Γενικά για τις Μηχανές Turing

Ονομάστηκαν προς τιμή του εφευρέτη τους Alan M. Turing (1912-1954).

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν

1. ως αναγνωριστές γλωσσών.
2. για υπολογισμό συναρτήσεων από συμβολοσειρές σε συμβολοσειρές.
3. για τη συστηματική απαρίθμηση των συμβολοσειρών σε μια γλώσσα.

Μια εξελιγμένη μορφή αυτομάτου, φαινομενικά πρωτόγονες. Πιστεύεται πως δεν μπορούν να «ενισχυθούν» και άρα είναι το πιο γενικό μοντέλο υπολογιστικής μηχανής.

Βασικές Αρχές των Μηχανών **Turing**

Αποτελούνται από (1) μονάδα ελέγχου πεπερασμένων καταστάσεων, (2) μια ταινία και (3) μια κεφαλή ανάγνωσης / εγγραφής. Λειτουργούν σε διακριτά βήματα.

Ειδικότερα:

- Η ταινία εκτείνεται απεριόριστα προς τα δεξιά.
- Η συμβολοσειρά εισόδου (αν υπάρχει) τοποθετείται στο αριστερό άκρο της ταινίας.
- Το υπόλοιπο της ταινίας προς τα δεξιά περιέχει αρχικά κενά σύμβολα τα οποία συμβολίζονται με $\sqcup$.
- Το αριστερότερο τετράγωνο της ταινίας περιέχει το ειδικό σύμβολο $\triangleright$. Όποτε η κεφαλή διαβάζει το $\triangleright$, στο επόμενο βήμα μετακινείται προς τα δεξιά.

Βασικές Αρχές των Μηχανών **Turing**, συνέχεια

Επιπλέον:

- Σε κάθε βήμα ανάλογα με την τρέχουσα κατάσταση και το σύμβολο που η κεφαλή διαβάζει στην ταινία, η μηχανή **Turing**:

  α) Τοποθετεί τη μονάδα ελέγχου σε καινούργια κατάσταση και

  β) είτε γράφει ένα σύμβολο στο τρέχον τετράγωνο είτε μετακινεί την κεφαλή κατά ένα τετράγωνο (αριστερά ή δεξιά).

- Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\leftarrow$ και $\rightarrow$ για να συμβολίσουμε την κίνηση της κεφαλής προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά αντίστοιχα.

Μια μηχανή **Turing** μπορεί να επιστρέψει απάντηση με το τέλος του υπολογισμού, γράφοντας την πάνω στην ταινία.

Ορισμός της Μηχανής **Turing** (Μ.Τ.)

Μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$

K = πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων

Σ = αλφάβητο εισόδου, δεν περιέχει τα $\leftarrow, \rightarrow$.
Περιέχει το κενό σύμβολο $\sqcup$ και το σύμβολο αριστερού άκρου $\triangleright$

s = αρχική κατάσταση $s \in K$

H = σύνολο καταστάσεων τερματισμού, $H \subseteq K$

δ = συνάρτηση μετάβασης, $\delta : ((K - H) \times \Sigma) \rightarrow K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$

Ορισμός της Μηχανής **Turing**, συνέχεια

Για τη συνάρτηση μετάβασης δ ισχύουν πάντα τα εξής:

Αν $q \in K - H, a \in \Sigma$ και $\delta(q, a) = (p, b)$ τότε η M όταν βρίσκεται στην κατάσταση q και σαρώνει το σύμβολο εισόδου a, μεταβαίνει στην κατάσταση p και:

- αν $b \in \Sigma$, αντικαθιστά το a με b
- αν b είναι $\leftarrow$ ή $\rightarrow$ μετακινεί την κεφαλή κατά ένα τετράγωνο στην κατεύθυνση b.

Επιπλέον:

- Για κάθε $q \in K - H$, αν $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$, τότε $b = \rightarrow$.
- Για κάθε $q \in K - H$ και $a \in \Sigma$,αν $\delta(q, a) = (p, b)$, τότε $b \neq \triangleright$.

Παράδειγμα Μηχανής Turing

$M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$
$K = \{q_0, q_1, h\}$
$\Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}$
$s = q_0.$

Κατάσταση q	**Σύμβολο** σ	**Μετάβαση** $\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	a	(q_0, a)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Η M σαρώνει με την κεφαλή προς τα δεξιά, αλλάζοντας όλα τα a σε $\sqcup$, ώσπου να βρει ένα τετράγωνο της ταινίας που να περιέχει $\sqcup$.

Δεύτερο παράδειγμα Μηχανής Turing

$M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$
$K = \{q_0, h\}$
$\Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}$
$s = q_0$.
$H = \{h\}$.

Κατάσταση q	**Σύμβολο** σ	**Μετάβαση** $\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_0, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$

Η M σαρώνει με την κεφαλή προς τα αριστερά, ώσπου να βρει ένα τετράγωνο της ταινίας που να περιέχει $\sqcup$ και τότε τερματίζει. Τι γίνεται αν δεν υπάρχει κανένα κενό τετράγωνο στα αριστερά;

Ορισμός συνολικής κατάστασης

Θέλουμε να ορίσουμε ένα στιγμιότυπο της Μ.Τ. που απεικονίζει την τρέχουσα συνολική της κατάσταση.

Μια συνολική κατάσταση (configuration) μιας Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ είναι ένα μέλος του

$$K \ \times \ \triangleright\Sigma^* \ \times \ (\Sigma^*(\Sigma - \{\sqcup\}) \cup \{\varepsilon\})$$

Δηλαδή οι συνολικές καταστάσεις αρχίζουν με το σύμβολο αριστερού άκρου και δεν τελειώνουν ποτέ με κενό, εκτός αν το κενό είναι το σύμβολο που διαβάζει η κεφαλή.

Μια συνολική κατάσταση η οποία περιέχει μια κατάσταση που ανήκει στο H, θα ονομάζεται τερματισμένη συνολική κατάσταση (halted configuration).

Εναλλακτική γραφή συνολικών καταστάσεων

Η τριάδα

$$(q, wa, u)$$

όπου $a \in \Sigma$ είναι το τρέχον σύμβολο που διαβάζει η κεφαλή γράφεται και ως

$$(q, w\underline{a}u)$$

Η σχέση «παράγει σε ένα βήμα»

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ και έστω $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ και $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$ δύο συνολικές καταστάσεις της M. Τότε

$$(q_1, w_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$$

αν και μόνο αν, για κάποιο $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$, $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ και είτε

1. $b \in \Sigma, w_1 = w_2, u_1 = u_2$ και $a_2 = b$.
2. $b = \leftarrow$, $w_1 = w_2 a_2$, και είτε

   α) $u_2 = a_1 u_1$, αν $a_1 \neq \sqcup$, ή $u_1 \neq \varepsilon$, ή

   β) $u_2 = \varepsilon$, αν $a_1 = \sqcup$, και $u_1 = \varepsilon$.
3. $b = \rightarrow$, $w_2 = w_1 a_1$, και είτε

   α) $u_1 = a_2 u_2$, ή

   β) $u_1 = u_2 = \varepsilon$ και $a_2 = \sqcup$.

Η σχέση «παράγει σε μηδέν ή περισσότερα βήματα»

Έστω συνολικές καταστάσεις C, C'.

$$C \vdash_M^* C'$$

αν και μόνο αν, υπάρχουν συνολικές καταστάσεις $C_0, C_1, \ldots, C_n$, $n \geq 0$, ώστε

$$C = C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \ldots \vdash_M C_{n-1} \vdash_M C_n = C'.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε επίσης πως ο υπολογισμός έχει n βήματα.

Τρεις στοιχειώδεις Μ. Τ.

M_α: Μ. Τ. που εκτελεί την «ενέργεια» $\alpha \in (\Sigma - \{\triangleright\}) \cup \{\rightarrow, \leftarrow\}$.

$M = (s, h, \Sigma, \delta, s, \{h\})$

Για κάθε $b \in \Sigma - \{\triangleright\}$,

$$\delta(s, b) = (h, \alpha)$$

Επίσης

$$\delta(s, \triangleright) = (h, \rightarrow)$$

Ανάλογα με το α ορίζουμε τρεις διαφορετικές στοιχειώδεις Μ. Τ. Θα χρησιμεύσουν ως δομικά στοιχεία στην κατασκευή πιο πολύπλοκων Μ.Τ.

Τιμή του α	Συντομογραφία για M_α
$\in \Sigma - \{\triangleright\}$	α
$\rightarrow$	R
$\leftarrow$	L

Σύνθεση Μ. Τ.

Τρόπος για να απεικονίζουμε σχετικά περίπλοκες Μ. Τ. με βάση πιο απλά δομικά στοιχεία.

«Λειτούργησε όπως η M_1. Όταν η M_1 τερματίσει, αν η κεφαλή διαβάζει a λειτούργησε όπως η M_2 ειδάλλως τερμάτισε.»

$$M_1 \xrightarrow{a} M_2$$

Ειδική περίπτωση:
«Λειτούργησε όπως η M_1. Όταν η M_1 τερματίσει, ο,τιδήποτε και να διαβάζει η κεφαλή λειτούργησε όπως η M_2.»

Αντί για

$$M_1 \xrightarrow{\forall a \in \Sigma} M_2$$

γράφουμε

$$M_1 M_2$$