Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Αρτιοι ΑΜ
Πρωτο συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Συνολα, επαγωγη, λογικη.

Άσκηση 1 (α) Σημειώστε, χωρίς απόδειξη, αν καθένα από τα παρακάτω σύνολα είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο ή μη αριθμήσιμο:

$$\mathbb{Q}^2, 2^{[0,1]}, [0,1] \times [0,1], 2^{\mathbb{Z}_3}, \mathbb{R}[x], \mathbb{N}[x_1, \ldots, x_n].$$

όπου $\mathbb{Q}$ οι ρητοί, το $[0,1]$ συμβολίζει ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, $\mathbb{Z}_3 = \{x \bmod 3 \,:\, x \in \mathbb{Z}\}$, και $K[x]$ ή $K[x_1, \ldots, x_n]$ είναι το σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές από το σύνολο K, σε μία μεταβλητή x ή σε n μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$, αντίστοιχα. [3 μονάδες]
(β) Αποδείξτε πως οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, εφοδιασμένοι με την πράξη $(a, b) \mapsto \max\{a, b\}$, αποτελούν μονοειδές. Ισχύει η αντιμεταθετικότητα για την πράξη αυτή;

Άσκηση 2 Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Να δείξετε ότι η αλγεβρική δομή $(\mathcal{P}(A), \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Άσκηση 3 Δώστε παραδείγματα για να υποστηρίξετε ότι η τομή 2 άπειρα αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμα άπειρο σύνολο και ότι η τομή 2 άπειρων μη αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο, ή άπειρο μη αριθμήσιμο σύνολο.

Άσκηση 4 Ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων όπως το $\Sigma = \{0, 1\}$ ονομάζεται αλφάβητο και μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου ονομάζεται συμβολοσειρά (υπάρχει και η κενή συμβολοσειρά ε που δεν περιέχει κανένα σύμβολο). Το σύνολο Σ^* περιέχει όλες τις συμβολοσειρές που παράγονται από το αλφάβητο Σ (μαζί και την κενή συμβολοσειρά). Να δείξετε ότι το Σ^* είναι αριθμήσιμα άπειρο σύνολο.

Άσκηση 5 Αποδείξτε ότι το σύνολο των ολικών συναρτήσεων $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (ολικές ονομάζονται οι συναρτήσεις που ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{N}$) είναι μη αριθμήσιμα άπειρο.

Άσκηση 6 (α) Θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή ότι υπάρχει πάντα τρόπος να χωριστούν n φοιτητές, $n \geq 8$, σε ομάδες των 4 ή 5 ατόμων.

Βάση: Αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n = 8, 9, 10$:

$$\begin{aligned} 8 &= 4 + 4 \\ 9 &= 4 + 5 \\ 10 &= 5 + 5 \end{aligned}$$

Επαγωγικό Βήμα: Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $8, \ldots, n$ φοιτητές και θα δείξουμε πως θα χωριστούν $n+1$ φοιτητές σε γκρούπ των 4 ή 5 ατόμων: σχηματίζουμε ένα γκρούπ των 4 φοιτητών και τους υπόλοιπους τους χωρίζουμε σε γκρούπ των 4 ή 5 από την αλήθεια του ισχυρισμού για $n-3$ φοιτητές. Συνεπώς ο ισχυρισμός ισχύει επαγωγικά.

Η παραπάνω απόδειξη περιέχει ένα λογικό λάθος. Εντοπίστε το λάθος και εξηγείστε τί δεν πήγε καλά.

(β) Επαναδιατυπώστε τον ισχυρισμό και δώστε μια απόδειξη με ισχυρή επαγωγή.

Άσκηση 7 Όταν n ζευγάρια έφτασαν σε μια γιορτή, τους υποδέχτηκαν ο οικοδεσπότης και η οικοδέσποινα στην πόρτα. Μετά την ανταλλαγή χειραψιών, ο οικοδεσπότης ζήτησε από τους καλεσμένους, καθώς επίσης και από τη γυναίκα του (την οικοδέσποινα) να αναφέρουν τον αριθμό των χεριών που είχε σφίξει ο καθένας. Πήρε $2n+1$ διαφορετικές απαντήσεις. Δεδομένου ότι κανείς δεν αντάλλαξε χειραψία με την/τον σύζυγό του/της, πόσα χέρια έσφιξε η οικοδέσποινα; Αποδείξτε την απάντησή σας με επαγωγή.

Άσκηση 8 Σε κάθε έναν πλανήτη ενός ηλιακού συστήματος βρίσκεται ένας αστρονόμος ο οποίος παρατηρεί τον κοντινότερο σε αυτόν πλανήτη. Οι αποστάσεις μεταξύ των πλανητών είναι ανά 2 διαφορετικές. Αποδείξτε ότι αν το πλήθος των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1, τότε θα υπάρχει κάποιος πλανήτης τον οποίο δεν παρατηρεί κανένας αστρονόμος.

Άσκηση 9 Μία ομάδα από ζηλωτές των μαθηματικών ανάμεσα στο διδακτικό προσωπικό των Διακριτών Μαθηματικών σκοπεύει να κάνει τις τελικές εξετάσεις αδιανόητα δύσκολες. (Πρόβλημα 1: Εξάγετε όλα τα γνωστά μαθηματικά από τα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Γράψτε την απάντηση σας στη γλώσσα των Μάγια). Ο μόνος τρόπος να σταματήσει το σατανικό σχέδιο των ζηλωτών είναι να ανακαλυφθούν τα μέλη της ομάδας τους. Το διδακτικό προσωπικό της ομάδας αποτελείται από τα παρακάτω άτομα:

$$\{\text{Κλαίρη, Λήδα, Χριστόδουλος, Γιώργος, Λητώ, Νίκος, Στράτος}\}$$

Η ομάδα των ζηλωτών είναι ένα υποσύνολο των παραπάνω επτά ατόμων. Έχει βρεθεί ένα έγγραφο που αποκαλύπτει τα μέλη της ομάδας, είναι όμως κωδικοποιημένο με λογικούς συμβολισμούς. Το κατηγόρημα $Z(x)$ αληθεύει αν και μόνο άν ο x είναι μέλος της ομάδας. Μεταφράστε σε απλά ελληνικά τις παρακάτω προτάσεις και ανακαλύψτε τα μέλη της ομάδας:

1. $\exists x \exists y \exists z\, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Z(x) \wedge Z(y) \wedge Z(z))$
2. $\neg(Z(\text{Στράτος}) \wedge Z(\text{Γιώργος}))$
3. $Z(\text{Νίκος}) \rightarrow \forall x Z(x)$
4. $Z(\text{Γιώργος}) \rightarrow Z(\text{Στράτος})$

5. $(Z(\text{Λητώ}) \vee Z(\text{Χριστόδουλος})) \rightarrow \neg Z(\text{Λήδα})$
6. $(Z(\text{Λητώ}) \vee Z(\text{Στράτος})) \rightarrow \neg Z(\text{Κλαίρη})$

Άσκηση 10 Ο καθηγητής Χ επέστρεψε από τις διακοπές σε ένα νησί όπου οι κάτοικοι είτε λένε πάντα την αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα. Μας είπε ότι άκουσε τις ακολουθες δηλώσεις από δύο κατοίκους του νησιού Α και Β:
Α: ο Β λέει πάντα ψέματα.
Β: ο Α λέει πάντα την αλήθεια.
Εκφράστε τις παραπάνω δηλώσεις ως λογικές προτάσεις και αποδείξτε ότι ο καθηγητής Χ λέει ψέματα.