Αριθμητικές συναρτήσεις [**Liu**, κεφ. 9]

Ορισμοί

Ορ. Οι συναρτήσεις : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού τους φυσικούς, λέγονται αριθμητικές (διακριτές).

Κάθε αριθμητική συνάρτηση ορίζει μια ακολουθία και αντιστρόφως.

Π.χ. $a : \{0, 1, \ldots\} \rightarrow \{a_0, a_1, \ldots\}$, δηλ $a_k \triangleq a(k)$.

Παραδείγματα αριθμητικών συναρτήσεων

Π.χ. Κατάθεση 100 Ευρώ, ετήσιος επιτόκιο 7%.

$$
\begin{aligned}
\text{Τέλος 1ου έτους} &= 107 && = 100(1+0,07)\\
\text{Τέλος 2ου έτους} &= 107 + \tfrac{7}{100}107 = 114,49 && = 100(1+0,07)^2\\
\text{Τέλος 3ου έτους} &= 122,50 && = 100(1+0,07)^3
\end{aligned}
$$

δηλαδή $(100, 107, 114.49, 122.50, \dots)$.

Ο γενικός τύπος είναι $a(k) = 100 \cdot (1,07)^k$, στο τέλος k έτους, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Παραδείγματα αριθμητικών συναρτήσεων

Π.χ. Ο χρόνος εκτέλεσης ενός προγράμματος με είσοδο μεγέθους n εκφράζεται από μια παράσταση $T(n)$. Συνήθως για ισομεγέθεις εισόδους, ο χρόνος εκτέλεσης ποικίλλει λόγω της ιδιομορφίας της κάθε εισόδου.

Μας ενδιαφέρει μια αριθμητική συνάρτηση που θα είναι άνω φράγμα στην τιμή της $T(n)$ για κάθε είσοδο μεγέθους n (πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης), και για n «αρκετά» μεγάλα.

Μας ενδιαφέρει λοιπόν η ασυμπτωτική μελέτη της $T(n)$.

Ασυμπτωτική μελέτη

Η ασυμπτωτική μελέτη αριθμητικών συναρτήσεων ταξινομεί τις συναρτήσεις με βάση την τάξη «μεγέθους» τους.

Είναι ένας βολικός τρόπος να συγκρίνουμε τη συμπεριφορά δυο συναρτήσεων $f(n)$ και $g(n)$ για μεγάλα n.

(Π.χ. χρόνος εκτέλεσης προγράμματος για μεγάλο μέγεθος εισόδου, μακροπρόθεσμη συμπεριφορά επένδυσης).

Π.χ:

$34 \log n \to \infty$ αλλά πιο αργά από $2n^2$ κι ακόμη πιο αργά από 2^n.

Ορισμός Τάξης

Ορ. Τάξη της αριθμητικής συνάρτησης $g(n)$ είναι το σύνολο

$$O(g(n)) := \{f(n) : \exists \text{σταθ. } c > 0, n_0, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}.$$

Για οποιαδήποτε $f \in O(g)$, λέμε πως «η f είναι $O(g)$».

Δηλαδή: Από τον ορισμό της, η τάξη δηλώνει

- μόνο άνω φράγμα,
- μπορεί να κρύβει μια σταθερά,
- κρύβει συμπεριφορά πεπερασμένου πλήθους όρων (όταν $n < n_0$).

Παρατηρήσεις

1. Δεν μας ενδιαφέρει τόσο το $O(g(n))$ σαν σύνολο, όσο σαν έννοια άνω φράγματος για τις $f(n) \in O(g(n))$.
2. Κατά συνέπεια έχει επικρατήσει αντί για $f(n) \in O(g(n))$, να γράφουμε $f(n) = O(g(n))$.
3. Για μια δεδομένη $b(n)$, υπάρχει απειρία αριθμητικών συναρτήσεων $g(n)$ τ.ω. $b(n) = O(g(n))$. (γιατί;)

Παραδείγματα

Π.χ.

- $1/n = O(n), 1/n = O(1)$
- $n = O(n), n\log n = O(n^2), n^2 + 10^6 n = O(n^2)$
- $n^2 - 32n + 199n\log n = O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(2^n)$

Παραδείγματα

Για κάθε σταθερά Δ, ισχύει πως $\Delta = O(1)$:

θεωρείστε τις σταθερές συναρτήσεις $f(n) = \Delta$ και $g(n) = 1$. Αποδείξτε πως $f(n) = O(g(n))$.

Παρατηρήσεις

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \Delta f(n) = O(g(n)), \forall$ σταθερά Δ.
2. $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$.
3. Μπορεί να ισχύει $a(n) \notin O(b(n))$ και $b(n) \notin O(a(n))$:

$$a(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ άρτιος,} \\ 0 & n \text{ περιττός,} \end{cases} \qquad b(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιος} \\ 1 & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

4. Μπορεί να έχω $c(n) = O(a(n)), c(n) = O(b(n))$ αλλά $a(n) \notin O(b(n))$ και $b(n) \notin O(a(n))$:

$$a(n) = \begin{cases} 1 & n \bmod 3 \equiv 0 \vee 1, \\ 0 & n \bmod 3 \equiv 2, \end{cases} \quad b(n) = \begin{cases} 1 & n \bmod 3 \equiv 0 \vee 2, \\ 0 & n \bmod 3 \equiv 1, \end{cases}$$

$$c(n) = \begin{cases} 1 & n \bmod 3 \equiv 0, \\ 0 & n \bmod 3 \equiv 1 \vee 2. \end{cases}$$

Ιδιότητα

Λήμμ. $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 0 \Rightarrow a = O(b)$.

Απόδ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 0 \Rightarrow \left[\forall\varepsilon\ \exists N_0 : n > N_0 \Rightarrow \frac{a(n)}{b(n)} < \varepsilon\right]$$

Φιξάρισε ένα ε και θέσε $C := \varepsilon$. Τότε
$\exists N_0(\varepsilon) : n > N_0 \quad \frac{a(n)}{b(n)} < C \Rightarrow a(n) < Cb(n)$. Άρα $a = O(b)$. $\square$

Δεν ισχύει το αντίστροφο:
$2n = O(7n)$ ενώ $\frac{2n}{7n} \to \frac{2}{7}$.

$n^2 + n = O(n^2)$ ενώ $\lim \frac{n^2+n}{n^2} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1$.

Πολυωνυμικές **vs.** Εκθετικές συναρτήσεις

Λήμμ. $n^b = O(a^n)$, για $a > 1$, $b > 0$.

Απόδ. Αρκεί να δείξουμε πως $\lim_n \frac{n^b}{a^n} = 0$ όταν $b \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_n \frac{bn^{b-1}}{a^n \ln a} = \cdots = \lim_n \frac{b!}{a^n \ln^b a} = 0.$$

Όπου εφαρμόσαμε κανόνα **L'Hôpital** και

$$(a^n)' = (e^{n \ln a})' = e^{n \ln a} \ln a = a^n \ln a.$$

Όταν $b \in \mathbb{R}$, $n^b = O(n^{\lceil b \rceil}) = O(a^n)$. $\square$

Π.χ. $n^b = O(a^n) \Rightarrow n^8 = O(2^n) \Rightarrow 10^6 n^8 = O(2^n)$.

Λογάριθμοι

Λήμμ. Για $a, b > 0$ ισχύει πως $(\ln n)^a = O(n^b)$.

Απόδ. Αρκεί να δείξω πως $\exists N_0$, τ.ω. $\forall n \geq N_0$

$$(\ln n)^a \leq n^b \Leftrightarrow (\ln n)^a \leq e^{b \ln n}.$$

Αν πάρω λογαρίθμους

$$a \ln \ln n \leq b \ln n \Leftrightarrow \ln \ln n \leq (b/a) \ln n.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για n αρκετά μεγάλο μιας και

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \ln n}{(b/a) \ln n} = 0.$$

$\square$

Ερώτημα

Τί ισχύει αν αλλάξουμε τη βάση του λογαρίθμου;

Για $a, b > 0$ ισχύει πως $(\log_2 n)^a = O(n^b)$?

Φυσικά, ναι (γιατί;).

Παραγοντικό

Λήμμ. Για $a > 0$, $a^n = O(n!)$

Απόδ. Έστω $a \in \mathbb{Z}$, ειδάλλως χρησιμοποίησε $\lceil a \rceil$. Για $n \geq a$,

$$a^n = a^a a^{n-a}$$

Επίσης για $n - a \geq a \Leftrightarrow n \geq 2a$,

$$a^{n-a} = \underbrace{aa \cdots a}_{n-a} \leq n(n-1)\cdots(n-a) \leq n!$$

Θέτουμε $C = a^a, N_0 = 2a : \forall n \geq N_0 = 2a :$

$$a^n = Ca^{n-a} \leq Cn!$$

$\square$

Ορισμός Θ()

Ορ. Έστω $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
$\Theta(g(n)) :=$

$$\{f(n) : \exists \text{σταθ. } c_1, c_2 > 0, n_0, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)\}$$

Παρατήρηση:

- Ο συμβολισμός Θ δίνει σφιχτά πάνω και κάτω φράγματα.
- Αντί για $f \in \Theta(g)$, γράφουμε $f = \Theta(g)$.
- $f = \Theta(g) \Rightarrow f = O(g)$.

Παραδείγματα

Π.χ. Ισχύει $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ αφού $\exists c_1, c_2, n_0$:

$$c_1\, n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2\, n^2, \quad \forall n \geq n_0$$

Διαιρώντας με n^2 έχουμε $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$.
Αν διαλέξουμε $c_1 = \frac{1}{14}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 7$ τότε η σχέση ισχύει.

Λήμμ. Για κάθε $f(n)$, $a, b > 1$, ισχύει $\log_a f(n) = \Theta(\log_b f(n))$.

Απόδ.
$$\log_a f(n) = \frac{\log_b f(n)}{\log_b a} = \Theta(\log_b f(n)).$$

Πόρ. $\lg f(n) = \Theta(\ln f(n))$.

Ορισμός $\Omega()$

Ορ. Έστω $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists \text{ σταθερές } c > 0, n_0, 0 \leq c\,g(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$

Π.χ. Ισχύει $2n^2 = \Omega(105n^2 + 45n)$ αλλά $n^{2/3} \notin \Omega(n^{4/5})$.

Παρατήρηση:

- Ο συμβολισμός Ω δίνει ένα κάτω φράγμα στη συνάρτηση, σε συνδυασμό με κάποια σταθερά.
- $f = \Omega(g) \Leftrightarrow g = O(f)$.
- $f = \Theta(g) \Rightarrow f = \Omega(g)$.

Σχέση O, Ω, Θ

Θεώρ. Για κάθε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \Theta(g(n))$ ανν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.

Απόδ.

$$O(g) = \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c_2, n_0 : 0 \leq f(n) \leq c_2\, g(n), \forall n \geq n_0\}$$

$$\Omega(g) = \{f(n) : \exists \text{ σταθερές } c_1, n_0 : 0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$

$$\Theta(g) = \{f(n) : \exists \text{σταθ. } c_1, c_2, N_0 : 0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n), \forall n \geq N_0\}$$

$\square$

Σχέση O, Ω, Θ (συνέχεια)

Θεώρ. Για κάθε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \Theta(g(n))$ **ανν** $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(f(n))$.

Απόδ. Άσκηση. $\square$

Μεταβατική ιδιότητα

- $f = \Theta(g) \wedge g = \Theta(h) \Rightarrow f = \Theta(h)$
- $f = O(g) \wedge g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$
- $f = \Omega(g) \wedge g = \Omega(h) \Rightarrow f = \Omega(h)$

Άλλες ιδιότητες

Ανακλαστική ιδιότητα

- $f(n) = \Theta(f(n))$
- $f(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Omega(f(n))$

Συμμετρική ιδιότητα

- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$

Ιδιότητα αναστροφής

- $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

Ορισμός $o()$

Ορ. Έστω $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$o(g) = \{f(n) :$ ∀σταθ. $c > 0$, $\exists$ στ. $n_0, 0 \le f(n) < c\,g(n), \forall n \ge n_0\}$

Π.χ. Ισχύει $2n = o(n^2)$ αλλά $n^2/4 \notin o(n^2)$.

Παρατήρηση:

- Οι συμβολισμοί O και o εκφράζουν άνω φράγματα, αλλά μόνον ο o εκφράζει αυστηρό άνω φράγμα.
- $$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Ορισμός $\omega()$

Ορ. Έστω $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$\omega(g) = \{ f(n) : \forall \text{σταθ. } c > 0, \exists \text{ στ. } n_0, 0 \leq cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0 \}$$

Π.χ. Ισχύει $2n^2 = \omega(17n + \sqrt{n})$ αλλά $n^2 \notin \omega(n^2/4)$.

Παρατήρηση:

- Οι συμβολισμοί Ω και ω εκφράζουν κάτω φράγματα, αλλά μόνον ο ω εκφράζει αυστηρό κάτω φράγμα.
- $$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$$