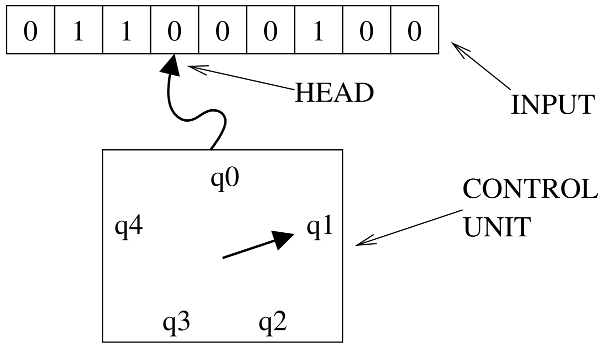
Πεπερασμένα Αυτόματα (ΠΑ)

Τα πεπερασμένα αυτόματα είναι οι απλούστερες «υπολογιστικές μηχανές». Δεν έχουν μνήμη, αλλά μόνο μία εσωτερική μονάδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Διαβάζουν την είσοδο από αριστερά προς τα δεξιά και κάθε σύμβολο προκαλεί αλλαγή της εσωτερικής κατάστασης.



Ορισμός Πεπερασμένων Αυτομάτων

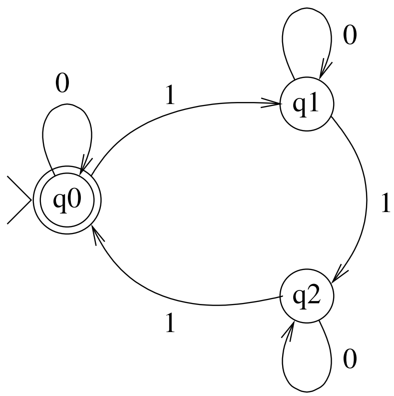
Ένα πεπερασμένο αυτόματο M είναι μια πεντάδα $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$, όπου:

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο καταστάσεων.
- Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το αλφάβητο.
- s είναι μία κατάσταση, $s \in K$, που ονομάζεται αρχική κατάσταση.
- F είναι υποσύνολο του $K, F \subseteq K$, που ονομάζεται σύνολο τελικών καταστάσεων.
- δ είναι μία συνάρτηση, $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$ και ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης.

Η συνάρτηση μετάβασης δ καθορίζει ουσιαστικά τη λειτουργία του αυτομάτου. Αν q είναι η κατάστασή του και το επόμενο σύμβολο της εισόδου είναι σ, τότε $\delta(q, \sigma)$ είναι η επόμενη κατάσταση του αυτομάτου.

Διαγράμματα ΠΑ

Παράδειγμα:



$>$: αρχική κατάσταση. ◎: τελική κατάσταση.

Το διάγραμμα δείχνει ένα ΠΑ με $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $s = q_0$, $F = \{q_0\}$ και δ

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_2
q_2	1	q_0

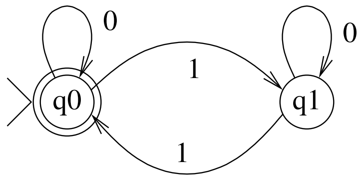
Λέμε ότι ένα ΠΑ $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$ δέχεται τη συμβολοσειρά w, αν ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση s, αφού «επεξεργαστεί» την είσοδο, καταλήγει σε κάποια κατάσταση του F. Για να ορίσουμε πιο αυστηρά την έννοια «δέχεται» χρειάζεται να ορίσουμε τη σχέση «παράγει».

Αν $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$ είναι ένα ΠΑ, η δυαδική σχέση $\vdash_M$ («παράγει σε ένα βήμα») ορίζεται ως εξής:
$(q, w) \vdash_M (q', w')$, αν και μόνο αν

- $w = \sigma w'$, για κάποιο $\sigma \in \Sigma$
- $q' = \delta(q, \sigma)$

Η $\vdash_M$ είναι μια συνάρτηση $\vdash_M$: $K \times \Sigma^+ \rightarrow K \times \Sigma^*$

Τα στοιχεία του $K \times \Sigma^*$ τα ονομάζουμε συνολικές καταστάσεις (configurations).

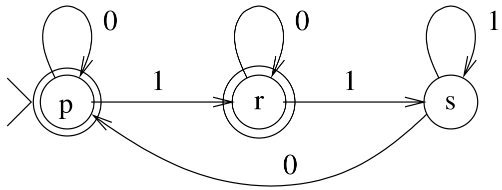
Παράδειγμα: 

- $(q_0, 0110) \vdash_M (q_0, 110)$
- $(q_0, 1101) \vdash_M (q_1, 101)$
- $(q_1, 1) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$

Ορίζουμε τη σχέση $\vdash_M^*$ («παράγει σε μηδέν ή περισσότερα βήματα») ως εξής:

$(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $q_1, \ldots, q_n \in K$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ τέτοια ώστε

- $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w'$
- $(q, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \ldots \vdash_M (q_n, w')$
  και $q_n = q'$

Παράδειγμα: 

$$(p, 0110) \vdash_M^* (p, 0110)$$
$$(p, 0110) \vdash_M^* (s, 0)$$
$$(p, 0110) \vdash_M^* (p, \varepsilon)$$

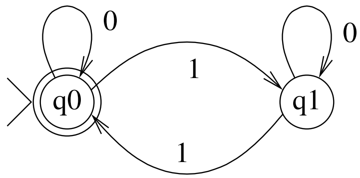
Παρατηρειστε οτι η $\vdash_M^*$ δεν είναι συνάρτηση αλλά σχέση (γιατί δεν προκαθορίζει πόσα βήματα θα γίνουν).

Λέμε ότι το M δέχεται τη συμβολοσειρά w ή ότι το w είναι αποδεκτό από το M, αν και μόνο αν

$$(s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon), \text{ για κάποιο } q \in F$$

Ορίζουμε τη γλώσσα ενός ΠΑ $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$ σαν το σύνολο των συμβολοσειρών που είναι αποδεκτές από M.

$$L(M) = \{w : w \text{ είναι αποδεκτό από το } M\}$$

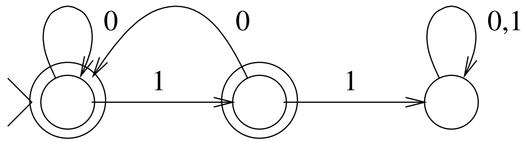
Παράδειγμα: 

$$L(M) = \{w : w \text{ περιέχει άρτιο αριθμό από } 1\}$$

Απόδειξη:
Με μαθηματική επαγωγή, στο μήκος του w.
Επαγωγική υπόθεση:
$(q_0, w) \vdash_M^* (q_0, \varepsilon)$
αν και μόνο αν το w περιέχει αρτιο αριθμό από 1 και
$(q_1, w) \vdash_M^* (q_0, \varepsilon)$
αν και μόνο αν το w περιέχει περιττό αριθμό από 1.

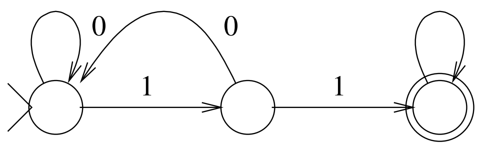
Παράδειγμα: Σχεδιάστε ΠΑ που να δέχεται τη γλώσσα

$$L = \{w : w \text{ δεν περιέχει } 11\}$$

Απάντηση: 

Παράδειγμα: Σχεδιάστε ΠΑ που να δέχεται τη γλώσσα

$$\bar{L} = \{w : w \text{ περιέχει } 11\}$$

Απάντηση: 

Προσεξτε οτι ειναι σχεδόν το ίδιο αυτόματο με τη διαφορά ότι οι τελικές καταστάσεις του ενός είναι οι μη τελικές καταστάσεις του άλλου.

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Αποτελούν μια γενίκευση των (ντετερμινιστικών) ΠΑ. Αντί για συνάρτηση μετάβασης δ που καθορίζει απολύτως την επόμενη κατάσταση, τα μη ντετερμινιστικά ΠΑ έχουν κάποια σχέση μετάβασης Δ που επιτρέπει να μεταβούμε σε περισσότερες από μία καταστάσεις με τον ίδιο χαρακτήρα.

Γιατί μελετούμε μη ντετερμινιστικές μηχανές·

- Γιατί διευκολύνουν τις αποδείξεις.
- Γιατί αποτελούν τον πιο φυσικό και σύντομο τρόπο για να περιγράψουμε κάποιες γλώσσες.

Ορισμός μη Ντετερμινιστικών ΠΑ

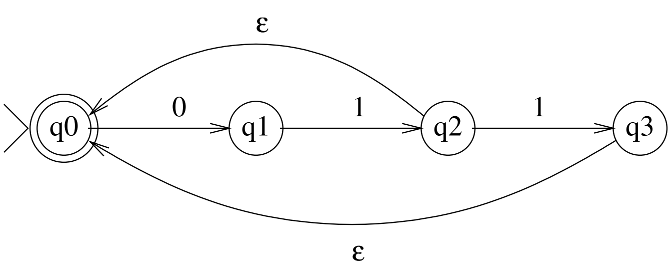
Ένα μη ντετερμινιστικό ΠΑ είναι μια πεντάδα $M(K, \Sigma, \Delta, s, F)$, όπου

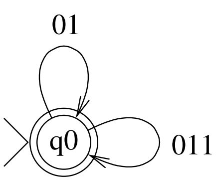
$$\left.\begin{array}{lll} K & : & \text{σύνολο καταστάσεων} \\ \Sigma & : & \text{αλφάβητο} \\ s & : & \text{αρχική κατάσταση} \\ F & : & \text{σύνολο τελικών καταστάσεων} \end{array}\right\}$$

Όπως ακριβώς και στον ορισμό των ντετερμινιστικών ΠΑ.

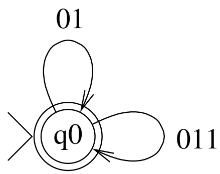
και Δ : η σχέση μετάβασης

$$\Delta \subseteq K \times \Sigma^* \times K$$





Μπορούμε να επεκτείνουμε όλους τους ορισμούς που αφορούν ντετερμινιστικά ΠΑ. Η βασική διαφορά είναι η εξής:
Λέμε ότι «το M δέχεται το w», **αν υπάρχει** κάποια ακολουθία μεταβάσεων που καταλήγει σε τελική κατάσταση του F.

Παραδειγμα: Το 

δέχεται τη συμβολοσειρα $\underbrace{011}\underbrace{01}$.

Ο ορισμός της σχεσης $\vdash_M$ για μη ντετερμινιστικά ΠΑ είναι

$$(q, w) \vdash_M (q', w'), \text{ αν και μόνο αν } \textbf{υπάρχει } u \in \Sigma^*, \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\begin{aligned} &1)\ \ w = uw' \\ \text{και } &2)\ \ (q, u, q') \in \Delta \end{aligned}$$

Οι άλλοι ορισμοί είναι ίδιοι για ντετερμινιστικά και μη ντετερμινιστικά ΠΑ.

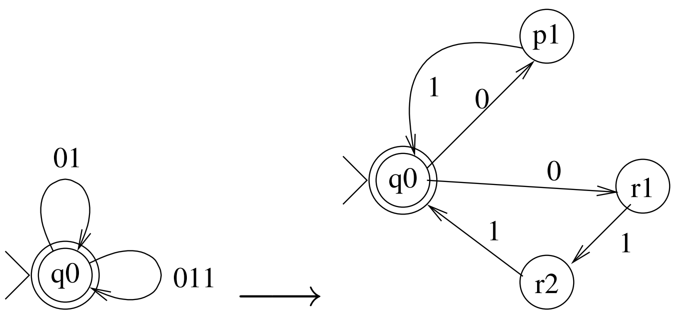
Ισοδυναμία ντετερμινιστικών και μη ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων

Θεώρημα: Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M υπάρχει ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M'' τέτοιο ώστε $L(M) = L(M'')$.

Απόδειξη: Έστω $M(K, \Sigma, s, \Delta, F)$ ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

Βήμα 1. θα το μετατρέψουμε έτσι ώστε κάθε μετάβαση να γίνεται με το πολύ ένα σύμβολο. Αντικαθιστούμε κάθε μετάβαση $(q, \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k, q')$ όπου $k > 1$ με τις μεταβάσεις $(q, \sigma_1, p_1), (p_1, \sigma_2, p_2), \ldots, (p_{k-1}, \sigma_k, q')$, και προσθέτουμε νέες καταστάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Παράδειγμα



Έστω $M'(K', \Sigma, \Delta', s', F')$ το αποτέλεσμα του Βήματος 1.

Βήμα 2. Θα μετασχηματίσουμε το M' σε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $M''(K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$. Καθώς το M' επεξεργάζεται την είσοδο μπορεί να βρίσκεται σε κάποιες πιθανές καταστάσεις. Θέλουμε το M'' να 'θυμάται' όλες αυτές τις πιθανές καταστάσεις. Αλλά ένα ντετερμινιστικό αυτόματο 'θυμάται' μόνο την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Επομένως οι καταστάσεις του M'' πρέπει να κωδικοποιούν σύνολα από πιθανές καταστάσεις. Άρα οι καταστάσεις του M'' πρέπει να είναι τα υποσύνολα του K'.

Η μετάβαση (Q, σ, Q') επιτρέπεται αν το τρέχον πιθανό υποσύνολο καταστάσεων είναι το Q και αφού διαβαστεί το σύμβολο σ το νέο υποσύνολο **όλων** των πιθανών καταστάσεων είναι το Q'.

Ορίζουμε λοιπόν το $M''(K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$ ως εξής:

- $K'' = 2^{K'}$, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του K'.
- Η συνάρτηση δ'' ορίζεται ώς

  $$\delta''(Q, \sigma) = \{q' : (q, \sigma) \vdash^*_{M'} (q', \epsilon) \text{ για κάποιο } q \in Q\} \;\; \forall Q \in K'', \sigma \in \Sigma.$$

  Γιατί χρειαζόμαστε $\vdash^*_{M'}$ και όχι απλά $\vdash_{M'}$;
- $s'' = \{q : (s', \epsilon) \vdash^*_{M'} (q, \epsilon)\}$.
- $F'' = \{Q : Q \subseteq K',\ Q \cap F' \neq \emptyset\}$.

Υπολείπεται μια απόδειξη πως $L(M) = L(M'')$:
Με επαγωγή στο μήκος της συμβολοσειράς εισόδου ...