

Εισαγωγή στην επιστήμη των υπολογιστών

Υπολογιστές και Δεδομένα

Κεφάλαιο 4ο

Πράξεις με μπιτ

Πράξεις με μπιτ



Αριθμητικές Πράξεις σε Ακέραιους

- ◆ Πρόσθεση, Αφαίρεση, Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση
- ◆ Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση στο επίπεδο του λογισμικού βασίζονται στην πρόσθεση και την αφαίρεση αντίστοιχα

Πρόσθεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

Πλήθος μονάδων	Αποτέλεσμα	Κρατούμενο
Καμία	0	
Μία	1	
Δύο	0	1
Τρεις	1	1

Κανόνας πρόσθεσης ακεραίων σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

Προσθέτουμε δύο μπιτ και μεταφέρουμε το κρατούμενο στην επόμενη στήλη. Αν υπάρχει κάποιο τελικό κρατούμενο μετά την πρόσθεση στην πιο αριστερή στήλη, το αγνοούμε.

Πρόσθεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Προσθέστε δύο αριθμούς σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο: $(+17) + (+22)$
→ $(+39)$

◆ Λύση

Κρατούμενο				1					
	0	0	0	1	0	0	0	1	+
	0	0	0	1	0	1	1	0	
Αποτέλεσμα	0	0	1	0	0	1	1	1	

Το αποτέλεσμα είναι 39 στο δεκαδικό σύστημα.

Πρόσθεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Προσθέστε το 24 και το -17 . Και οι δύο αριθμοί είναι σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο. $(+24) + (-17) \rightarrow (+7)$

◆ Λύση

Κρατούμενο

1 1 1 1 1

0 0 0 1 1 0 0 0 +

1 1 1 0 1 1 1 1

Αποτέλεσμα

0 0 0 0 0 1 1 1

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα είναι $+7$ και ότι το τελευταίο κρατούμενο (από την πιο αριστερή στήλη) αγνοείται

Πρόσθεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Προσθέστε το -35 και το 20 . Και οι δύο αριθμοί είναι σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο. $(-35) + (+20) \rightarrow (-15)$

◆ Λύση

Κρατούμενο

1 1 1

1 1 0 1 1 1 0 1 +

0 0 0 1 0 1 0 0

Αποτέλεσμα

1 1 1 1 0 0 0 1

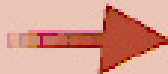



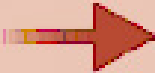

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα είναι -15 (το συμπλήρωμα ως προς δύο του αποτελέσματος είναι το 15).

Πρόσθεση με συμπλήρωμα ως προς 2

Πρόβλημα
στο δεκαδικό

Πρόβλημα σε μορφή
συμπληρώματος ως
προς δύο

Αποτέλεσμα
στο δεκάδικο

$\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0010 \\ \hline 0101 \end{array}$		5
$\begin{array}{r} -3 \\ + -2 \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{r} 1101 \\ + 1110 \\ \hline 1011 \end{array}$		-5
$\begin{array}{r} 7 \\ + -5 \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{r} 0111 \\ + 1011 \\ \hline 0010 \end{array}$		2

Πρόσθεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Προσθέστε το 127 και το 3. Και οι δύο αριθμοί είναι σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο. $(+127) + (+3) \rightarrow (+130)$

◆ Λύση

Κρατούμενο

1 1 1 1 1 1 1

0 1 1 1 1 1 1 1 +

0 0 0 0 0 0 1 1

Αποτέλεσμα

1 0 0 0 0 0 1 0

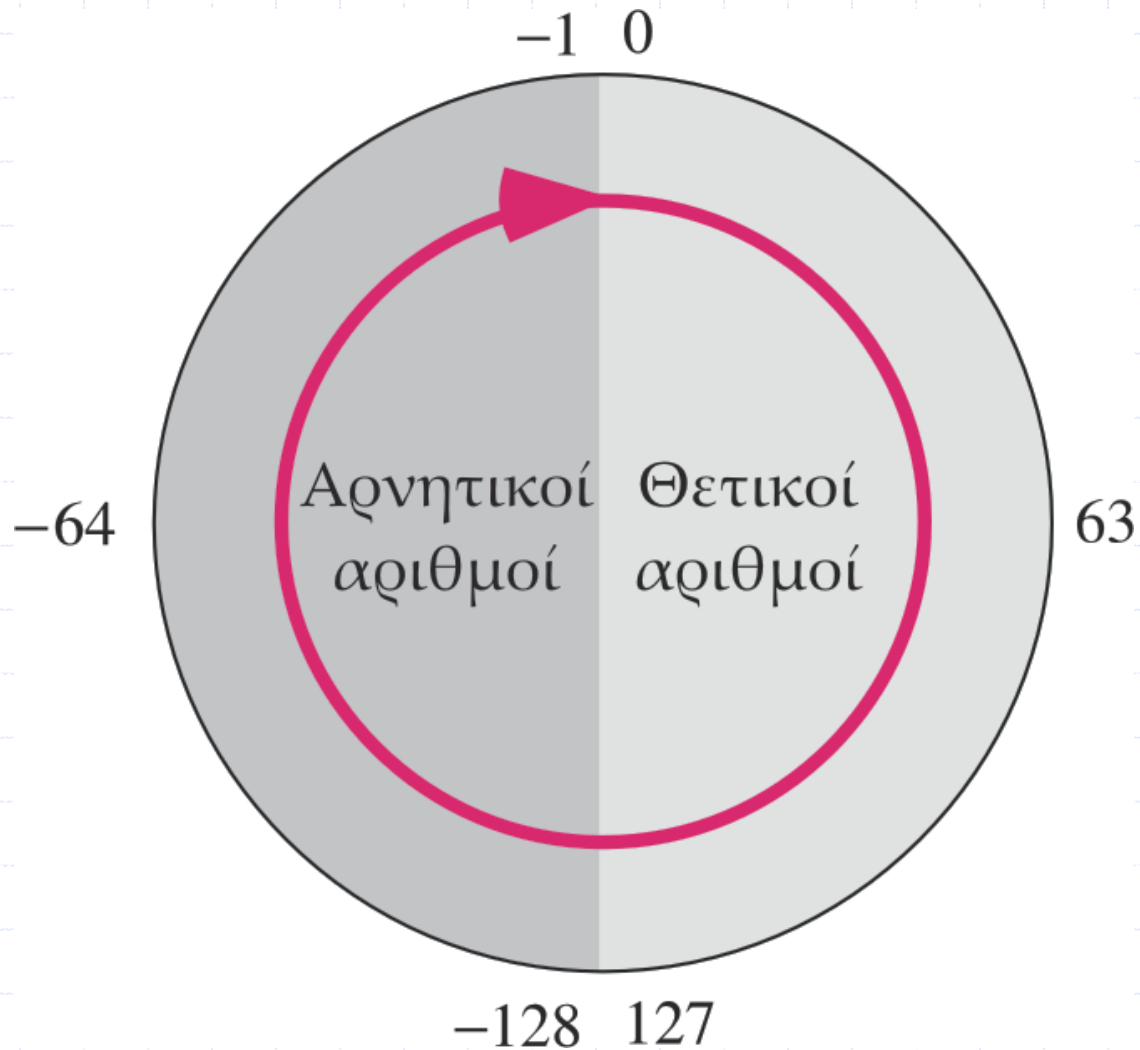
Πρόσθεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

- ◆ Εδώ αμέσως παρατηρούμε ένα σφάλμα. Το πιο αριστερό μπιτ του αποτελέσματος είναι το 1, πράγμα που σημαίνει ότι ο αριθμός είναι αρνητικός (εμείς περιμέναμε θετικό αριθμό). Ποιος είναι αυτός ο αριθμός; Το συμπλήρωμα ως προς δύο είναι το 126. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός είναι το -126 αντί για το 130. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στην υπερχείλιση

Υπερχείλιση

- ◆ **Υπερχείλιση** (overflow) ονομάζεται το σφάλμα που παρουσιάζεται όταν προσπαθούμε να αποθηκεύσουμε έναν αριθμό ο οποίος δεν είναι στο διάστημα τιμών που ορίζεται από τη δέσμευση
- ◆ Διάστημα τιμών αριθμών στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο:
$$-2^{N-1} \text{ ————— } 0 \text{ ————— } (2^{N-1} - 1)$$

Υπερχείλιση



Αφαίρεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Αριθμός 1 – Αριθμός 2 \Leftrightarrow
Αριθμός 1 + (–Αριθμός 2)

◆ Αφαιρέστε το 62 από το 101 σε μορφή
συμπληρώματος ως προς δύο.

◆ $(+101) - (+62) \Leftrightarrow$
 $(+101) + (-62) \rightarrow (+39)$

Αφαίρεση στη μορφή συμπληρώματος ως προς δύο

◆ Λύση

Κρατούμενο	1	1							
	0	1	1	0	0	1	0	1	+
	1	1	0	0	0	0	1	0	
Αποτέλεσμα	0	0	1	0	0	1	1	1	

Το αποτέλεσμα είναι +39. Παρατηρήστε ότι το πιο αριστερό κρατούμενο αγνοείται.

Αριθμητικές Πράξεις σε Αριθμούς Κινητής Υποδιαστολής

- ◆ Ελέγχονται τα πρόσημα.
 - Αν τα πρόσημα είναι τα ίδια, προστίθενται οι αριθμοί και αντιστοιχίζεται το πρόσημο στο αποτέλεσμα.
 - Αν τα πρόσημα είναι διαφορετικά, συγκρίνονται οι απόλυτες τιμές, αφαιρείται η μικρότερη από τη μεγαλύτερη, και χρησιμοποιείται το πρόσημο της μεγαλύτερης στο αποτέλεσμα.
- ◆ Μετακινούνται οι υποδιαστολές ώστε να εξισωθούν οι εκθέτες. Αυτό σημαίνει ότι αν οι εκθέτες δεν είναι ίδιοι, μετατίθεται προς τα αριστερά η υποδιαστολή του αριθμού με τον μικρότερο εκθέτη ώστε οι εκθέτες να εξισωθούν.
- ◆ Προστίθενται ή αφαιρούνται τα **δεκαδικά μέρη σημαινόμενα τμήματα** (τόσο συμπεριλαμβάνοντας το ακέραιο μέρος όσο και το κλασματικό μέρος).
- ◆ Κανονικοποιείται το αποτέλεσμα, πριν από την αποθήκευσή του στη μνήμη.
- ◆ Γίνεται έλεγχος για υπερχειλίση.

Αριθμητικές Πράξεις σε Αριθμούς Κινητής Υποδιαστολής

◆ Εξισώνουμε τους εκθέτες:

$$+2^5 \quad \times \quad 1,1011$$

$$+2^5 \quad \times \quad 1,01011$$

$$+2^5 \quad \times \quad 10,00001$$

◆ Τώρα κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα:

$$+2^6 \quad \times \quad 1,000001$$

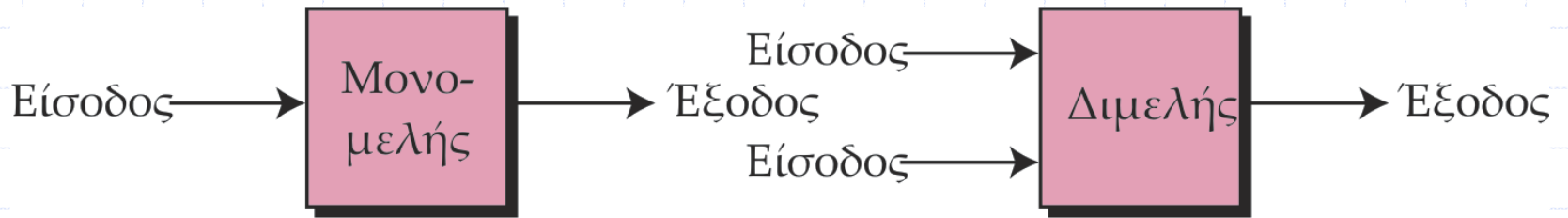
◆ Ο αριθμός αποθηκεύεται στον υπολογιστή με την εξής μορφή:

0 10000101 000001000000000000000000

Λογικές Πράξεις

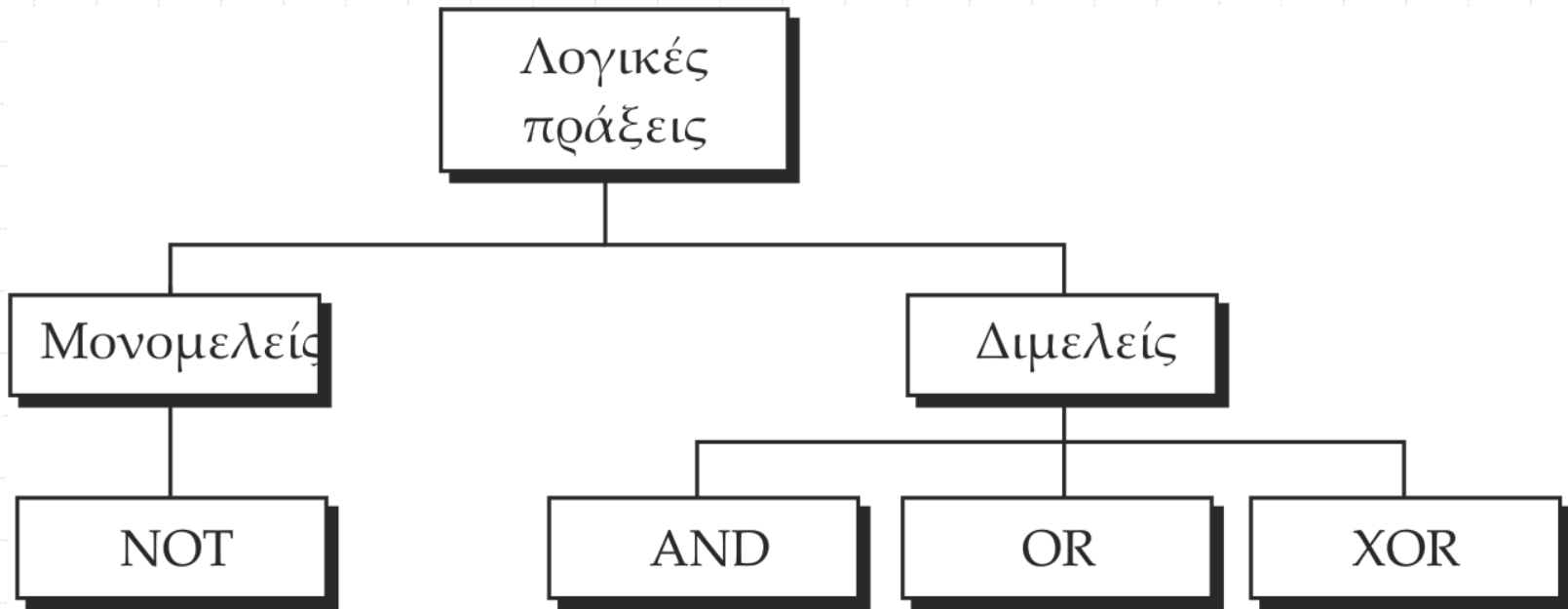
- ◆ Η τιμή ενός μπιτ μπορεί να είναι είτε 0 είτε 1. Μπορούμε να θεωρήσουμε το 0 ως τη λογική τιμή *ψευδής* (false) και το 1 ως τη λογική τιμή *αληθής* (true)
- ◆ Με αυτόν τον τρόπο, ένα μπιτ που έχει αποθηκευτεί στη μνήμη ενός υπολογιστή αντιπροσωπεύει μια λογική τιμή, η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής

Λογικές Πράξεις



α. Μονομελής πράξη

β. Διμελής πράξη



Πίνακες Αλήθειας

NOT

x	NOT x
0	1
1	0

OR

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

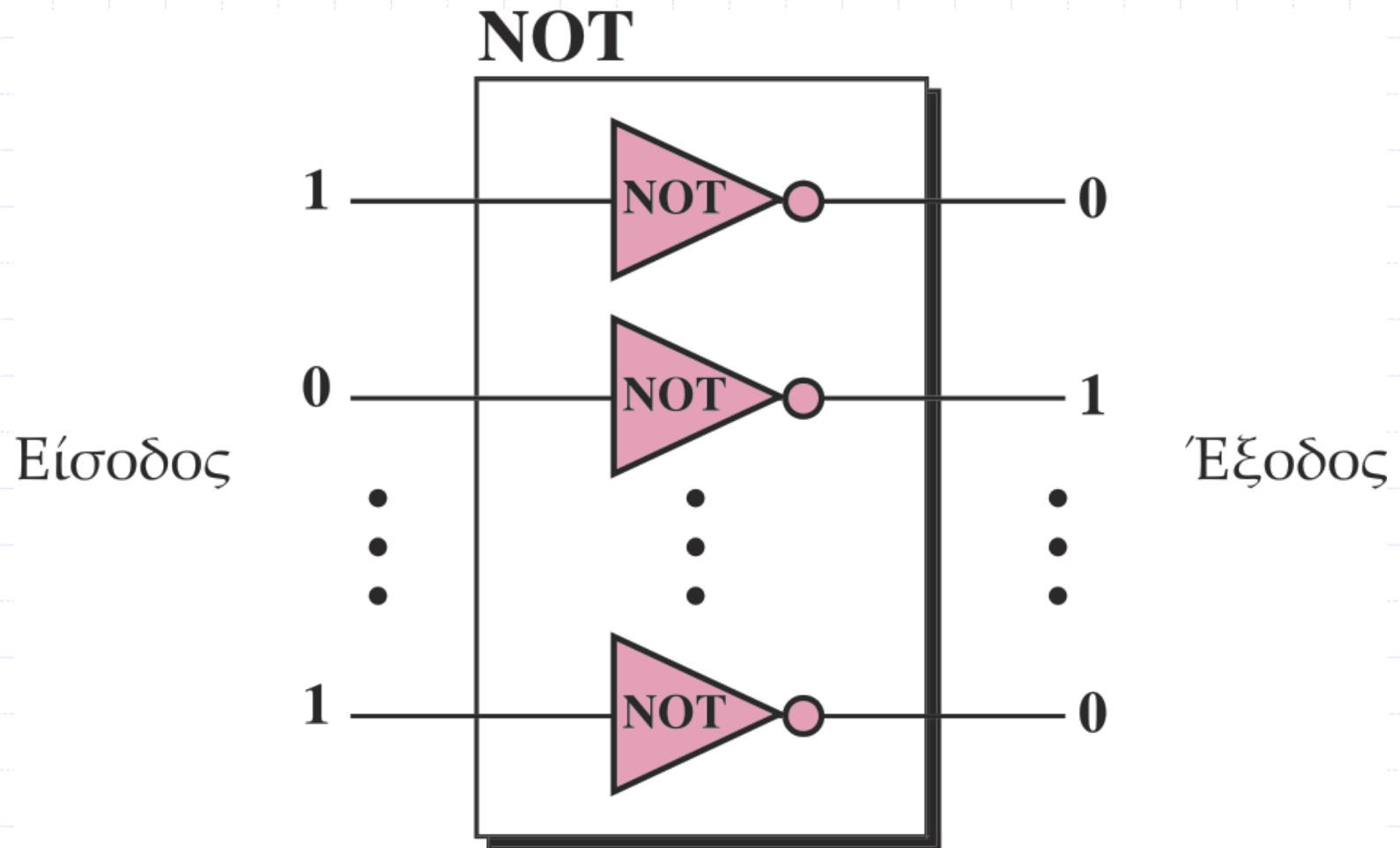
AND

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

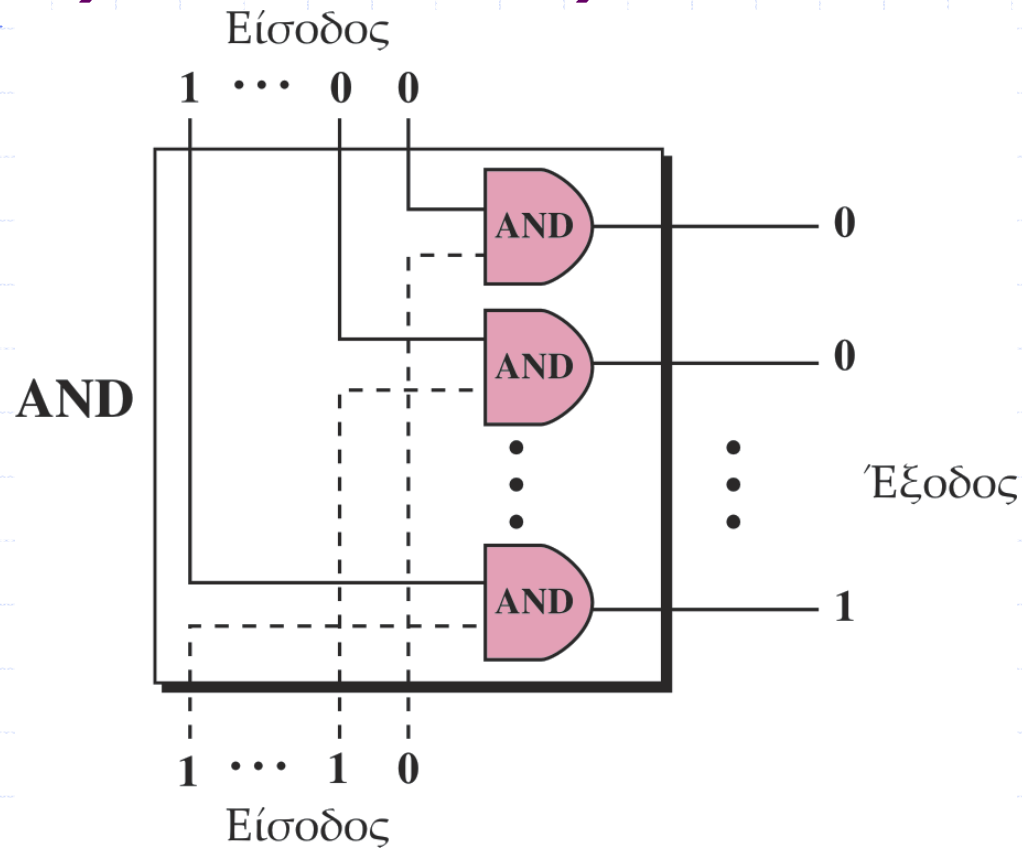
XOR

x	y	x XOR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Μονομελής Τελεστής



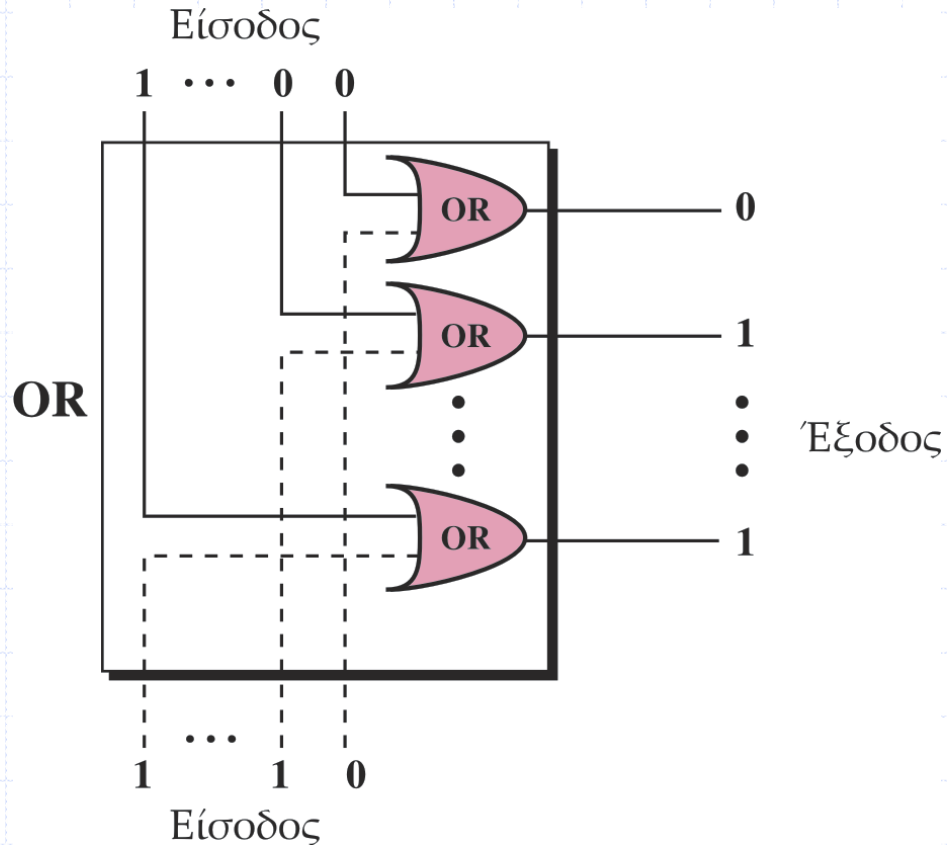
Διμελείς Τελεστές



(0) AND (X) → (0)

(X) AND (0) → (0)

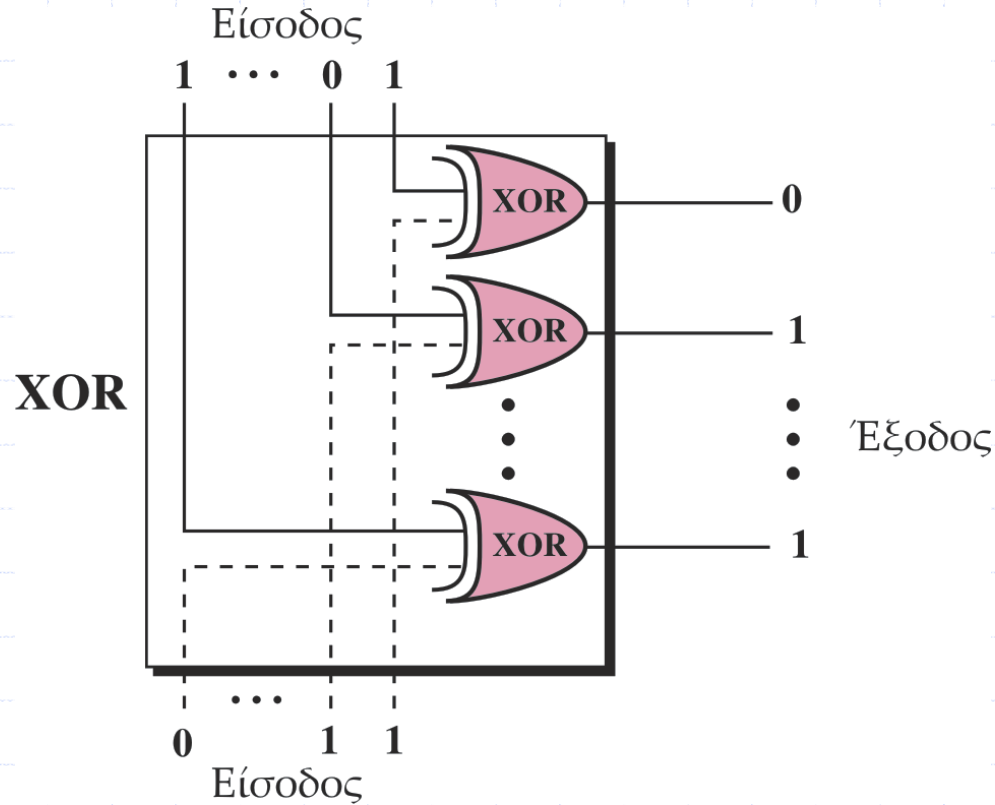
Διμελείς Τελεστές



$$(1) \quad \text{OR} \quad (X) \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$(X) \quad \text{OR} \quad (1) \quad \longrightarrow \quad (1)$$

Διμελείς Τελεστές



$$(1) \quad \mathbf{XOR} \quad (X) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{NOT} \quad (X)$$

$$(X) \quad \mathbf{XOR} \quad (1) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{NOT} \quad (X)$$

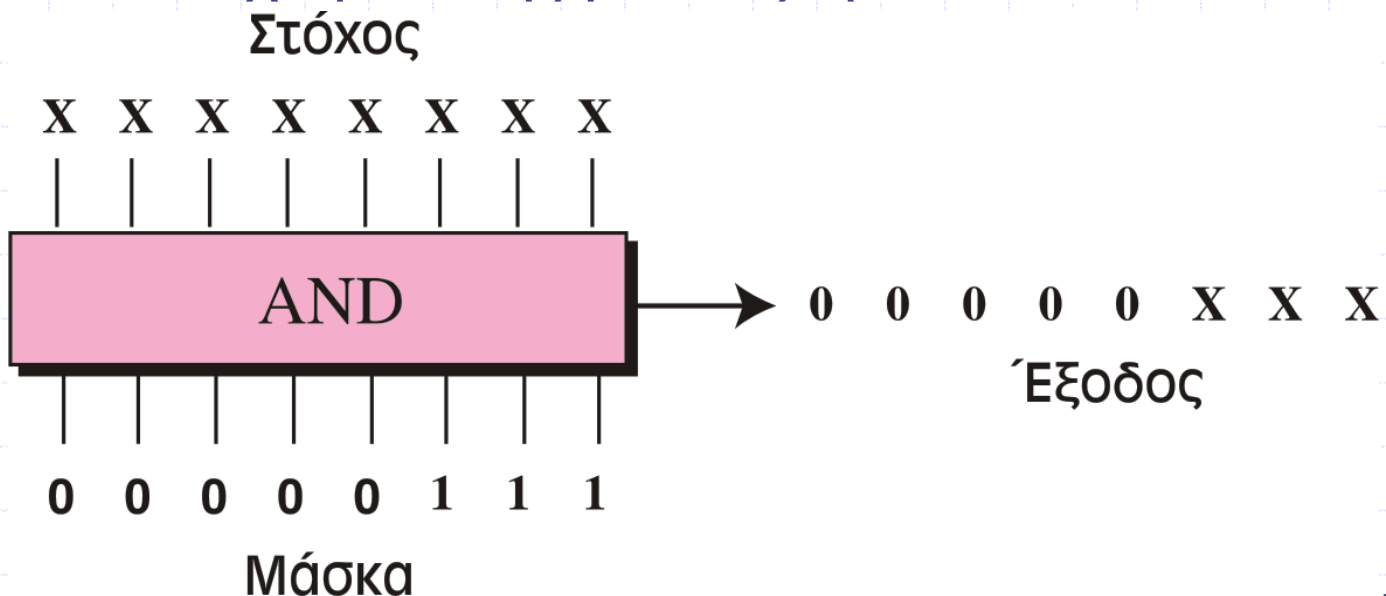
Εφαρμογές

- ◆ Οι τρεις λογικές διμελείς πράξεις χρησιμοποιούνται για την τροποποίηση σχημάτων μπιτ. Μπορούν να ενεργοποιούν, να απενεργοποιούν, ή να αντιστρέφουν συγκεκριμένα μπιτ
- ◆ Το σχήμα μπιτ προς τροποποίηση έρχεται σε σύζευξη (AND), διάζευξη (OR), ή αποκλειστική διάζευξη (XOR) με το δεύτερο σχήμα μπιτ, το οποίο ονομάζεται **μάσκα**



Απενεργοποίηση συγκεκριμένων μπιτ (AND)

- ◆ Για να απενεργοποιηθεί ένα μπιτ στο σχήμα προορισμού, το αντίστοιχο μπιτ στη μάσκα πρέπει να είναι 0.
- ◆ Για να μείνει ένα μπιτ στο σχήμα προορισμού ως έχει, το αντίστοιχο μπιτ της μάσκας πρέπει να είναι 1.



Παράδειγμα

Έστω ένα υδραγωγείο που παρέχει νερό σε μια πόλη μέσω 8 αντλιών. Η κατάσταση των αντλιών (ανοικτές ή κλειστές) μπορεί να παρασταθεί με ένα σχήμα 8 μπιτ. Για παράδειγμα, το σχήμα 11000111 δείχνει ότι οι αντλίες 1 έως 3 (από δεξιά), 7 και 8 είναι ανοικτές ενώ οι αντλίες 4, 5, και 6 είναι κλειστές. Υποθέστε τώρα ότι κλείνει η αντλία 7. Πως παριστάνεται αυτό μέσω μιας μάσκας?

Λύση

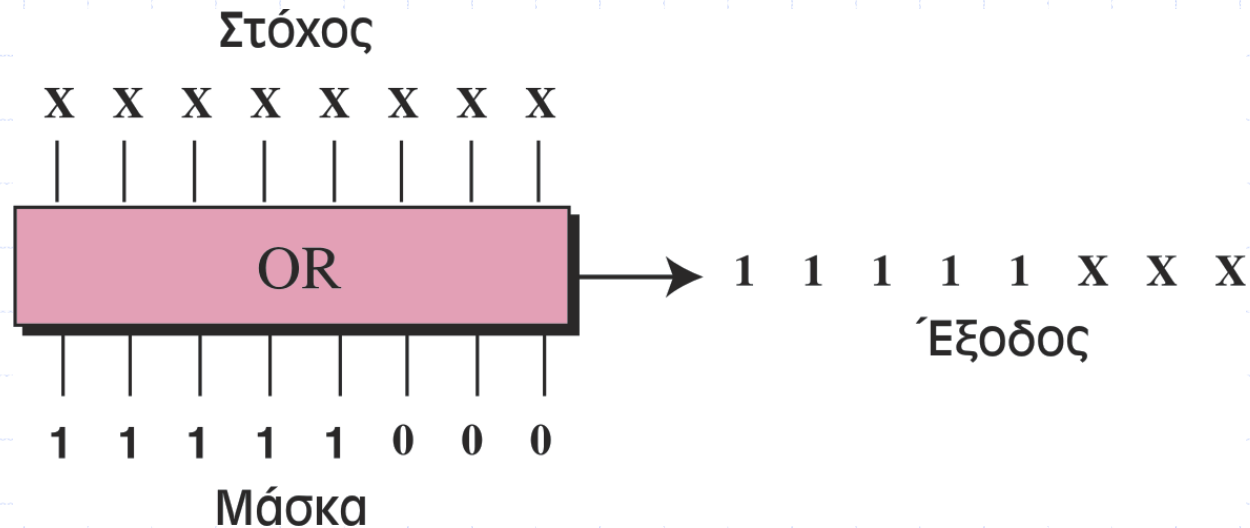
Χρησιμοποιήστε τη μάσκα **10111111** για σύζευξη (AND) με το σχήμα προορισμού. Το μόνο 0 bit (bit 7) στη μάσκα ακυρώνει το έβδομο bit στο στόχο.

Στόχος	1 1 0 0 0 1 1 1	AND
Μάσκα	1 0 1 1 1 1 1 1	

Αποτέλεσμα	1 0 0 0 0 1 1 1	

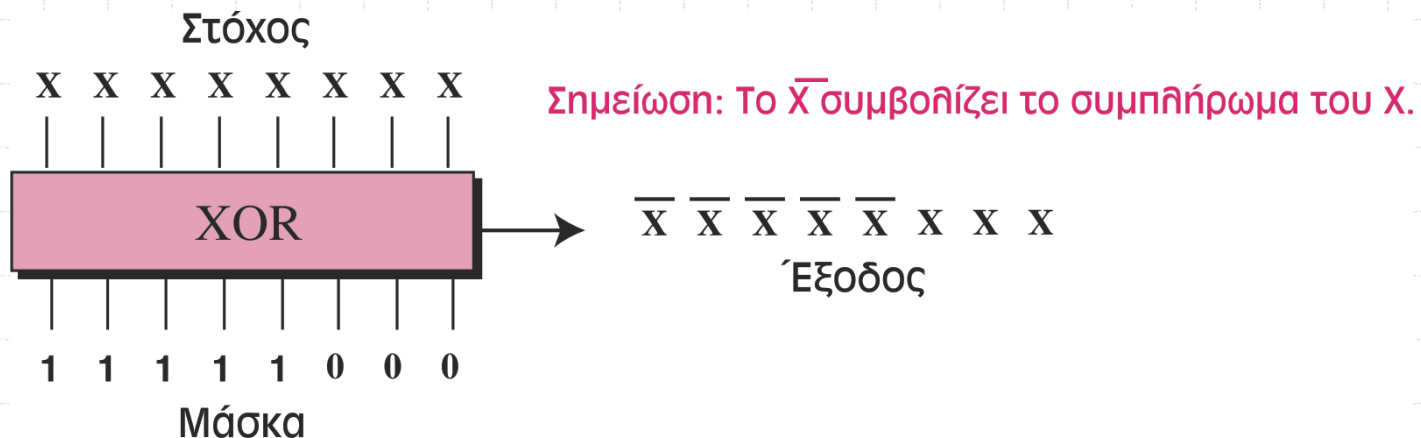
Ενεργοποίηση συγκεκριμένων μπιτ (OR)

- ◆ Για να ενεργοποιηθεί ένα μπιτ στο σχήμα προορισμού, το αντίστοιχο μπιτ στη μάσκα πρέπει να είναι 1.
- ◆ Για να μείνει ένα μπιτ στο σχήμα προορισμού ως έχει, το αντίστοιχο μπιτ της μάσκας πρέπει να είναι 0.



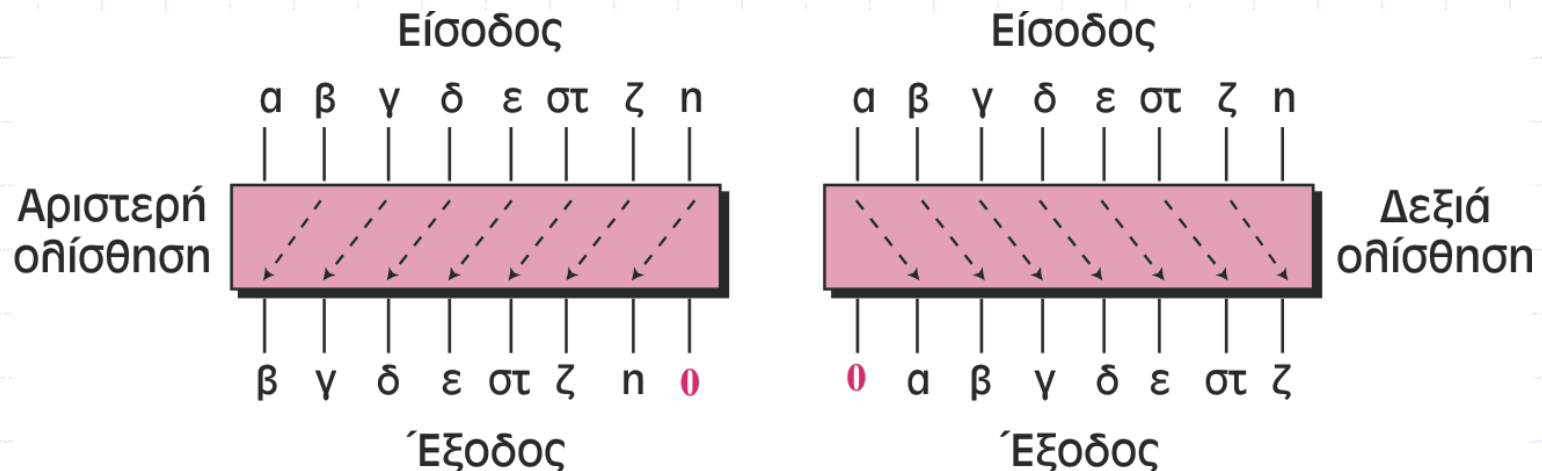
Αντιστροφή συγκεκριμένων μπιτ (XOR)

- ❖ Για να αντιστραφεί ένα μπιτ στο σχήμα προορισμού, το αντίστοιχο μπιτ στη μάσκα πρέπει να είναι 1.
- ❖ Για να μείνει ένα μπιτ ως έχει στο σχήμα προορισμού, το αντίστοιχο μπιτ της μάσκας πρέπει να είναι 0.



Πράξεις Ολίσθησης

- ◆ Η δεξιά ολίσθηση καταργεί το δεξιότερο μπιτ, μετακινεί κάθε μπιτ μία θέση προς τα δεξιά, και προσθέτει ένα 0 ως το πιο αριστερό μπιτ.
- ◆ Η αριστερή ολίσθηση καταργεί το πιο αριστερό μπιτ, μετακινεί κάθε μπιτ μία θέση προς τα αριστερά, και προσθέτει ένα 0 ως το δεξιότερο μπιτ



Πράξεις Ολίσθησης

◆ Δείξτε πώς μπορεί να διαιρεθεί ή να πολλαπλασιαστεί ένας αριθμός με το 2 με τη βοήθεια των πράξεων ολίσθησης

◆ Λύση

- Όταν ένα σχήμα μπιτ αναπαριστά κάποιον μη προσημασμένο αριθμό, η δεξιά ολίσθηση διαιρεί τον αριθμό αυτό με το 2 (ακέραια διαίρεση). Το σχήμα 00111011 αντιπροσωπεύει τον αριθμό 59. Αν ολισθήσουμε τον αριθμό προς τα δεξιά, παίρνουμε 00011101, το οποίο ισούται με 29. Αν πάλι ολισθήσουμε τον αρχικό αριθμό (59) προς τα αριστερά, παίρνουμε 01110110, το οποίο ισούται με 118.