Γραφήματα («Γράφοι») [**Liu**, κεφ. 5]

Σχέσεις μεταξύ διακριτών οντοτήτων

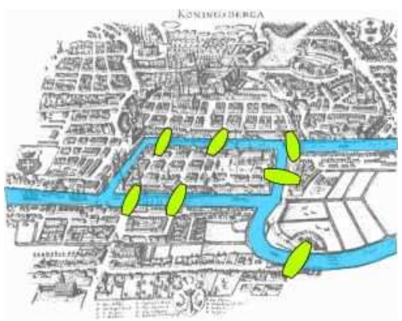
Αποδείξτε πως σε μια ομάδα 51 ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος που γνωρίζει έναν άρτιο αριθμό μελών της ομάδας.

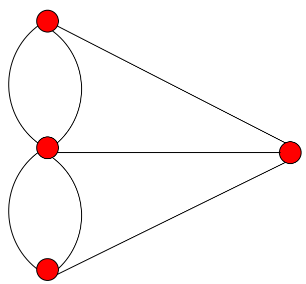
Πώς μπορούμε να σκεφτούμε για ένα τέτοιο πρόβλημα; Πώς μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε;

Το 51 παίζει κάποιο ιδιαίτερο ρόλο στο πρόβλημα; Αν τα άτομα ήταν 77 αλλάζει κάτι; Αν ήταν 78;

Γέφυρες του **Königsberg**

Euler [1736] Εφτά γέφυρες στον ποταμό **Pregel** ενώνουν τις τέσσερεις περιοχές της πόλης. Υπάρχει τρόπος να κάνω μια βόλτα ξεκινώντας και τελειώνοντας στο ίδιο σημείο έτσι ώστε να περάσω από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;



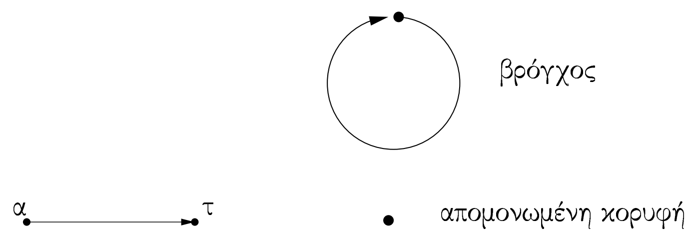


Ορισμοί

Ορ. Κατευθυνόμενο γράφημα
$G = (V, E) : V$ σύνολο, $E \subseteq V \times V$.

Γραφικά: $|V|$ σημεία, $|E|$ βέλη, $\exists \leq 1$ βέλος από σημείο (αρχή) προς άλλο (τέλος).

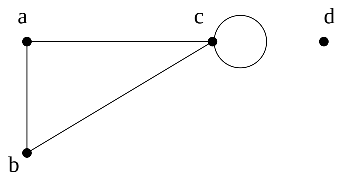
V κορυφές ή κόμβοι, E ακμές



Μη κατευθυνόμενο γράφημα

Ορ. Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$: V σύνολο, E σύνολο: κάθε στοιχείο του E είναι σύνολο δύο στοιχείων του V. Δηλαδή κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς κατεύθυνση (βέλος) επί των ακμών.

Π.χ.



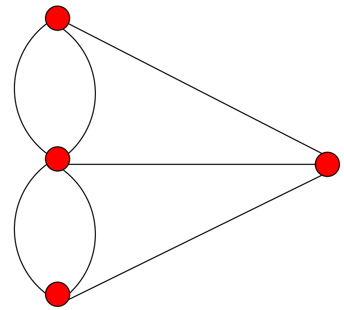
$(V, E) = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{c, c\}\})$
Η ακμή $\{a, b\}$ προσπίπτουσα στις κορυφές a και b.

Πολυγράφημα

Ορ. Γράφημα $G = (V, E)$: το σύνολο E των ακμών μπορεί να είναι πολυσύνολο δηλ. να περιέχει επαναλήψεις στοιχείων.

Στη γραφική αναπαράσταση έχουμε «παράλληλες» ακμές.

Π.χ.



Πότε χρειάζεται η κατεύθυνση;

Αν θα χρησιμοποιήσουμε κατευθυνόμενο ή μη κατευθυνόμενο γράφημα εξαρτάται από την κατάσταση που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε.

Π.χ. αν οι ακμές δηλώνουν σχέσεις προτεραιότητας πρέπει να είναι κατευθυνόμενες.

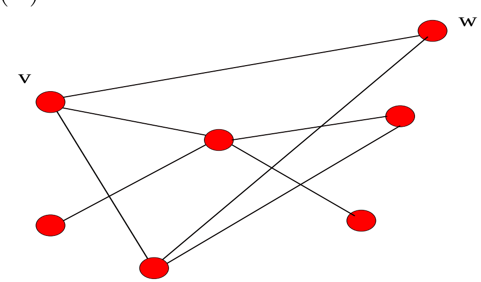
Αν δηλώνουν πως δύο άνθρωποι γνωρίζονται η σχεση είναι αμφίδρομη (ή τουλάχιστον θα έπρεπε!) άρα οι ακμές δεν χρειάζονται κατεύθυνση.

Βαθμός σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.

Ορ. Βαθμός της κορυφής $v \in V$ είναι ο # ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή. Συμβολίζεται με $\delta(v)$.

Π.χ.
$\delta(v) = 3$, $\delta(w) = 2$.



Άθροισμα βαθμών

Θεώρ. Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Απόδ. Στο άθροισμα μετράμε κάθε ακμή $\{v, w\}$ δύο φορές. Μία στον όρο $\delta(v)$ και μία στον $\delta(w)$.

$\square$

Πόρ. Το άθροισμα των βαθμών είναι άρτιος αριθμός.

Κορυφές περιττού βαθμού

Θεώρ. Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ #(κορυφών περιττού βαθμού) = άρτιος.

Απόδ.

$$\sum_{k \in V} \delta(k) = 2 \cdot |E| = \text{άρτιος} \quad = \sum_{k:\ \delta(k)\ \text{άρτ.}} \delta(k) + \sum_{k:\ \delta(k)\ \text{περ.}} \delta(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k:\ \delta(k)\ \text{περ.}} \delta(k) = \text{άρτιος}.$$

Επομένως

$$\sum_{k:\ \delta(k)\ \text{περιττός}} \delta(k) = \sum_{k:\ \delta(k)\ \text{περιττός}} (2d_k + 1) \Rightarrow \sum_{k:\ \delta(k)\ \text{περ.}} 1 = \text{άρτιος}.$$

$\square$

Πρόβλημα

Αποδείξτε πως σε μια ομάδα 51 ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος που γνωρίζει έναν άρτιο αριθμό μελών της ομάδας.

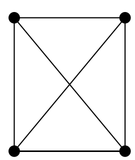
Γενικότερα σε μια ομάδα με περιττό αριθμό ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος που γνωρίζει έναν άρτιο αριθμό μελών της ομάδας.

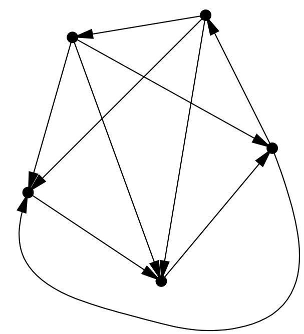
Κατασκεύασε το μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου οι κορυφές αντιστοιχούν στα άτομα. Η ακμή $\{x, y\}$ δηλώνει πως ο x και ο y γνωρίζονται.

Από το Θεώρημα ο αριθμός των ατόμων με περιττό βαθμό (= αριθμό γνωριμιών) είναι άρτιος. Επομένως ο αριθμός των ατόμων με άρτιο βαθμό είναι περιττός (και άρα ≥ 1.)

Πλήρες γράφημα

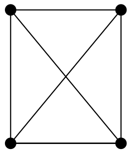
Ορ. (Μη) κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα K_n (ή κλίκα, **clique**) n κορυφών: $\forall$ ζεύγος διαφορετικών κορυφών u, v υπάρχει ακριβώς μία (ακμή) βέλος.

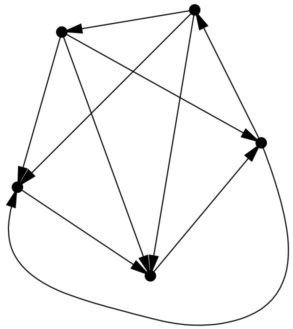




Άσκηση

Πόσες ακμές περιέχει μια μη κατευθυνόμενη κλίκα με n κορυφές;
Πόσες αν είναι κατευθυνόμενη;





Μονοπάτια

Ορ. Μονοπάτι (διαδρομή) είναι μια ακολουθία ακμών $e_1, e_2, \ldots e_k$ τέτοια ώστε:
τερματική κορυφή (e_i) = αρχική κορυφή $(e_{i+1}), \forall i < k$.

Αν υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή v στην κορυφή w γράφουμε $v \rightsquigarrow w$. (Σε μη κατευθ. γραφήματα $v \rightsquigarrow w \Leftrightarrow w \rightsquigarrow v$.)

Ορ. Απλό μονοπάτι αν κάθε ακμή, χρησιμοποιείται το πολύ μία φορά.

Ορ. Στοιχειώδες μονοπάτι αν κάθε κορυφή χρησιμοποιείται το πολύ μία φορά.

Μονοπάτια

Θεώρ. Σε (μη) κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, έστω κορυφές v_1, v_2 που συνδέονται με κάποιο μονοπάτι.
Τότε $\exists$ μονοπάτι $v_1 \rightsquigarrow v_2$, με $\leq n-1$ ακμές.

Απόδ. Αν $\geq n$ ακμές $\Rightarrow n+1$ κορυφές $\Rightarrow \exists v_k \geq 2$ φορές $\Rightarrow$ μονοπάτι (αναπαράσταση κορ.) $= (v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_k, \ldots, v_2) \Rightarrow$ μπορώ να αφαιρέσω τμήμα $(v_k, \ldots, v_k]$ μειώνοντας #ακμών.

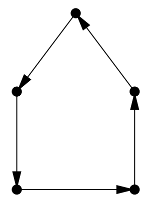
Συνεχίζω μέχρι # ακμών $< n$.

□

Κυκλώματα

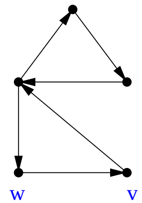
Ορ. Κύκλωμα είναι μονοπάτι με ίδια αρχική και τελική κορυφή
Απλό ή στοιχειώδες όπως στα μονοπάτια

Π.χ. Κύκλωμα στοιχειώδες (άρα και απλό):

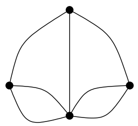


Κυκλώματα

Π.χ. Δύο κύκλωματα ($v \rightsquigarrow v$), ένα στοιχειώδες κι ένα απλό (και όχι στοιχειώδες). Ομοίως για μονοπάτια ($v \rightsquigarrow w$).



Π.χ. Στο πρόβλημα του **Königsberg** ζητάμε απλό κύκλωμα που να περνάει από όλες τις ακμές:



Συνεκτικότητα

Ορ. Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα αν $\forall$ 2 κορυφές $\exists$ μονοπάτι που τις συνδέει.

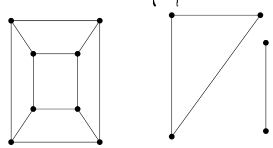
Κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα αν το μη κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει αν αγνοήσουμε τις κατευθύνσεις είναι συνεκτικό.

Ορ. Κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν $\forall$ ζεύγος κορυφών a, b : $a \rightsquigarrow b$, ΚΑΙ $b \rightsquigarrow a$.

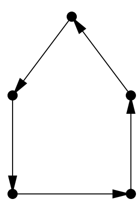
Ισχυρά συνεκτικό $\Rightarrow$ συνεκτικό.

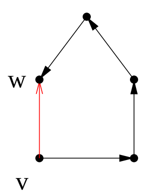
Παραδείγματα Συνεκτικότητας

συνεκτικό μη-συνεκτικό



ισχυρά συνεκτικό συνεκτικό, όχι ισχυρά συνεκτικό



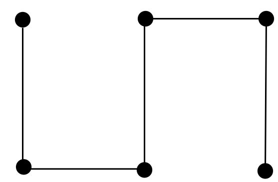


Μονοπάτια/κυκλώματα **Euler**

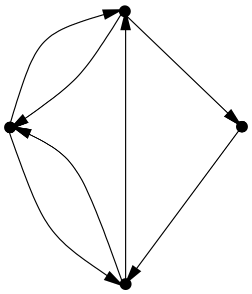
Ορ. Δίνεται γράφημα $G = (V, E)$. Μονοπάτι/κύκλωμα **Euler** είναι κάθε απλό μονοπάτι/κύκλωμα το οποίο διασχίζει όλες τις ακμές του E.

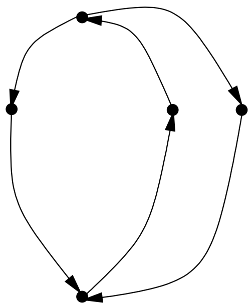
Δηλ. περνά από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά.

Π.χ. Μονοπάτι **Euler**:



Κυκλώματα **Euler**

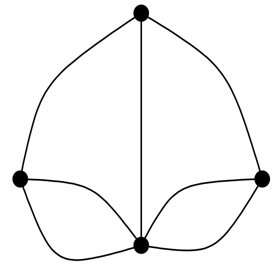




Στο αριστερό γράφημα υπάρχει κύκλωμα **Euler** ενώ στο δεξιό μόνο μονοπάτι **Euler.**

Κυκλώματα **Euler**

Στο πρόβλημα του **Königsberg** ο **Euler** απέδειξε πως τέτοιο κύκλωμα δεν μπορεί να υπάρχει.



Τελικά, ποιά γραφήματα έχουν κυκλώματα **Euler**;

Βαθμός (Υπενθύμιση)

Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.

Ορ. Βαθμός της κορυφής $v \in V$ είναι ο είναι # ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή. Συμβολίζεται με $\delta(v)$.

Θεώρ. Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ #(κορυφών περιττού βαθμού) $=$ άρτιος.

Ύπαρξη Κυκλώματος **Euler**

Θεώρ. Ένα μη κατευθυνόμενο, συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα **Euler** $\Longleftrightarrow$ κάθε κόμβος στο V έχει άρτιο βαθμό.

Απόδ. «$\Rightarrow$» Διατρέξτε το κύκλωμα **Euler** ξεκινώντας και τελειώνοντας σε μια κορυφή $s \in V$.

Για οποιαδήποτε κορυφή $v \neq s$, αν περάσετε k φορές από αυτήν, πρέπει να έχει βαθμό $2k$.

Από την s περνάμε $\lambda + 1$ φορές, για κάποιο $\lambda \geq 1$. Πρέπει να έχει βαθμό 2λ.

Πού χρειαστήκαμε τη συνεκτικότητα; $\square$

Ύπαρξη Κυκλώματος **Euler**

Απόδ. «⇐» Έστω G συνεκτικό γράφημα, όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό. Θεωρείστε το μεγαλύτερο δυνατό απλό μονοπάτι W στον G. Έστω $s \overset{W}{\rightsquigarrow} t$.

1. Επειδή το W δεν μπορεί να επεκταθεί περνάει από όλες τις ακμές που προσπίπτουν στο t. Όμως $\delta(t) =$ άρτιο, άρα $t = s$. Άρα το W κύκλωμα.

2. Έστω το W δεν είναι **Euler**. Θα υπάρχει ακμή $\{u, v\} \notin W$, με $v \in W$. Το μονοπάτι μας W σπάει ως εξής

$$s \overset{W}{\rightsquigarrow} s = s \overset{W_1}{\rightsquigarrow} v \overset{W_2}{\rightsquigarrow} s$$

Αλλά το μονοπάτι $u \to v \overset{W_2}{\rightsquigarrow} s \overset{W_1}{\rightsquigarrow} v$ είναι απλό και μεγαλύτερο από το W, άτοπο. □

Μονοπάτι **Euler**

Αποδεικνύεται τώρα πολύ εύκολα για συνεκτικό γράφημα G πως

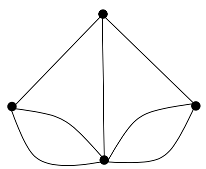
Αν ο G έχει ακριβώς δύο κόμβους v, w περιττού βαθμού ⇒ ο G έχει μονοπάτι **Euler** που ξεκινάει από το v και καταλήγει στον w.

Πρόσθεσε μια ακμή $e = \{v, w\}$. Όλοι οι βαθμοί είναι τώρα άρτιοι άρα υπάρχει κύκλωμα **Euler** W. Αφαίρεσε την ακμή e. Αυτό που μένει είναι μονοπάτι **Euler** που ξεκινάει από το v και καταλήγει στον w αφού διατρέξει όλες τις ακμές του G.

Το αντίστροφο «⇐» αποδεικνύεται ομοίως.

Παράδειγμα

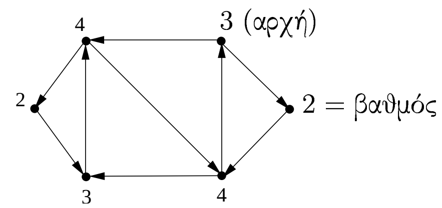
ΔΕΝ υπάρχει μονοπάτι **Euler** ⇐ #(κορ. περιττού βαθμού) = 4.



Παράδειγμα για Μονοπάτι **Euler**

Π.χ. Τα νούμερα είναι οι βαθμοί των κορυφών. Το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο, τα βέλη δηλώνουν μόνο την κατεύθυνση κίνησης κατά τη διέλευση μας.

Υπάρχει μονοπάτι και δεν υπάρχει κύκλωμα **Euler**.



Κατευθυνόμενα γραφήματα

Ορ. Εισερχόμενος βαθμός ($\delta^-(v)$) μιας κορυφής $v \in V$ είναι το πλήθος των εισερχομένων ακμών.

Ορ. Εξερχόμενος βαθμός ($\delta^+(v)$) μιας κορυφής $v \in V$ είναι το πλήθος των εξερχομένων ακμών.

Θεώρ. Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, έχει κύκλωμα **Euler** $\iff \delta^-(v) = \delta^+(v)$ για κάθε κορυφή $v \in V$.

Θεώρ. Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, έχει μονοπάτι **Euler** $\iff \delta^-(v) = \delta^+(v)$ για κάθε κορυφή v, εκτός από 2 κορυφές k_1, k_2 όπου, $\delta^+(k_1) = \delta^-(k_1) + 1$ και $\delta^+(k_2) = \delta^-(k_1) - 1$

Μονοπάτι **Hamilton**

Ορ. Μονοπάτι **Hamilton** είναι μονοπάτι που περνά από κάθε κορυφή ακριβώς μία φορά. Δηλαδή, περνά από κάθε κορυφή και είναι στοιχειώδες.

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει απλή ικανή και αναγκαία συνθήκη υπάρξης μονοπατιού **Hamilton**.

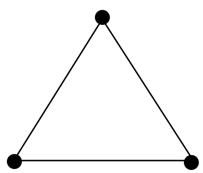
Δεν γνωρίζουμε αποδοτικό αλγόριθμο που να αποφασίζει αν ένα οποιοδήποτε γράφημα εισόδου έχει μονοπάτι **Hamilton**.

Γνωρίζουμε όμως πως παρά πολλά δύσκολα υπολογιστικά προβλήματα θα μπορούσαν να λυθούν αποδοτικά αν υπάρχει καλός αλγόριθμος για το μονοπάτι **Hamilton**.

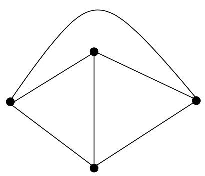
Βλ. **NP-completeness** στο μάθημα «Θεωρία Υπολογισμού»...

Άσκ. 5.28

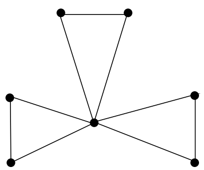
Π.χ. **Euler-Hamilton**



Π.χ. **Euler-Hamilton**



Π.χ. **Euler-Hamilton**



Π.χ. **Euler-Hamilton**