Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Αρτιοι ΑΜ
Δευτερο συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Συνδυαστικη.

Άσκηση 1 Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε 12 παγωτά από τις γεύσεις σοκολάτα, λεμόνι, φράουλα, γιαούρτι και βανίλια;

Λύση.
Αν διαλέξουμε c παγωτά σοκολάτα, l παγωτά λεμόνι, s παγωτά φράουλα, g παγωτά γιαούρτι και v παγωτά βανίλια τότε οι διαφορετικές επιλογές μας αντιστοιχίζονται 1-1 και επί με το σύνολο που περιέχει συμβολοακολουθίες του τύπου:

$$\underbrace{0\ldots0}_{c}1\underbrace{0\ldots0}_{l}1\underbrace{0\ldots0}_{s}1\underbrace{0\ldots0}_{g}1\underbrace{0\ldots0}_{v}$$

όπου πρέπει να επιλέξουμε τις 4 από τις 16 θέσεις σαν διαχωριστικά των γεύσεων. Άρα έχουμε συνολικά $\binom{16}{4}$ τρόπους.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι το γινόμενο k διαδοχικών φυσικών διαιρείται με το $k!$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε τον αριθμό των τρόπων επιλογής k αντικειμένων από $n+k$.)

Λύση.
Ο αριθμός $\binom{n+k}{k}$ είναι πάντα φυσικός εφόσον εκφράζει πλήθος συνδυασμών. Έτσι ο $\frac{n+k!}{k!n!}$ είναι φυσικός επομένως ο $k!$ διαιρεί τον $\frac{n+k!}{n!}$. Θέτοντας όπου n την τιμή του μικρότερου από τους ζητούμενους διαδοχικούς μείον 1 και παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3 Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις των ψηφίων 1,2,...,10 υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο είναι μεγαλύτερο από 1 και το τελευταίο είναι μικρότερο από 8;

Λύση.
Διακρίνουμε τις εξής 2 περιπτώσεις: το πρώτο ψηφίο να είναι από 8 και πάνω και το πρώτο ψηφίο να είναι από 2 έως 7. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε 3 επιλογές για το πρώτο ψηφίο ,7 για το τελευταίο και 8! για τα υπόλοιπα. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε 6 επιλογές για το πρώτο, 6 για το τελευταίο και 8! για τα υπόλοιπα. Άρα το συνολικό πλήθος των μεταθέσεων είναι $3*7*8!+6*6*8!$.

Άσκηση 4 Ένας άνθρωπος έχει 10 φίλους. Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει για δείπνο με 2 ή περισσότερους από αυτούς ;

Λύση.
Το πλήθος όλων των υποσυνόλων των φίλων είναι 2^{10}. Θέλουμε να μετρήσουμε αυτά με πληθικό αριθμό 2 ή περισσότερο. Αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος αυτών με πληθικό αριθμό μικρότερο του 2. Έχουμε $\binom{10}{0}$=1 για το κενό και $\binom{10}{1}$=10 για αυτά με πληθικό αριθμό 1. Άρα η απάντηση είναι $2^{10}-\binom{10}{0}-\binom{10}{1}$=1013.

Άσκηση 5 Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 22 διαφορετικά βιβλία σε 5 φοιτητές έτσι ώστε 2 συγκεκριμένοι να έχουν από 5 και οι υπόλοιποι να έχουν από 4;

Λύση.
Έχουμε $\binom{22}{5}$ διαφορετικές επιλογές για τον έναν που θα πάρει 5, $\binom{17}{5}$ για τον άλλο που θα πάρει 5, $\binom{12}{4}$ για τον επόμενο που θα πάρει 4 και $\binom{8}{4}$ για να καθορίσουμε πως θα μοιράσουμε τα υπόλοιπα 8 στους 2 που μένουν. Έτσι το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να γίνει αυτό είναι : $\binom{22}{5}*\binom{17}{5}*\binom{12}{4}*\binom{8}{4}$.

Άσκηση 6 Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση με τη διαφορά ότι οι φοιτητές που θα πάρουν 5 βιβλία είναι 2 και οι υπόλοιποι θα πάρουν από 4, αλλά το ποιοι 2 θα πάρουν από 5 δεν είναι καθορισμένο εκ των προτέρων.

Λύση.
Απλά πρέπει να επιλέξουμε ποιοι 2 θα πάρουν από 5 βιβλία και για κάθε μία τέτοια επιλογή επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα της προηγουμένης άσκησης. Άρα η απάντηση είναι: $\binom{5}{2}*\binom{22}{5}*\binom{17}{5}*\binom{12}{4}*\binom{8}{4}$.

Άσκηση 7 Μετακινούμαστε σε ένα πλέγμα ακεραίων από το σημείο (0,0) έως στο σημείο (30,40) με διακριτά δεξιά βήματα (που αυξάνουν την πρώτη συντεταγμένη κατά 1) και με ανοδικά βήματα (που αυξάνουν τη δεύτερη συντεταγμένη κατά 1). Συνολικά θα έχουν γίνει ακριβώς 30 δεξιά και 40 ανοδικά βήματα. Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούμε να ακολουθήσουμε; Επαναλάβετε το πρόβλημα αν ο στόχος είναι το (m, n) σημείο του πλέγματος.

Λύση.
Αν συμβολίσουμε τη δεξιά κίνηση με 0 και την ανοδική κίνηση με 1 τότε τα διαφορετικά μονοπάτια που μπορούμε να επιλέξουμε αντιστοιχίζονται 1-1 και επί με τις συμβολοακολουθίες 70 θέσεων που έχουν 30 μηδενικά και 40 άσσους. Συνεπώς αρκεί από τις 30 θέσεις να επιλέξουμε αυτές των μηδενικών άρα έχουμε $\binom{70}{30}$ διαφορετικά μονοπάτια. Γενικά η αντιστοίχηση είναι σε συμβολοακολουθίες μ+ν θέσεων στις οποίες ακριβώς μ είναι άσσοι (ή ακριβώς ν είναι μηδέν). Άρα το πλήθος τους είναι $\binom{m+n}{m}$ (ισοδύναμα $\binom{m+n}{n}$).

Άσκηση 8 Μετακινούμαστε σε ένα πλέγμα ακεραίων από το σημείο (0,0) μέχρι το σημείο (50,50) με βήματα δεξιά ή ανοδικά όπως στην προηγούμενη άσκηση. Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούμε να διασχίσουμε αν υπάρχουν εμπόδια, δια μέσου των οποίων δεν μπορούμε να περάσουμε, στα σημεία (10,10) και (20,20);

Λύση.
Από προηγούμενη άσκηση ο συνολικός αριθμός των μονοπατιών είναι $\binom{100}{50}$ όμως πρέπει να αφαιρεθούν τα απαγορευμένα μονοπάτια. Υπάρχουν $\binom{20}{10}\cdot\binom{80}{40}$ μονοπάτια διαμέσου του πρώτου εμποδίου γιατί έχουμε $\binom{20}{10}$ μονοπάτια από το (0,0) μέχρι το (10,10) και $\binom{80}{40}$ μονοπάτια από το (10,10) μέχρι το (50,50). Όμοια υπάρχουν $\binom{40}{20}\cdot\binom{60}{30}$ μονοπάτια διαμέσου του δεύτερου εμποδίου. Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη και τα μονοπάτια που περνούν διαμέσου και των δύο εμποδίων τα οποία είναι $\binom{20}{10}\cdot\binom{20}{10}\cdot\binom{60}{30}$. Από την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού έχουμε για το ζητούμενο αριθμό μονοπατιών ότι είναι ίσος με:

$$\binom{100}{50}-\binom{20}{10}\cdot\binom{80}{40}-\binom{40}{20}\cdot\binom{60}{30}+\binom{20}{10}\cdot\binom{20}{10}\cdot\binom{60}{30}$$