Υπολογισμοί με Μ.Τ.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια Μ.Τ. Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι το y, θα ονομάζεται συνολική κατάσταση αποδοχής, ενώ αν η κατάσταση τερματισμού είναι το n, θα ονομάζεται συνολική κατάσταση απόρριψης.

Λέμε οτι η M δέχεται μια είσοδο $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μία συνολική κατάσταση αποδοχής. Λέμε ότι η M απορρίπτει την w αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$. Λέμε ότι η M αποφασίζει μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$:

- αν $w \in L$, η M δέχεται την w
- αν $w \notin L$, η M απορρίπτει την w.

Μια γλώσσα λέγεται αναδρομική αν υπάρχει μια Μ.Τ. που την αποφασίζει.

Αναδρομικές Συναρτήσεις

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $w \in \Sigma_0^*$. Υποθέτουμε ότι η M τερματίζει με είσοδο w, και ότι $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}u)$, για κάποιο $u \in \Sigma_0^*$. Το u ονομάζεται η έξοδος της M με είσοδο w και συμβολίζεται με $M(w)$.

Έστω $f : \Sigma_0^* \longrightarrow \Sigma_0^*$. Λέμε ότι η M υπολογίζει τη συνάρτηση f αν, για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται αναδρομική, αν υπάρχει μία Μ.Τ. που την υπολογίζει.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ που ορίζεται ως $f(w) = ww$, μπορεί να υπολογιστεί από μια Μ.Τ. που πρώτα αντιγράφει το w (μηχανή C) και μετά κάνει μετατόπιση προς τα αριστερά (μηχανή $S_\leftarrow$).

Αναδρομικές Συναρτήσεις, συνέχεια

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικές συναρτήσεις;

Μηχανές **Turing** που υπολογίζουν συναρτήσεις από το $\{0,1\}^*$ στο $\{0,1\}^*$ μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ. τέτοια ώστε $0, 1, ; \in \Sigma$, και έστω $f : N^k \rightarrow N$. Λέμε ότι η M υπολογίζει τη συνάρτηση f αν για όλα τα $w_1, \ldots, w_k \in 0 \cup 1\{0,1\}^*, num(M(w_1; \ldots; w_k)) = f(num(w_1), \ldots, num(w_k))$

Παράδειγμα: Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια Μ.Τ. που να υπολογίζει τη συνάρτηση διαδοχής στους φυσικούς αριθμούς (δηλαδή τη συνάρτηση $f(n) = n + 1$).

Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \rhd\}$ και έστω $L \subseteq \Sigma_0^*$ μια γλώσσα. Λέμε ότι η M ημιαποφασίζει την L αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ αληθεύει το εξής: $w \in L$ αν και μόνο αν η M τερματίζει με είσοδο w. Μία γλώσσα είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μία Μ.Τ. που ημιαποφασίζει την L.

Οι Μ.Τ. που ημιαποφασίζουν γλώσσες δεν είναι αλγόριθμοι. Αν μια Μ.Τ. ημιαποφασίζει μια γλώσσα L και της δοθεί ως είσοδος μια συμβολοσειρά $w \notin L$, τότε δεν θα ξέρουμε ποτέ αν έχουμε περιμένει αρκετά για μια απάντηση.

Ποιά η σχέση ανάμεσα στις αναδρομικές και τις αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες;

Αναδρομικές - Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες: Ιδιότητες

Θεώρημα: Αν μια γλώσσα είναι αναδρομική, τότε είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Απόδειξη: Δεδομένης μιας Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει μια γλώσσα L, ορίζουμε $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$, όπου δ' είναι η δ επαυξημένη με τις μεταβάσεις $\delta'(n, a) = (n, a)$, για όλα τα $a \in \Sigma$.

Θεώρημα: Αν η L είναι μία αναδρομική γλώσσα, τότε το συμπλήρωμα $\overline{L}$ της L είναι επίσης αναδρομική γλώσσα.

Απόδειξη: Έστω ότι η L αποφασίζεται από τη Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$. Τότε η $\overline{L}$ αποφασίζεται από τη Μ.Τ. $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y, n\})$ όπου:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} n, & \text{αν } \delta(q, a) = y \\ y, & \text{αν } \delta(q, a) = n \\ \delta(q, a), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$