

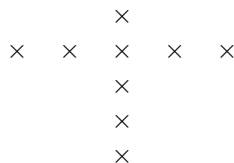
# Διακριτά Μαθηματικά

## Ασκήσεις Φροντιστηρίου

Εαρινό Εξάμηνο 2009

Κάτια Παπακωνσταντινοπούλου

1. Έστω  $A$  ένα μη κενό σύνολο. Να δείξετε ότι η αλγεβρική δομή  $(\mathcal{P}(A), \oplus)$  είναι αβελιανή ομάδα.
2. Έστω ένα ξενοδοχείο με απείρως αριθμήσιμο πλήθος δωματίων που είναι όλα κατειλημμένα. Σε κάθε δωμάτιο μένει μόνο ένα άτομο. Επιτρέπονται οι μετακινήσεις.  
Μπορούν να εξυπηρετηθούν:
  - α. ένας νέος πελάτης;
  - β. απείρως αριθμήσιμοι νέοι πελάτες;
  - γ. απείρως αριθμήσιμα γκρουπ από απείρως αριθμήσιμους νέους πελάτες;
3. Να δείξετε ότι το δυναμοσύνολο του  $\mathbb{N}$  δεν είναι αριθμήσιμο.
4. Να δείξετε ότι το σύνολο των θετικών ρητών  $\mathbb{Q}^+$  είναι αριθμήσιμο.
5. Παρουσιάζουμε μια απόδειξη της πρότασης “Οποιοσδήποτε  $n$  μπάλες του μπιλιάρδου έχουν το ίδιο χρώμα” με επαγωγή.  
Βάση της επαγωγής: για  $n = 1$ , τετριμμένα αληθής  
Επαγωγικό βήμα: έστω  $k + 1$  αριθμημένες μπάλες. Οι  $1, 2, \dots, k$  έχουν το ίδιο χρώμα. Ομοίως και οι  $2, 3, \dots, (k + 1)$ . Άρα όλες έχουν το ίδιο χρώμα.  
Ποιο είναι το λάθος στην απόδειξη;
6. Μια χώρα κατοικείται μόνο από ανθρώπους που είτε λένε πάντα αλήθεια, ή πάντα ψέματα και απαντούν σε ερωτήσεις μόνο με ένα ‘ναι’ ή ένα ‘όχι’.  
Ένας τουρίστας φτάνει σε μια διακλάδωση του δρόμου που μόνο το ένα παρακλάδι της οδηγεί στην πρωτεύουσα. Δεν υπάρχει πινακίδα που να υποδεικνύει ποιο παρακλάδι να ακολουθήσει, αλλά υπάρχει ένας κάτοικος, ο κύριος  $Z$ , ο οποίος στέκεται στη διακλάδωση.  
Ποια ερώτηση πρέπει να του κάνει ο τουρίστας για να αποφασίσει ποιο παρακλάδι πρέπει να ακολουθήσει;
7. Καρκινική λέγεται μια λέξη που διαβάζεται το ίδιο είτε κανονικά είτε ανάποδα. Πόσες καρκινικές λέξεις με 7 γράμματα είναι δυνατόν να φτιαχτούν με το ελληνικό αλφάβητο;
8.
  - α. Με πόσους τρόπους μπορεί να δημιουργηθεί το σχήμα



με 0 και 1;

β. Πόσα από αυτά τα σχήματα δεν είναι συμμετρικά ως προς τον κατακόρυφο άξονα;

**9.** Την παραμονή των Χριστουγέννων οι γονείς του Αλέξη, του Κώστα και του Δημήτρη πρέπει να μοιράσουν στα παιδιά τους 13 παιχνίδια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να κατανεύσουν τα παιχνίδια μεταξύ των παιδιών τους;

**10.** Κινούμαι σε ένα πλέγμα ακεραίων κάνοντας είτε ένα βήμα δεξιά ή ένα πάνω. Με πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορώ να φτάσω από το  $(0, 0)$  στο  $(10, 20)$ ;

**11.** Έχουμε  $n$  διακεκριμένα άτομα και τα βάζουμε να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι. Οι καρέκλες δεν είναι αριθμημένες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν;

**12.** Έστω ότι ο  $n$  είναι θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

**13.** Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$$

α. αλγεβρικά,

β. συνδυαστικά.

**14.** Στην τράπουλα έχουμε 52 φύλλα όπου κάθε φύλλο έχει χρώμα και τιμή. Υπάρχουν 4 χρώματα: μπαστούνια ( $\spadesuit$ ), κούπες ( $\heartsuit$ ), σπαθιά ( $\clubsuit$ ), καρώ ( $\diamondsuit$ ) και 13 τιμές: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (βαλές), Q (ντάμα), K (ρήγας), A (άσσος).

Στο παιχνίδι 'απλουστευμένο πόκερ' κάθε παίκτης σε κάθε μοιρασιά λαμβάνει 5 φύλλα.

Πόσες διαφορετικές μοιρασιές υπάρχουν όπου ένας παίκτης έχει

α. 4 φύλλα με ίδια τιμή και διαφορετικό χρώμα, μαζί με ένα οποιοδήποτε άλλο φύλλο;

β. 3 φύλλα με ίδια τιμή και 2 φύλλα μιας άλλης τιμής;

γ. 2 ζευγάρια (δηλαδή 2 φύλλα ίδιας τιμής, άλλα 2 φύλλα ίδιας τιμής και ένα 5ο φύλλο μιας άλλης τιμής);

**15.** Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 1.000.000 υπάρχουν, με ένα ακριβώς ψηφίο ίσο με 9 και άθροισμα ψηφίων ίσο με 13;

**16.** (Το πρόβλημα Monty Hall) Σε ένα τηλεπαιχνίδι ο παίκτης πρέπει να επιλέξει μία από τρεις πόρτες. Πίσω από τη μία πόρτα βρίσκεται ένα αυτοκίνητο ενώ πίσω από τις άλλες δύο βρίσκονται κασίκες. Μετά από

την επιλογή του παίκτη ο παρουσιαστής, ανεξάρτητα από την επιλογή του παίκτη, αποκαλύπτει με την ίδια πιθανότητα μια από τις δύο πόρτες που πίσω της υπάρχει μια κατσίκα. Είναι προς το συμφέρον του παίκτη να αλλάξει την αρχική επιλογή του;

**17.** Έχουμε 2 κουτιά με σφαίρες. Το κουτί  $I$  περιέχει 3 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες. Το κουτί  $II$  περιέχει 2 κόκκινες και 8 μπλε σφαίρες. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και αν φέρει κορώνα βγάζουμε μια σφαίρα από το κουτί  $I$ , αλλιώς από το  $II$ . Ποια η πιθανότητα να βγάλουμε κόκκινη σφαίρα;

**18.** Το παιχνίδι με τα «περίεργα ζάρια» παίζεται με τα τρία περίεργα αριθμημένα ζάρια (A,B,Γ). Το A έχει τις τιμές 2, 6 και 7, το B τις τιμές 1, 5 και 9 και το Γ τις τιμές 3, 4 και 8. Ο παίκτης που αρχίζει επιλέγει ένα ζάρι και το ρίχνει και ο επόμενος επιλέγει ένα από τα υπόλοιπα ζάρια και το ρίχνει. Κερδίζει ο παίκτης που το ζάρι του θα δείξει το μεγαλύτερο αριθμό. Ποιο ζάρι πρέπει να επιλέξουμε ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα νίκης;

**19.** Έχουμε δύο νομίσματα, το κανονικό που με πιθανότητα  $\frac{1}{2}$  φέρνει κορώνα και με πιθανότητα  $\frac{1}{2}$  φέρνει γράμματα και το «πειραγμένο» που πάντα φέρνει κορώνα. Επιλέγουμε ένα νόμισμα τυχαία και το στρίβουμε. Αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το κανονικό νόμισμα;

**20.** Μια λεοπάρδαλη κατοικεί στη σπηλιά A με πιθανότητα  $\frac{1}{2}$ , στη σπηλιά B με πιθανότητα  $\frac{1}{4}$  και στη σπηλιά Γ με πιθανότητα  $\frac{1}{4}$ . Ένα κουνέλι μπαίνει σε κάποια από τις δύο σπηλιές που δεν κατοικούνται με ίση πιθανότητα. Το κουνέλι αφήνει ίχνη μπροστά από τη σπηλιά που μπήκε με πιθανότητα  $\frac{1}{3}$ , ενώ οι λεοπαρδάλεις δεν αφήνουν ποτέ ίχνη. Ποιά είναι η πιθανότητα να κατοικεί η λεοπαρδαλη στη σπηλιά Γ δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ίχνη μπροστά από τη σπηλιά B;

**21.** Έχουμε  $n$  διακεκριμένα άτομα και τα βάζουμε να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι με  $n$  καρέκλες. Οι καρέκλες δεν είναι αριθμημένες.

Έστω πως δύο συγκεκριμένα άτομα από τα  $n$  είναι **τσακωμένα** μεταξύ τους και δεν πρέπει να καθίσουν σε διπλανές θέσεις.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα  $n$  άτομα;

**22.** Έχουμε  $n$  διακεκριμένα άτομα και τα βάζουμε να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι με  $n$  καρέκλες. Οι καρέκλες δεν είναι αριθμημένες.

Έστω πως δύο συγκεκριμένα άτομα από τα  $n$  πρέπει να καθίσουν σε **διπλανές θέσεις**.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα  $n$  άτομα;

**23.** Δίνεται ένα σύνολο με  $n$  στοιχεία. Πόσα διακεκριμένα υποσύνολα 5 στοιχείων μπορώ να φτιάξω;

**24.** Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α.  $\{\{\{\}\}\} \subseteq \{\{\}\}$

β.  $\{\{\{\}\}\} \cap \{\{\}\} = \{\}$

**25.** Μια ποδοσφαιρική ομάδα ξεκινάει τους αγώνες της με πιθανότητα νίκης  $\frac{1}{2}$ . Στη συνέχεια μετά από κάθε νίκη η πιθανότητα να κερδίσει έναν αγώνα είναι  $\frac{2}{3}$ , ενώ μετά από κάθε ήττα η πιθανότητα να κερδίσει είναι  $\frac{1}{3}$ . Η ομάδα πρόκειται να παίξει σε ένα τουρνουά 3 αγώνων όπου τελικός νικητής είναι αυτός που θα σημειώσει 2 νίκες.

Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα το τουρνουά, αν ξέρουμε ότι κέρδισε τον πρώτο αγώνα;

**26.** Έστω  $f, g, h$  θετικές συναρτήσεις. Αποφασίστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- α.  $f(n) = \Omega(g(n)) \implies g(n) = O(f(n))$
- β.  $f(n) = \omega(g(n)) \implies f(n) = \Omega(g(n))$
- γ.  $f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(h(n)) \implies g(n) = \Theta(h(n))$
- δ.  $f(n) + g(n) = \Theta(\min(g(n), f(n)))$
- ε.  $f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = \Omega(f(n)) \implies f(n) = \Theta(g(n))$

**27.** Έστω  $a > 1$  και  $f(n) = O(\log_a(n))$ . Δείξτε ότι  $f(n) = O(\log n)$ .

**28.** Δείξτε ότι  $\log(n!) = O(n \log n)$ .

**29.** Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- α.  $2^{n+1} = O(2^n)$
- β.  $2^{2n} = O(2^n)$

**30.** Να δείξετε ότι:

- α.  $100n^2 = O(n^2)$
- β.  $n^2 + 100n + 10 = O(n^2)$

**31.** Δείξτε ότι για πραγματικούς αριθμούς  $n, a$  και μη αρνητικό ακέραιο  $b$  ισχύει  $(n + a)^b = \Theta(n^b)$ .

**32.** Ποιές σχέσεις ( $O, \Omega, \Theta, o, \omega$ ) συνδέουν τις συναρτήσεις  $2^n$  και  $2^{2n}$ ; Ποια είναι η πιο ακριβής;

**33.** Έστω οι φοιτητές  $A, B, C, D, E$  που πρέπει να εξεταστούν στα μαθήματα  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ .

Οι φοιτητές παρακολουθούν τα μαθήματα ως εξής:  $C_1 = \{A, B, D\}$ ,  $C_2 = \{C, D, E\}$ ,  $C_3 = \{A, B, E\}$ ,  $C_4 = \{B, C, E\}$ ,  $C_5 = \{A, D\}$ ,  $C_6 = \{B, D, E\}$ .

Κάθε φοιτητής απαγορεύεται να εξεταστεί σε περισσότερα του ενός μαθήματα σε μία μέρα.

Πιο είναι το ελάχιστο πλήθος ημερών που απαιτούνται για να ολοκληρωθούν οι εξετάσεις;

**34.** Ένας άνθρωπος πρέπει να μεταφέρει από τη μία όχθη ενός ποταμού στην άλλη ένα σκύλο, ένα πρόβατο και ένα λάχανο, με μία βάρκα που χωράει το πολύ ένα από τα παραπάνω σε κάθε πλευρά.

Δε μπορεί να αφήσει το σκύλο με το πρόβατο ή το πρόβατο με το λάχανο χωρίς να είναι ο ίδιος παρών.

Μοντελοποιήστε τις δυνατές καταστάσεις και τις μεταβάσεις μεταξύ τους με ένα γράφημα και βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να λύσει το πρόβλημά του ο άνθρωπος.

**35.** Δείξτε ότι σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  με  $|V| = n$  και  $|E| = m$ :

- α.  $\sum_{v \in V} \delta^+(v) = m$
- β.  $\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v)$

**36.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με  $k$  συνεκτικές συνιστώσες και  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ . Αποδείξτε ότι  $m \geq n - k$ .

**37.** Έστω  $G$  ένας μη κατευθυνόμενος γράφος. Δείξτε ότι από κάθε περιττού βαθμού κόμβο του υπάρχει ένα μονοπάτι προς κάποιο άλλο περιττού βαθμού κόμβο του.

**38.** Το συμπλήρωμα ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G = (V, E)$  είναι ένα γράφημα  $G^C = (V, E^C)$  που αποτελείται από τους κόμβους του  $G$  και τις ακμές που δεν υπάρχουν στο  $G$ .

α. Έστω το γράφημα  $H = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{\{A, F\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}\})$ . Βρείτε τις συνεκτικές συνιστώσες του.

β. Έστω το γράφημα  $J = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{C, D\}\})$ . Βρείτε το συμπλήρωμά του.

γ. Δείξτε ότι:

(α') αν το  $G$  είναι μη συνεκτικό, τότε το  $G^C$  είναι συνεκτικό,

(β') αν το  $G^C$  είναι συνεκτικό, το  $G$  δεν είναι απαραίτητα μη συνεκτικό.

**39.** Δείξτε ότι ένα κανονικό δυαδικό δέντρο έχει περιττό πλήθος κορυφών.