Διακριτή Πιθανότητα [**Liu**, ενότ.3.6-7]

Εισαγωγή

Η Θεωρία Πιθανοτήτων παίζει τεράστιο ρόλο στη μοντελοποίηση και μελέτη συστημάτων των οποίων δεν μπορούμε να προβλέψουμε ή να παρατηρήσουμε την ακριβή συμπεριφορά (π.χ. κίνηση σωματιδίων στη Φυσική, μακροοικονομικά μοντέλα κοκ.).

Στην Πληροφορική οι πιθανότητες έχουν πλήθος εφαρμογών. Π.χ. στη μελέτη της δομής του Διαδικτύου ή στην ανάλυση πιθανοτικών αλγορίθμων.

(Οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι είναι αλγόριθμοι που κάνουν κάποιες τυχαίες επιλογές κατά τη διάρκεια του υπολογισμού τους. Προσπαθούν έτσι να παρακάμψουν τη δυσκολία της εισόδου).

Έννοιες

Ορ. [Πείραμα]
σύνολο αποτελεσμάτων = δειγματικός χώρος. Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου ονομάζονται αποτελέσματα ή δείγματα.

Ορ. Ο δειγματικός χώρος είναι διακριτός αν είναι πεπερασμένος ή, γενικότερα, αριθμήσιμος.

Π.χ. Ρίψη νομίσματος $\Delta = \{\mathrm{K}, \Gamma\}$.

Π.χ. Ρίψη 2 διαφορετικών νομισμάτων $\Delta = \{\mathrm{KK}, \mathrm{K}\Gamma, \Gamma\mathrm{K}, \Gamma\Gamma\}$.

Π.χ. Πυροβολώ στόχο μέχρι εύστοχη βολή
$\Delta = \{\varepsilon, \alpha\varepsilon, \alpha\alpha\varepsilon, \alpha\alpha\alpha\varepsilon, \ldots\}$ αριθμήσιμο

Πιθανότητα

Ορ. Η **Πιθανότητα** είναι μια **συνάρτηση** $p : \Delta \to \mathbb{R} \cap [0,1]$ τ. ω.

1. $p(x_i) \geq 0, \quad \forall x_i \in \Delta$ και
2. $\sum_{x_i \in \Delta} p(x_i) = 1$.

Εκφράζει τη συχνότητα εμφάνισης αποτελέσματος:

- $p(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i$ δεν εμφανίζεται
- $p(x_i) = 1 \Leftrightarrow x_i$ εμφανίζεται πάντα

Διαισθητικά, όταν ένα αποτέλεσμα A έχει πιθανότητα 0.6 περιμένουμε ότι αν εκτελέσουμε το πείραμα «πάρα πολλές» (= άπειρες) φορές, το A θα συμβεί το 60% των φορών.

Παράδειγμα

Π.χ. Ρίψη 2 νομισμάτων. Υποθέτουμε πως σε κάθε ρίψη η πιθανότητα να έρθει ένα νόμισμα Κ ή Γ είναι 1/2, δηλ. τα νομίσματα είναι τέλεια.

Ο δειγματικός χώρος Δ = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}. Επειδή τα νομίσματα είναι τέλεια όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Επομένως

$$p(KK) = \frac{1}{4} = p(K\Gamma) = p(\Gamma K) = p(\Gamma\Gamma).$$

Γεγονός

Ορ. Γεγονός $\subseteq \Delta$: απλό αν $|\Gamma| = 1$, σύνθετο αν $|\Gamma| > 1$.

$$p(\Gamma) := \sum_{x \in \Gamma \subseteq \Delta} p(x).$$

Ένα γεγονός συμβαίνει κάθε φορά που εμφανίζεται κάποιο από τα δείγματα που περιλαμβάνονται σε αυτό το γεγονός.

Π.χ. Στη ρίψη ενός νομίσματος, το γεγονός $\{K\}$ συμβαίνει με πιθανότητα $1/2$. Το γεγονός $\{K, \Gamma\}$ συμβαίνει με πιθανότητα 1.

Π.χ. ρίχνουμε ένα ζάρι. Ο δειγματικός χώρος έχει 6 στοιχεία. Τα δυνατά γεγονότα που μπορούμε να ορίσουμε είναι 2^6, όσα και τα δυνατά υποσύνολα του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα

[**Liu** 3.24] 23 άτομα, κατανομή των γενεθλίων τους σε μία από τις 366 δυνατές ημερομηνίες: $|\Delta| = 366^{23}$ δείγματα, τα υποθέτουμε ισοπίθανα.

- Πόσα από τα στοιχεία του δειγματικού χώρου αντιστοιχούν σε κατανομές γενεθλίων στις οποίες και τα 23 ατόμα έχουν διαφορετικές ημερομηνίες γέννησης;

$$P(366, 23) = \frac{366!}{(366-23)!}$$

- Ορίζουμε τώρα το γεγονός Γ : δεν υπάρχουν δύο άτομα με τα ίδια γενέθλια. Το γεγονός αποτελείται από τα παραπάνω $P(366, 23)$ στοιχεία του δειγματικού χώρου.

$p(\Gamma) = \sum_{x\in\Gamma} p(x) = \sum_{x\in\Gamma} \frac{1}{|\Delta|} = P(366, 23)/366^{23} = 0,494.$

Πράξεις γεγονότων

Τα γεγονότα είναι εξ ορισμού σύνολα. Όταν λέμε πως δύο γεγονότα A, B συμβαίνουν μαζί εννοούμε πως εμφανίζεται στοιχείο του δειγματικού χώρου που ανήκει στην τομή $A \cap B$. Γενικότερα:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{γεγονότα} & \longrightarrow & \text{σύνολα} \\
A \,\&\, B & & A \cap B \subseteq \Delta \\
A \vee B & & A \cup B \\
A \,\&\, \neg B & & A - B \\
A \underline{\vee} B & & A \oplus B
\end{array}
$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Δύο γεγονότα A, B λέγονται αλληλοαποκλειόμενα (ασυμβίβαστα) όταν $A \cap B = \emptyset$.

Θεώρ. Για αλληλοαποκλειόμενα (ασυμβίβαστα) γεγονότα A, B

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Για οποιαδήποτε γεγονότα A, B,
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Θεώρ. [Συμπλήρωμα] Γεγονός $\overline{A} = \Delta - A \Rightarrow p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Παράδειγμα 3.28

1000 άτομα = 515 γυναίκες + 485 άνδρες.
90 γυναίκες φίλαθλοι, 302 άνδρες φίλαθλοι.

Πείραμα := τυχαία επιλογή ατόμου $\Rightarrow |\Delta| = 1000$.

$$p(\gamma\varphi) = \frac{90}{1000}, p(\gamma\mu) = \frac{425}{1000}, p(\alpha\varphi) = \frac{302}{1000}, p(\alpha\mu) = \frac{183}{1000}.$$

Επιλογή φιλάθλου	Επιλογή γυναίκας
$\Phi := \{\gamma\varphi, \alpha\varphi\}$	$\Gamma := \{\gamma\varphi, \gamma\mu\}$
$p(\Phi) = 392/1000$	$p(\Gamma) = 515/1000$

$\Phi \cap \Gamma =$ φίλαθλη γυναίκα $\Rightarrow p = 90\,{}^0\!/_{00} \neq p(\Phi) \cdot p(\Gamma) = 204\,{}^0\!/_{00}$.

Συνεχίζεται ....

Παράδειγμα 3.28

Συνέχεια ...

- $\Phi \cup \Gamma =$ φίλαθλος ή γυναίκα $\Rightarrow p = 1 - p(\text{αμ}) = 817\,{}^{0}/_{00}$.

$\{\text{γφ, αφ, γμ}\} = \{\text{αφ}\} \cup \Gamma :$ ξένα $\Rightarrow p = p(\Gamma) + p(\text{αφ}) = \frac{515+302}{1000}$.

$p(\Phi \cup \Gamma) = p(\Phi) + p(\Gamma) - p(\Phi \cap \Gamma) = (392 + 515 - 90)/1000.$

- $\Phi \oplus A = \{\text{αμ, γφ}\}$: ασυμβίβαστα.

δηλ. $p(\text{αμ}) + p(\text{γφ}) = \frac{90+183}{1000} = 273\,{}^{0}/_{00}$.

$p(\Phi \oplus \mathrm{A}) = 1 - p(\text{γμ ή αφ}) = 1 - \frac{425+302}{1000} = 1 - \frac{727}{1000} = 273\,{}^{0}/_{00}$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ορ. Γεγονότα Α, Β $\subseteq$ δειγματικού χώρου Δ.
Δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β: $p(A|B)$.

Π.χ. Ρίψη 2 νομισμάτων, $p(KK) = \frac{1}{4}$.

- Αν ξέρω ότι το 1^o είναι Κ, τότε $p(KK|K) = \frac{1}{2}$.
- Αν ξέρω ότι το 1^o είναι Γ, τότε $p(KK|\Gamma) = 0$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα (2)

Π.χ. $p(\varphi) = p(\alpha\varphi, \gamma\varphi) = 392\,{}^0/_{00}, p(\gamma) = 515\,{}^0/_{00}$.

Αν μας δίνεται το φύλο, με τι πιθανότητα είναι φίλαθλος;

- Αν γυναίκα $p(\varphi|\gamma) = p(\gamma\varphi|\gamma) = \frac{90}{515} < 392\,{}^0/_{00}$
- Αν άντρας $p(\varphi|\alpha) = p(\alpha\varphi|\alpha) = \frac{302}{485} > 392\,{}^0/_{00}$

Αν μας δίνεται η φίλαθλη ιδιότητα, με τι πιθανότητα είναι γυναίκα; $\frac{90}{392} = p(\gamma\varphi|\varphi) = p(\gamma|\phi) < p(\alpha|\varphi) = \frac{302}{392}$,
αν και $p(\gamma) > p(\alpha)$.

Με τη δεσμευμένη πιθανότητα, αλλάζει ο δειγματικός χώρος.

Ορισμός – Υπολογισμός

Ορισμός για στοιχείο $x \in \Delta$:

- Αν $x \notin B$ τότε $p(x|B) := 0$.
- Αν $x \in B$ τότε $p(x|B) := p(x)/p(B)$.

Πόρ. Έστω $B \subset \Delta$ με $p(B) < 1$. Τότε $p(x|B) > p(x), \forall x \in B$.

Η συνάρτηση $p(x|B)$ είναι μια νέα πιθανότητα διότι ≥ 0 και

$$\sum_{x \in \Delta} p(x|B) = \sum_{x \in B} \frac{p(x)}{p(B)} = 1.$$

Ορισμός – Υπολογισμός

Ορισμός για στοιχείο $x \in \Delta$:

- Αν $x \notin B$ τότε $p(x|B) := 0$.
- Αν $x \in B$ τότε $p(x|B) := p(x)/p(B)$.

Πόρ. Έστω $B \subset \Delta$ με $p(B) < 1$. Τότε $p(x|B) > p(x), \forall x \in B$.

Η συνάρτηση $p(x|B)$ είναι μια νέα πιθανότητα διότι ≥ 0 και

$$\sum_{x\in\Delta} p(x|B) = \sum_{x\in B} \frac{p(x)}{p(B)} = 1.$$

Για γεγονός Α,

$$p(A|B) = \sum_{x\in A\cap B} p(x|B) = \sum_{x\in A\cap B} p(x)/p(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}.$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα: π.χ.

Π.χ. 3 ζάρια στη σειρά. Όλες οι ζαριές είναι 6^3.
$A : \exists$ άσος, $B : \nexists$ 2 ίδιες όψεις.

1. $p(B) = P(6,3)/6^3 = 5/9 : P(6,3)$ τριάδες σε 6 κουτιά
2. $p(A \cap B) = 3 \cdot P(5,2)/6^3$.

1, 2 $\Rightarrow p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{3 \cdot 5!/3!}{6!/3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{5^3}{6^3}$.

2, 3 $\Rightarrow p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{3 \cdot P(5,2)/6^3}{(6^3 - 5^3)/6^3} = \frac{3(5 \cdot 4)}{216 - 125} = \frac{60}{91}$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα: πόρισμα

$$p(A|B) \neq p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$

εφόσον

$$p(A) \neq p(B)$$

Ανεξάρτητα Γεγονότα

Λήμμ. Αν $p(A), p(B) > 0$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
1. $p(A) = p(A|B) = p(A \cap B)/P(B)$.
2. $p(A)p(B) = p(A \cap B)$.
3. $p(B) = p(B|A)$.

Ορ. Γεγονότα A και B με $p(A), p(B) > 0$ ανεξάρτητα αν $p(A) = p(A|B)$ ή ισοδύναμα $p(B) = p(B|A)$.

Θεώρ. Γεγονότα A και B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow p(A)p(B) = p(A \cap B)$.

Ανεξάρτητα Γεγονότα - Παράδειγμα

Ορ. Γεγονότα A και B με $p(A), p(B) > 0$ ανεξάρτητα αν $p(A) = p(A|B)$ ή ισοδύναμα $p(B) = p(B|A)$.

Θεώρ. Γεγονότα A και B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow p(A)p(B) = p(A \cap B)$.

Π.χ. Ρίψη 2 νομισμάτων σε σειρά

- $p(KK) = \frac{1}{4}$
- $p(KK|1^o K) = \frac{1}{2} > p(KK)$: KK και $1^o K$ εξαρτημένα.
- $p(2^o K|1^o K) = \frac{1}{2} = p(2^o K) \Leftrightarrow 1^o, 2^o$ ανεξάρτητα.

Ανεξάρτητα Γεγονότα (2)

Γεγονότα A και B με $p(A), p(B) > 0$.

ΟΡ. A, B Ασυμβίβαστα/Ξένα αν $A \cap B = \emptyset$

ΛΗ. A, B Ξένα $\Rightarrow p(A \cap B) = 0 \neq p(A)p(B) \Rightarrow$ Εξαρτημένα.

ΠΟΡ. Ανεξάρτητα **&** Ασυμβίβαστα/Ξένα : ΑΔΥΝΑΤΟ.

	$A \cap B = \emptyset$	$A \cap B \neq \emptyset$
A, B ανεξάρτητα	**X**	$\surd$
A, B εξαρτημένα	$\surd$	$\surd$

X: αδύνατο $\surd$: δυνατό, αλλά όχι υποχρεωτικό.

Ανεξάρτητα Γεγονότα (3)

Π.χ. 2 νομίσματα με σειρά.
A: 1^oΚ, B: Διαφορετικά αποτελέσματα.

Είναι ανεξάρτητα; ΝΑΙ, γιατί

- $p(A|B) = \frac{1}{2} = p(A)$
- $p(B|A) = \frac{1}{2} = p(B) = \frac{\#\{\text{ΚΓ, ΓΚ}\}}{\#\{\text{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}\}}$

Πώς προκύπτουν τα παραπάνω νούμερα;

Τύπος **Bayes**

- Για οποιαδήποτε δύο γεγονότα E και F ισχύει:
  $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$
- Τα $(E \cap F)$ και $(E \cap \overline{F})$ είναι αλληλοαποκλειόμενα $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
p(E) &= p(E \cap F) + p(E \cap \overline{F}) \\
&= p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F}) \\
&= p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})\left[1 - p(F)\right]
\end{aligned}
$$

Τύπος **Bayes(2)**

Π.χ. Τίθεται Ερώτηση. Πολλαπλή επιλογή: m απαντήσεις.
$\Gamma :=$ {Ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση}, με πιθανότητα $= p$.
Αλλιώς, τυχαία απάντηση με πιθανότητα $= 1 - p$.
$\Sigma :=$ {επιλογή σωστής}.

$$p(\Gamma|\Sigma) = \frac{p(\Gamma \cap \Sigma)}{p(\Sigma)} = \frac{p(\Sigma|\Gamma)p(\Gamma)}{p(\Sigma|\Gamma)p(\Gamma) + p(\Sigma|\overline{\Gamma})\left[1 - p(\Gamma)\right]}$$

$$= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{mp}{mp + 1 - p} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$

$$m = 5, p = \frac{1}{2} \Rightarrow p(\Gamma|\Sigma) = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{4}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

Τύπος **Bayes (3)**

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})\left[1 - p(F)\right]}$$

Γενικά

$$F_1 \cup \cdots \cup F_n = \Delta, F_i \cap F_j = \emptyset \Rightarrow$$

$$p(F_i|E) = \frac{p(E|F_i)p(F_i)}{\sum_{i=1,\ldots,n} p(E|F_i)p(F_i)}$$

άσκηση 3.66

Σε μια βδομάδα, κάθε μέρα, 30% πιθανότητα βροχής.

α) $P[\exists$ βροχερή$] = 1 - P[\nexists$ β$] = 1 - (0,7)^7$.

β)

$$P[\exists\, 2 \text{ βροχερές} \mid \exists \beta] =$$
$$1 - P[\exists \text{ ακριβώς } 6 \text{ μέρες ανομβρίας} \mid \exists \beta] =$$
$$= 1 - \frac{7(0,7)^6(0,3)}{P[\exists \text{ β }]}.$$