 - Σταματάμε όταν ο αριθμός γίνει 0,0

Κλασματικό μέρος	0,875	→	1,750	→	1,50	→	1,0	→	0,0
			↓		↓		↓		
Δυαδικός	0,		1		1		1		

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

◆ Μετατρέψτε το κλασματικό μέρος 0,4 σε δυαδικό σχήμα 6 μπιτ

◆ Λύση

- Γράφουμε το κλασματικό μέρος στην αριστερή γωνία. Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό συνεχώς με το 2, παίρνοντας κάθε φορά το ακέραιο μέρος ως το δυαδικό ψηφίο. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να φτάσουμε ποτέ σε μια ακριβή δυαδική αναπαράσταση, επειδή το αρχικό κλασματικό μέρος επανεμφανίζεται. Μπορούμε όμως να συνεχίσουμε μέχρι να συμπληρώσουμε 6 μπιτ.

Κλασματικό μέρος	0,4	→	0,8	→	1,6	→	1,2	→	0,4	→	0,8	→	1,6
			↓		↓		↓		↓		↓		↓
Δυαδικός	0,		0		1		1		0		0		1

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Για να αναπαραστήσουμε τον αριθμό 71,3125 (+1000111,0101) θα μπορούσαμε να αποθηκεύσουμε στη μνήμη το πρόσημο, όλα τα μπιτ, και τη θέση της υποδιαστολής. Παρόλο που μια τέτοια προσέγγιση είναι εφικτή, δυσχεραίνει πολύ τις πράξεις με τους αριθμούς
- ◆ Για τους αριθμούς κινητής υποδιαστολής είναι απαραίτητος ένας τυπικός τρόπος αναπαράστασης. Τη λύση μάς την παρέχει η **κανονικοποίηση** (normalization), δηλαδή η μεταφορά της υποδιαστολής έτσι ώστε αριστερά από αυτή να υπάρχει μόνο ένας άσσος (1)

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Για να προσδιορίσουμε την αρχική τιμή του αριθμού τον πολλαπλασιάζουμε με 2^e , όπου e είναι το πλήθος των μπιτ κατά το οποίο έχει μεταφερθεί η υποδιαστολή:
 - θετικό για μεταφορά προς τα αριστερά
 - αρνητικό για μεταφορά προς τα δεξιά.
- ◆ Κατόπιν προσθέτουμε ένα θετικό ή αρνητικό πρόσημο, ανάλογα με το πρόσημο του αρχικού αριθμού.

Αρχικός αριθμός	Μεταφορά	Κανονικοποιημένος αριθμός
+1010001,11001	← 6	$+2^6 \times 1,01000111001$
-111,000011	← 2	$-2^2 \times 1,11000011$
+0,00000111001	6 →	$+2^{-6} \times 1,11001$
-0,001110011	3 →	$-2^{-3} \times 1,110011$

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Εφόσον κανονικοποιηθεί ένας αριθμός αποθηκεύονται μόνο τρεις πληροφορίες σχετικά με αυτόν:
 - το πρόσημο
 - ο εκθέτης
 - το σημαινόμενο (*significand*) τμήμα (τα μπιτ που βρίσκονται δεξιά από την υποδιαστολή)

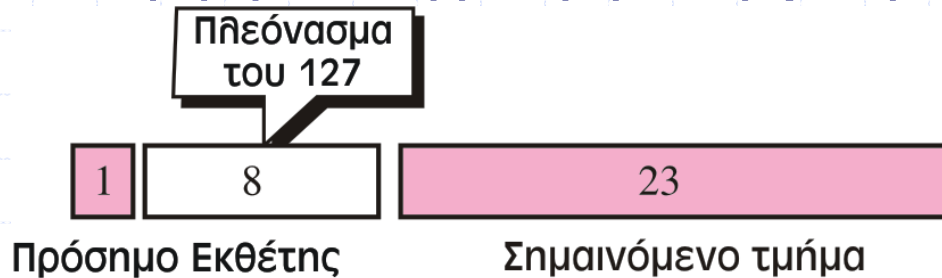
Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Το πρόσημο ενός αριθμού μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μπιτ (0 ή 1)
- ◆ Για την αποθήκευση του εκθέτη χρησιμοποιείται η αναπαράσταση πλεονάσματος
- ◆ Το σημαινόμενο τμήμα αποθηκεύεται ως μη προσημασμένος ακέραιος.

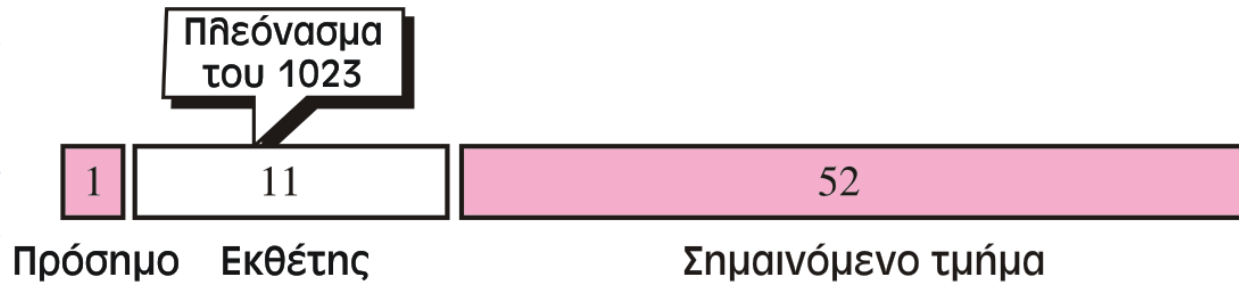
Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

◆ Πρότυπα ΙΕΕΕ

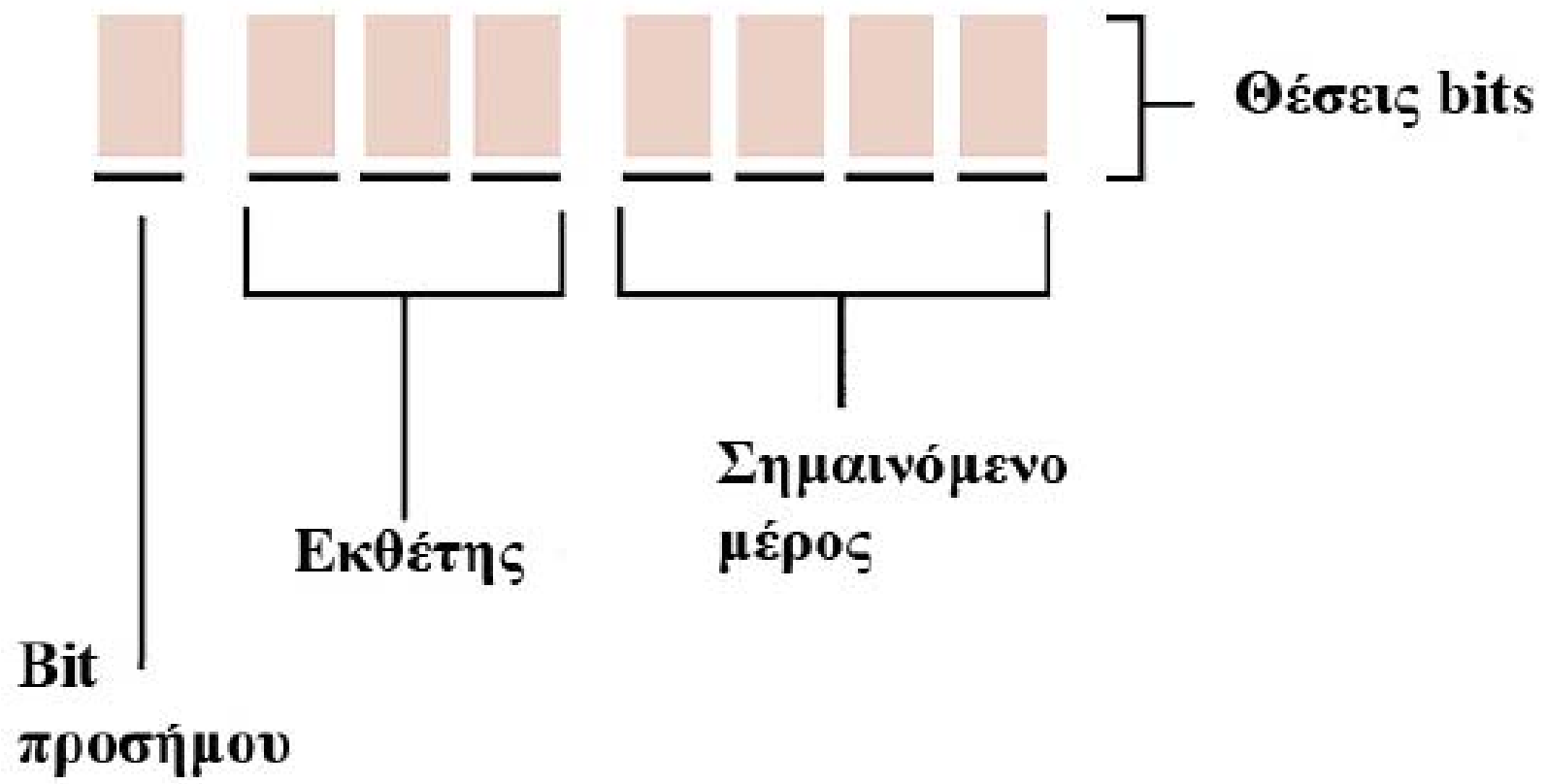
- Μορφή Απλής Ακρίβειας (32 μπιτ)
- Μορφή Διπλής Ακρίβειας (64 μπιτ)



α. Μορφή απλής ακριβείας



β. Μορφή διπλής ακριβείας



Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

◆ Η διαδικασία για την αποθήκευση ενός κανονικοποιημένου αριθμού κινητής υποδιαστολής στη μνήμη σε **μορφή απλής ακριβείας** (single-precision format) έχει ως εξής:

- Αποθηκεύουμε το πρόσημο ως 0 (θετικό) ή ως 1 (αρνητικό).
- Αποθηκεύουμε τον εκθέτη (δύναμη του 2) σε μορφή πλεονάσματος του 127.
- Αποθηκεύουμε το δεκαδικό μέρος ως μη προσημασμένο ακέραιο.

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

◆ Βρείτε την αναπαράσταση του κανονικοποιημένου αριθμού $+ 2^6 \times \mathbf{1,01000111001}$

◆ Λύση

- Το πρόσημο είναι θετικό και αναπαρίσταται ως 0.
- Ο εκθέτης είναι 6. Αφού χρησιμοποιούμε αναπαράσταση πλεονάσματος του 127, προσθέτουμε το 127 στο 6 και παίρνουμε 133. Αυτό στο δυαδικό είναι 10000101.

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- Το σημαινόμενο τμήμα είναι 01000111001. Αν αυξήσουμε το πλήθος των μπιτ σε 23 έχουμε ως αποτέλεσμα 01000111001000000000000.
- ◆ επειδή πρόκειται για κλασματικό μέρος, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε το αριστερό 0. Αν αγνοήσουμε αυτό το 0 θα είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με το 2.
- ◆ προσθέτουμε επιπλέον μηδενικά στο δεξιό άκρο (και όχι στο αριστερό), και πάλι επειδή πρόκειται για κλασματικό μέρος. Η προσθήκη μηδενικών στο δεξιό άκρο ενός κλασματικού μέρους δεν το επηρεάζει, αλλά η προσθήκη στο αριστερό άκρο προκαλεί τη διαίρεση του αριθμού με κάποια δύναμη του 2.
- Ο αριθμός στη μνήμη καταλαμβάνει 32 μπιτ και έχει ως εξής:

πρόσημο	εκθέτης	σημαινόμενο τμήμα
0	10000101	010001110010000000000000

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ❖ Τα επόμενα βήματα περιγράφουν τη διαδικασία που χρησιμοποιείται για την ερμηνεία ενός αριθμού 32 μπιτ, αποθηκευμένου στη μνήμη με τη μορφή κινητής υποδιαστολής.
 - Το τελευταίο αριστερά μπιτ χρησιμοποιείται ως πρόσημο.
 - Τα επόμενα 8 μπιτ μετατρέπονται στο δεκαδικό, και από το αποτέλεσμα αφαιρείται το 127. Έτσι έχουμε τον εκθέτη.
 - Στα επόμενα 23 μπιτ προστίθεται το 1, καθώς και μια υποδιαστολή. Τα επιπλέον 0 στα δεξιά μπορούν να αγνοηθούν.
 - Η υποδιαστολή μεταφέρεται στη σωστή θέση με τη χρήση της τιμής του εκθέτη.
 - Το ακέραιο μέρος μετατρέπεται στο δεκαδικό σύστημα.
 - Το κλασματικό μέρος μετατρέπεται στο δεκαδικό σύστημα.
 - Το ακέραιο και το κλασματικό μέρος συνδυάζονται

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Ερμηνεύστε τον ακόλουθο αριθμό 32 μπιτ κινητής υποδιαστολής:

1 01111100 110011000000000000000000

- ◆ Λύση

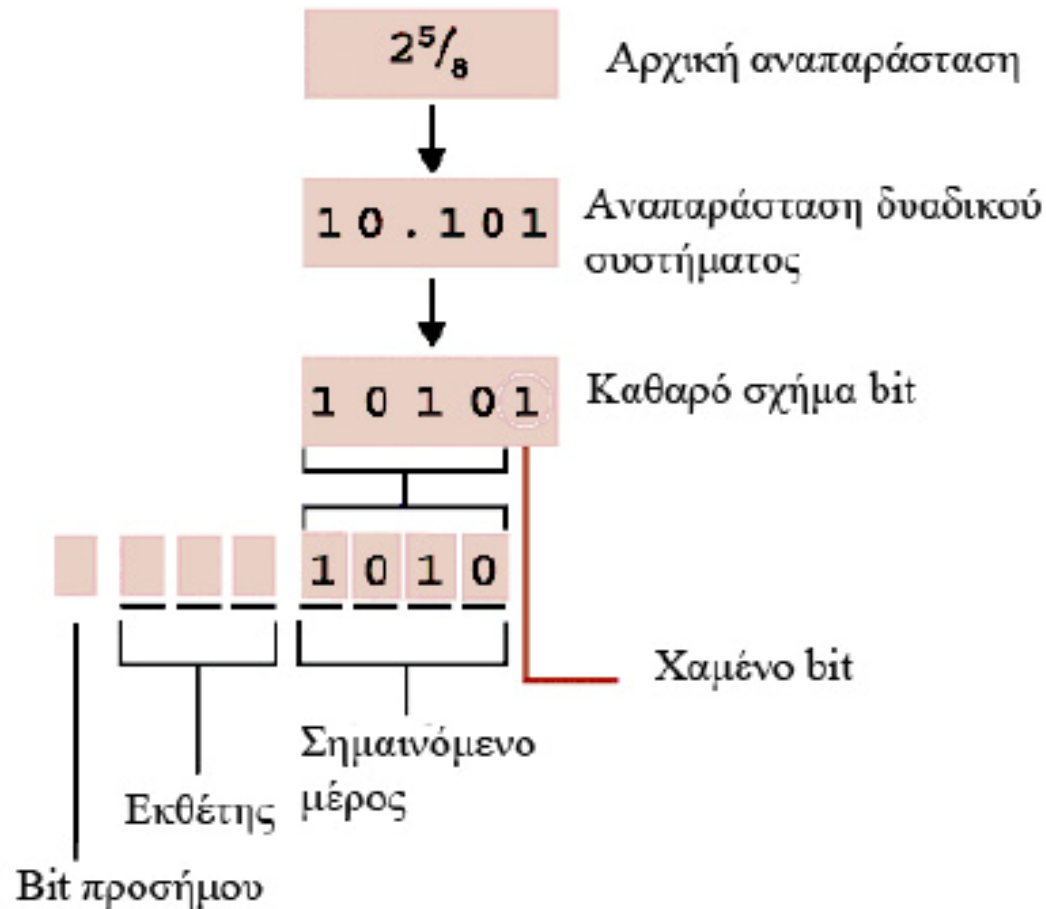
- Το τελευταίο αριστερά μπιτ είναι το πρόσημο (-)
- Τα επόμενα 8 μπιτ είναι 01111100, το οποίο στο δεκαδικό είναι ο αριθμός 124. Αν αφαιρέσουμε 127 παίρνουμε τον εκθέτη -3
- Τα επόμενα 23 μπιτ αποτελούν το σημαινόμενο τμήμα. Αγνοώντας τα επιπλέον μηδενικά έχουμε ως αποτέλεσμα 110011.
- Αφού προσθέσουμε το 1 στα αριστερά της υποδιαστολής, ο κανονικοποιημένος αριθμός στο δυαδικό έχει ως εξής:

$$-2^{-3} \times 1,110011$$

Για να μετατρέψουμε ένα αριθμό κινητής υποδιαστολής σε δυαδικό:

- **Μετατρέπουμε το ακέραιο μέρος σε δυαδικό**
- **Μετατρέπουμε το κλασματικό μέρος σε δυαδικό.**
- **Τοποθετούμε υποδιαστολή μεταξύ των δύο.**

Κωδικοποίηση της τιμής 2,625



Δεκαεξαδικός Συμβολισμός

- ◆ Οι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν σε Δεκαεξαδικό συμβολισμό
- ◆ Ένας αριθμός όπως ο 81,5625 μπορεί να αναπαρασταθεί
 - στο πρότυπο IEEE ως
01000010101000111001000000000000
 - σε Δεκαεξαδικό συμβολισμό ως **x42A39000**