Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (context-free grammars)

Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα: Μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα είναι μια τετράδα $G(V, \Sigma, R, S)$ όπου

- V είναι ένα αλφάβητο,
- Σ (το σύνολο των τερματικών συμβόλων) είναι ένα υποσύνολο του V,
- R (το σύνολο των κανόνων) είναι ένα υποσύνολο του $(V - \Sigma) \times V^*$, και
- S (το αρχικό σύμβολο) είναι ένα στοιχείο του $V - \Sigma$.

Παράδειγμα γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα:

- $V = \{0, 1, S\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $R = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 0S1, \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array} \right\}$

Γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα

Έστω $u, v, w \in V^*$ για μια γραμματική G.

Αν $A \to w$ είναι κανόνας της G τότε λέμε ότι η uAv **παράγει** uwv και το συμβολίζουμε με

$$uAv \Rightarrow uwv.$$

Ορίζουμε επίσης τη σχέση u παράγει v σε μηδέν ή περισσότερα βήματα και το συμβολίζουμε $u \Rightarrow^* v$, αν υπάρχουν $u_1, \ldots, u_k$ όπου $k \geq 0$ τέτοια ώστε

$$u \Rightarrow u_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_k \Rightarrow v.$$

Ορίζουμε τη γλώσσα $L(G)$ μιας γραμματικής $G(V, \Sigma, R, S)$ σαν το σύνολο των συμβολοσειρών του Σ^* που παράγονται από το αρχικό σύμβολο S:

$$L(G) = \{w : w \in \Sigma^* \text{ και } S \Rightarrow^* w\}.$$

Οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι οι γλώσσες κάποιας γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα.

Παράδειγμα

Η γλώσσα της γραμματικής

- $V = \{0, 1, S\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $R = \left\{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & 0S1, \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array} \right\}$

είναι $L(G) = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$.

Συμπέρασμα: Υπάρχουν γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα που δεν είναι κανονικές.

Παράδειγμα

Η γλώσσα της γραμματικής

- $V = \{(,), S\}$,
- $\Sigma = \{(,)\}$,
- $R = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & SS, \\ S & \rightarrow & (S), \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array} \right\}$

είναι $L(G) = \{w : w$ αποτελείται από σωστά ζυγισμένες παρενθέσεις$\}$.

Παράδειγμα

Βρείτε μια γραμματική G χωρίς συμφραζόμενα με γλώσσα

$$L(G) = \{w : w \text{ είναι αριθμητική έκφραση με σύμβολα } x, y, +, *, (,)\}.$$

Απάντηση (F=factor, T=term, E=expression):

- $V = \{x, y, +, *, (,), S, F, T, E\}$,
- $\Sigma = \{x, y, +, *, (,)\}$,
- $R = \left\{ \begin{array}{lcl} F & \rightarrow & x, \\ F & \rightarrow & y, \\ F & \rightarrow & (E), \\ T & \rightarrow & F, \\ T & \rightarrow & F * T, \\ E & \rightarrow & T, \\ E & \rightarrow & T + E, \\ S & \rightarrow & E \end{array} \right\}$

Παραδειγμα

Να βρείτε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για τη γλώσσα
$\mathcal{L} = \{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}$. (Η γλώσσα των *παλινδρόμων άρτιου μήκους*).

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \\ S &\longrightarrow 0S0 \\ S &\longrightarrow 1S1 \end{aligned}$$

Για συντομία μερικές φορές γράφουμε

$$S \longrightarrow \varepsilon | 0S0 | 1S1$$

Κανονικές γλώσσες και γραμματικές

Όπως είδαμε υπάρχουν γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα που δεν είναι κανονικές. Τώρα θα δείξουμε ότι το σύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα περιέχει τις κανονικές γλώσσες. Δηλαδή

$$\text{ΚΑΝΟΝ. ΓΛΩΣΣΕΣ} \subset \text{ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡ.}$$

Κανονική γραμματική: Μια γραμματική είναι κανονική αν οι κανόνες της έχουν τη μορφή $(V-\Sigma)\times\Sigma^*((V-\Sigma)\cup\varepsilon)$.

Παράδειγμα:

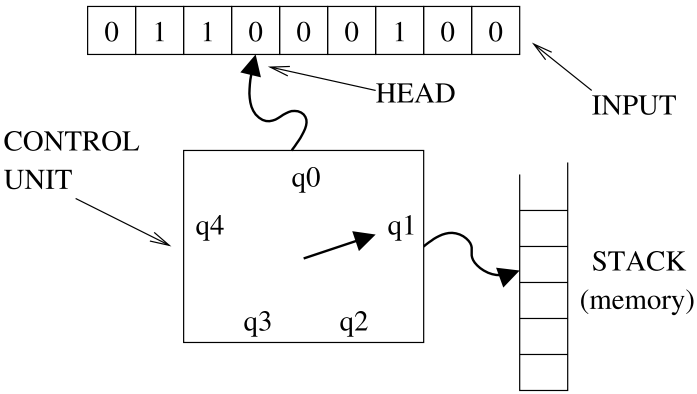
- $V=\{0,1,S\}$,
- $\Sigma=\{0,1\}$,
- $R=\left\{\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 01S, \\ S & \rightarrow & 010S, \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array}\right\}$

Η γλώσσα αυτής της γραμματικής είναι: $L(G)=(01\cup 010)^*$.

Θεώρημα 1 *Μια γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν είναι γλώσσα μιας κανονικής γραμματικής.*

Βασική Ιδέα: Για κάθε πεπερασμένο αυτόματο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κανονική γραμματική όπου το σύνολο των μη τερματικών συμβόλων είναι οι καταστάσεις του αυτομάτου. Και το αντίστροφο, για κάθε κανονική γραμματική μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα (μη ντετερμινιστικό) πεπερασμένο αυτόματο, όπου οι καταστάσεις είναι το σύνολο των μη τερματικών συμβόλων της γραμματικής.

Αυτόματα Στοίβας (Pushdown Automata)



Αυτόματο στοιβας $M(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

$$\left.\begin{array}{lcl} K & = & \text{σύνολο καταστάσεων (πεπερασμένο)} \\ \Sigma & = & \text{αλφάβητο εισόδου} \\ s & = & \text{αρχική κατάσταση } s \in K \\ F & = & \text{σύνολο τελικών καταστάσεων, } F \subseteq K \end{array}\right\} \text{Όπως στα πεπερασμένα αυτόματα}$$

$$\begin{array}{lcl} \Gamma & = & \text{αλφάβητο στοίβας} \\ \Delta & = & \text{σχέση μετάβασης, } \Delta \subseteq (K \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*) \end{array}$$

$((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$: Το M είναι στην κατάσταση p, η κορυφή της στοίβας είναι β, διαβάζει από την είσοδο u και μεταβαίνει στην κατάσταση q αντικαθιστώντας το β με το γ.

Ένα αυτόματο στοίβας M δέχεται τη συμβολοσειρά w αν και μόνο αν, ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση με άδεια στοίβα, επεξεργαστεί το w και καταλήξει σε κάποια τελική κατάσταση του F με άδεια στοίβα πάλι.

Δηλαδή

$$(S, w, \varepsilon) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon), \text{ με } q \in F$$

Η γλώσσα ενός αυτομάτου στοίβας είναι το σύνολο των συμβολοσειρών που δέχεται το αυτόματο.

$$\mathcal{L}(M) = \{w : M \text{ δέχεται } w\}$$

Παράδειγμα

Έστω το αυτόματο στοίβας με σχέση μετάβασης

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} ((s,0,\varepsilon),(s,0)) \\ ((s,1,\varepsilon),(s,1)) \\ ((s,\#,\varepsilon),(f,\varepsilon)) \\ ((f,0,0),(f,\varepsilon)) \\ ((f,1,1),(f,\varepsilon)) \end{array} \right\} \qquad \text{και } F = \{f\}$$

Το αυτόματο δέχεται τις συμβολοσειρές που είναι της μορφής $w\#w^R$. Η γλώσσα δηλαδή του αυτομάτου είναι $L = \{w\#w^R : w \in \{0,1\}^*\}$.

Παράδειγμα

$$\mathcal{L} = \{w : w \text{ έχει ζυγισμένες αγκύλες } \}$$

$$S \longrightarrow \varepsilon \,|\, [S] \,|\, SS$$

$$(s, [, \varepsilon)(s, [)$$
$$(s,], [)(s, \varepsilon)$$

Κατάσταση	Εισοδος	Στοίβα
s	$[\,[\,]\,]\,[\,]$	ε
s	$[\,]\,]\,[\,]$	$[$
s	$]\,]\,[\,]$	$[\,[$
s	$]\,[\,]$	$[$
s	$[\,]$	ε
s	$]$	$[$
s	ε	ε

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα και αυτόματα στοίβας

Θεώρημα 2 *Οι γλώσσες των αυτομάτων στοίβας είναι ακριβώς οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα.*

Το θεώρημα προκύπτει από τα Θεωρήματα 3 και 4:

Θεώρημα 3 *Για κάθε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G υπάρχει αυτόματο στοίβας M, τέτοιο ώστε $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$.*

Θεώρημα 4 *Για κάθε αυτόματο στοίβας M υπάρχει γραμματική G χωρίς συμφραζόμενα, τέτοια ώστε $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.*