Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Αρτιοι ΑΜ
Πρωτο συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Συνολα, επαγωγη, λογικη.

Άσκηση 1 (α) Σημειώστε, χωρίς απόδειξη, αν καθένα από τα παρακάτω σύνολα είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο ή μη αριθμήσιμο:

$$\mathbb{Q}^2, 2^{[0,1]}, [0,1] \times [0,1], 2^{\mathbb{Z}_3}, \mathbb{R}[x], \mathbb{N}[x_1, \ldots, x_n].$$

όπου $\mathbb{Q}$ οι ρητοί, το $[0,1]$ συμβολίζει ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, $\mathbb{Z}_3 = \{x \bmod 3 \,:\, x \in \mathbb{Z}\}$, και $K[x]$ ή $K[x_1, \ldots, x_n]$ είναι το σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές από το σύνολο K, σε μία μεταβλητή x ή σε n μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$, αντίστοιχα. [3 μονάδες]
(β) Αποδείξτε πως οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, εφοδιασμένοι με την πράξη $(a, b) \mapsto \max\{a, b\}$, αποτελούν μονοειδές. Ισχύει η αντιμεταθετικότητα για την πράξη αυτή;

Λύση.
(α) Αρ, Μη, Μη, Πεπ, Μη, Αρ.
(β) προσεταιριστική, ουδέτερο $= 0$, αντιμεταθετικότητα.

Άσκηση 2 Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Να δείξετε ότι η αλγεβρική δομή $(\mathcal{P}(A), \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Λύση.
Πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες μιας αβελιανής ομάδας:

Κλειστότητα: Αν $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$ τότε το σύνολο $S_1 \oplus S_2$ έχει στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο A, άρα θα εμφανίζονται και σαν στοιχεία κάποιου υποσυνόλου του. Συνεπώς $S_1 \oplus S_2 \in \mathcal{P}(A)$.

Προσεταιριστική ιδιότητα: Σχεδιάζοντας τα διαγράμματα Venn εύκολα προκύπτει ότι $S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3) = (S_1 \oplus S_2) \oplus S_3$.

Ουδέτερο στοιχείο: Αν $S \in \mathcal{P}(A)$ έχουμε ότι $S \oplus \emptyset = \emptyset \oplus S = S$, άρα ουδέτερο στοιχείο είναι το $\emptyset$.

Συμμετρικό στοιχείο: Αν $S \in \mathcal{P}(A)$ έχουμε ότι $S \oplus S = \emptyset$, άρα το συμμετρικό κάθε στοιχείου είναι ο εαυτός του.

Αντιμεταθετική ιδιότητα: Αν $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$ τότε $S_1 \oplus S_2 = (S_1 \cup S2) \setminus (S_1 \cap S_2) = (S_2 \cup S_1) \setminus (S_2 \cap S_1) = S_2 \oplus S_1$.

Άσκηση 3 Δώστε παραδείγματα για να υποστηρίξετε ότι η τομή 2 άπειρα αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμα άπειρο σύνολο και ότι η τομή 2 άπειρων μη αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο, ή άπειρο μη αριθμήσιμο σύνολο.

Λύση.

1 Τα σύνολα των άρτιων και των περιττών φυσικών έχουν ως τομή πεπερασμένο σύνολο (κενό σύνολο).

2 Τα σύνολα των φυσικών και των άρτιων φυσικών έχουν ως τομή τους άρτιους φυσικούς (αριθμήσιμα άπειρο).

3 Τα σύνολα των θετικών πραγματικών και των αρνητικών έχουν ως τομή πεπερασμένο σύνολο.

4 Τα σύνολα $[0,1]\cup\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ και $[-1,0]\cup\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$, όπου $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$ δεν είναι αριθμήσιμα άπειρα σύνολα διότι έχουν σαν υποσύνολα μή αριθμήσιμα άπειρα σύνολα. Η τομή τους, το σύνολο $\{0\}\cup\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ είναι αριθμήσιμα άπειρο σύνολο διότι υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση που στο 0 αντιστοιχίζει το 0 και σε κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ αντιστοιχίζει το $\frac{1}{n}$.

5 Όλα τα διαστήματα των πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμα άπειρα σύνολα. Επομένως η τομή $[4,5]$ των διαστημάτων $[2,5]$ και $[4,6]$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρο σύνολο.

Άσκηση **4** Ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων όπως το $\Sigma=\{0,1\}$ ονομάζεται αλφάβητο και μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου ονομάζεται συμβολοσειρά (υπάρχει και η κενή συμβολοσειρά ε που δεν περιέχει κανένα σύμβολο). Το σύνολο Σ^* περιέχει όλες τις συμβολοσειρές που παράγονται από το αλφάβητο Σ (μαζί και την κενή συμβολοσειρά). Να δείξετε ότι το Σ^* είναι αριθμήσιμα άπειρο σύνολο.

Λύση.

- Για κάθε $i\geq 0$, όλες οι συμβολοσειρές μήκους i απαριθμούνται πριν από όλες τις συμβολοσειρές που έχουν μήκος $i+1$,
- Οι 2^i συμβολοσειρές μήκους ακριβώς i απαριθμούνται λεξικογραφικά, δηλαδή αν έχουμε δύο συμβολοσειρές s_1 και s_2, ίδιου μήκους, βάζουμε πρώτα τη συμβολοσειρά που αναπαριστά στο δυαδικό σύστημα τον μικρότερο αριθμό.

Έχουμε λοιπόν την παρακάτω 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο Σ^*:

0	ε
1	0
2	1
3	00
5	01
6	10
7	11
8	000
9	001
10	010
11	011
12	100
13	101
14	110
15	111
16	0000
17	0001
$\vdots$	$\vdots$

Άσκηση 5 Αποδείξτε ότι το σύνολο των ολικών συναρτήσεων $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (ολικές ονομάζονται οι συναρτήσεις που ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{N}$) είναι μη αριθμήσιμα άπειρο.

Λύση.
Πρέπει να διαμορφώσουμε ένα διαγώνιο επιχείρημα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιούμε για νά δείξουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρο. Έστω ότι υπάρχει τρόπος να καταγραφούν με κάποια σειρά $\phi_1, \phi_2, \ldots$ όλες οι ολικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f(x) = \phi_x(x) + 1$ είναι ολική συνάρτηση, συνεπώς πρέπει να εμφανίζεται στην καταγραφή των ολικών συναρτήσεων με κάποιο δείκτη y, δηλαδή $f(x) = \phi_y$. Τότε όμως $\phi_y(y) = f(y) = \phi_y(y) + 1$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τρόπος καταγραφής όλων των ολικών συναρτήσεων, συνεπώς το σύνολό τους είναι μη αριθμήσιμα άπειρο.

Άσκηση 6 (α) Θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή ότι υπάρχει πάντα τρόπος να χωριστούν n φοιτητές, $n \geq 8$, σε ομάδες των 4 ή 5 ατόμων.

Βάση: Αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n = 8, 9, 10$:

$$\begin{aligned} 8 &= 4 + 4 \\ 9 &= 4 + 5 \\ 10 &= 5 + 5 \end{aligned}$$

Επαγωγικό Βήμα: Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $8, \ldots, n$ φοιτητές και θα δείξουμε πως θα χωριστούν $n + 1$ φοιτητές σε γκρούπ των 4 ή 5 ατόμων: σχηματίζουμε ένα γκρούπ των 4 φοιτητών και τους υπόλοιπους τους χωρίζουμε σε γκρούπ των 4 ή 5 από την αλήθεια του ισχυρισμού για $n - 3$ φοιτητές. Συνεπώς ο ισχυρισμός ισχύει επαγωγικά.

Η παραπάνω απόδειξη περιέχει ένα λογικό λάθος. Εντοπίστε το λάθος και εξηγείστε τί δεν πήγε καλά.

(β) Επαναδιατυπώστε τον ισχυρισμό και δώστε μια απόδειξη με ισχυρή επαγωγή.

Λύση.
(α)Παρατηρήστε ότι χρειαζόμαστε επαγωγική βάση τεσσάρων διαδοχικών φυσικών π.χ. η ισχύς της πρότασης για $n = 11$ στηρίζεται στην ισχύ της πρότασης για $n = 7$.
(β)Ισχυρισμός: Πάντα μπορούμε να χωρίσουμε n φοιτητές, $n \geq 12$, σε γκρούπ των 4 ή 5 ατόμων. Αποδείξτε το με ισχυρή επαγωγή όμοια με την αποτυχημένη απόπειρα.

Άσκηση 7 Όταν n ζευγάρια έφτασαν σε μια γιορτή, τους υποδέχτηκαν ο οικοδεσπότης και η οικοδέσποινα στην πόρτα. Μετά την ανταλλαγή χειραψιών, ο οικοδεσπότης ζήτησε από τους καλεσμένους, καθώς επίσης και από τη γυναίκα του (την οικοδέσποινα) να αναφέρουν τον αριθμό των χεριών που είχε σφίξει ο καθένας. Πήρε $2n + 1$ διαφορετικές απαντήσεις. Δεδομένου ότι κανείς δεν αντάλλαξε χειραψία με την/τον σύζυγό του/της, πόσα χέρια έσφιξε η οικοδέσποινα; Αποδείξτε την απάντησή σας με επαγωγή.

Λύση.
Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο πλήθος n των καλεσμένων ζευγαριών της γιορτής και θα αποδείξουμε ότι το πλήθος των χειραψιών της οικοδέσποινας είναι n.

Βάση: Για $n = 1$ ο οικοδεσπότης παίρνει $2n + 1 = 3$ διαφορετικές απαντήσεις και εφόσον κανείς δεν μπορεί να κάνει $2n+1$ χειραψίες (δεν χαιρετά την/τον σύζυγό του/της) οι απαντήσεις είναι ακριβώς οι αριθμοί 0,1,2. Το άτομο που απάντησε 2 δεν μπορεί να είναι η οικοδέσποινα (αφού δεν έκανε χειραψία με το άτομο που έκανε 0 χειραψίες ούτε με τον σύζυγό της). Το άτομο που έκανε 0 χειραψίες είναι αναγκαστικά ζευγάρι με το άτομο που απάντησε 2 (αλλιώς ο τελευταίος θα έκανε χειραψία με το ζευγάρι του αφού χαιρέτησε όλους τους άλλους). Άρα η οικοδέσποινα έκανε 1 χειραψία.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω ότι με n καλεσμένα ζευγάρια η οικοδέσποινα έκανε n χειραψίες. Τότε $n + 1$ καλεσμένα ζευγάρια όπως και προηγουμένως οι χειραψίες θα είναι ακριβώς οι αριθμοί 0,1,2,..,$2n$ και επιπλέον τα άτομα που έκαναν 0 και $2n$ χειραψίες θα είναι ζευγάρι διαφορετικό από τους οικοδεσπότες. Αφαιρώντας το ζευγάρι αυτό καθώς και τις χειραψίες στις οποίες συμμετείχε έχουμε n με αριθμούς χειραψιών 0,1,2,..,$2n - 2$ (αφού αφαιρείται 1 από τους αριθμούς 1,2,..,$2n - 1$). Τώρα όμως έχουμε την περίπτωση της επαγωγικής υπόθεσης με τα n και άρα η οικοδέσποινα έκανε n χειραψίες. Της είχαμε αφαιρέσει μία χειραψία, οπότε στα $n + 1$ ζευγάρια έκανε ακριβώς $n + 1$ χειραψίες.

Άσκηση 8 Σε κάθε έναν πλανήτη ενός ηλιακού συστήματος βρίσκεται ένας αστρονόμος ο οποίος παρατηρεί τον κοντινότερο σε αυτόν πλανήτη. Οι αποστάσεις μεταξύ των πλανητών είναι ανά 2 διαφορετικές. Αποδείξτε ότι αν το πλήθος των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1, τότε θα υπάρχει κάποιος πλανήτης τον οποίο δεν παρατηρεί κανένας αστρονόμος.

Λύση.
Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο πλήθος n των πλανητών (περιττοί ≥ 3).

Βάση: Για $n = 3$ πλανήτες, οι αστρονόμοι που κάθονται στους δύο πλανήτες με την μικρότερη μεταξύ τους απόσταση θα παρατηρούν ο κάθε ένας τον πλανήτη του άλλου. Οπότε κανείς δεν θα παρατηρεί τον τρίτο πλανήτη.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = 2k+1$. Τότε για $n = 2k+3$ πλανήτες, όπως και πριν, θα υπάρχουν δύο, οι πιο κοντινοί, των οποίων οι αστρονόμοι θα παρατηρούν ο ένας τον πλανήτη του άλλου. Αν τώρα από τους υπόλοιπους αστρονόμους υπάρχει έστω και ένας που παρατηρεί κάποιον από τους δύο προηγούμενους, τότε προφανώς οι άλλοι 2κ αστρονόμοι δεν επαρκούν για να παρατηρήσουν τους υπόλοιπους $2k+1$ πλανήτες, οπότε ισχύει η πρόταση. Στην περίπτωση που δεν παρατηρεί κανείς άλλος τους δύο κοντινότερους πλανήτες, τότε, αγνοώντας τους καθώς και τους αστρονόμους τους, έχουμε ακριβώς την περίπτωση της επαγωγικής υπόθεσης (για $n = 2k + 1$), οπότε και πάλι ισχύει η πρόταση.

Άσκηση 9 Μία ομάδα από ζηλωτές των μαθηματικών ανάμεσα στο διδακτικό προσωπικό των Διακριτών Μαθηματικών σκοπεύει να κάνει τις τελικές εξετάσεις αδιανόητα δύσκολες. (Πρόβλημα 1: Εξάγετε όλα τα γνωστά μαθηματικά από τα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Γράψτε την απάντηση σας στη γλώσσα των Μάγια). Ο μόνος τρόπος να σταματήσει το σατανικό σχέδιο των ζηλωτών είναι να ανακαλυφθούν τα μέλη της ομάδας τους. Το διδακτικό προσωπικό της ομάδας αποτελείται από τα παρακάτω άτομα:

$$\{\text{Κλαίρη, Λήδα, Χριστόδουλος, Γιώργος, Λητώ, Νίκος, Στράτος}\}$$

Η ομάδα των ζηλωτών είναι ένα υποσύνολο των παραπάνω επτά ατόμων. Έχει βρεθεί ένα έγγραφο που αποκαλύπτει τα μέλη της ομάδας, είναι όμως κωδικοποιημένο με λογικούς συμβολισμούς. Το κατηγόρημα $Z(x)$ αληθεύει αν και μόνο άν ο x είναι μέλος της ομάδας. Μεταφράστε σε απλά ελληνικά τις παρακάτω προτάσεις και ανακαλύψτε τα μέλη της ομάδας:

1. $\exists x \exists y \exists z\, (x \neq y \land x \neq z \land y \neq z \land Z(x) \land Z(y) \land Z(z))$
2. $\neg(Z(\text{Στράτος}) \land Z(\text{Γιώργος}))$
3. $Z(\text{Νίκος}) \rightarrow \forall x Z(x)$
4. $Z(\text{Γιώργος}) \rightarrow Z(\text{Στράτος})$
5. $(Z(\text{Λητώ}) \lor Z(\text{Χριστόδουλος})) \rightarrow \neg Z(\text{Λήδα})$
6. $(Z(\text{Λητώ}) \lor Z(\text{Στράτος})) \rightarrow \neg Z(\text{Κλαίρη})$

Λύση.
Χριστόδουλος, Λητώ, Στράτος (γιατί;).

Άσκηση 10 Ο καθηγητής Χ επέστρεψε από τις διακοπές σε ένα νησί όπου οι κάτοικοι είτε λένε πάντα την αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα. Μας είπε ότι άκουσε τις ακολουθες δηλώσεις από δύο κατοίκους του νησιού Α και Β:
Α: ο Β λέει πάντα ψέματα.
Β: ο Α λέει πάντα την αλήθεια.

Εκφράστε τις παραπάνω δηλώσεις ως λογικές προτάσεις και αποδείξτε ότι ο καθηγητής X λέει ψέματα.

Λύση.
Έστω a η πρόταση ≪ο Α λέει αλήθεια ≫και β η πρόταση ≪ο Β λέει αλήθεια≫. Από τα δεδομένα του προβλήματος ισχύει α $\Leftrightarrow \neg$ β και β $\Leftrightarrow$ α και άρα $\neg$ β $\Leftrightarrow \neg$ α. Οπότε α $\Leftrightarrow \neg$ β $\Leftrightarrow \neg$ α, το οποίο είναι άτοπο.