Πανεπιστημιο Αθηνων, Θεωρια Γραφηματων
Πρωτο σετ ασκησεων, χειμερινο εξαμηνο 2016-17
Δημοσιευση: 13.10.2016, Παραδοση: μεχρι την εναρξη του μαθηματος στις 20.10.2016

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Μπορείτε να δουλέψετε ατομικά ή σε ομάδες των δύο. Οι ασκήσεις παραδίδονται σε έντυπη μορφή.

Πρόβλημα 0 [2 μονάδες]. Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ορίζουμε για $X \subseteq V$,

$$\partial(X) = \{e \in E \mid |e \cap X| = 1\}.$$

Δείξτε ότι για κάθε X, $|\partial(X)| = \sum_{v \in X} d(v) - 2|E(G[X])|$.

Πρόβλημα 1 [3 μονάδες]. Δίνονται ακέραιοι $d_1, \dots, d_n$, τ.ω. $0 < d_1 \leq \dots \leq d_n$. Δείξτε ότι υπάρχει δέντρο με n κορυφές και βαθμούς $d_1, \dots, d_n$, αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Πρόβλημα 2 [6 μονάδες]. Έστω $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ μια οικογένεια n διακεκριμένων υποσυνόλων ενός συνόλου S με $|S| = n$. Ορίζουμε γράφημα $G_{\mathcal{A}}$ με κορυφές τα σύνολα $A_1, \dots, A_n$ και αναθέτουμε ετικέτες στις ακμές. Το A_i ενώνεται με το A_j $(i \neq j)$ με ακμή με ετικέτα x αν $A_i = A_j \cup \{x\}$ ή $A_j = A_i \cup \{x\}$. Ονομάζουμε $L(G)$ το σύνολο των ετικετών στις ακμές ενός γραφήματος G. Προφανώς, $L(G_{\mathcal{A}}) \subseteq S$.

1. Δείξτε ότι κάθε ετικέτα που βρίσκεται σε έναν κύκλο C του $G_{\mathcal{A}}$ εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές πάνω στον C.
2. Δείξτε ότι υπάρχει υπογράφημα F του $G_{\mathcal{A}}$ που είναι δάσος και για το οποίο $L(F) = L(G_{\mathcal{A}})$.
3. Δείξτε ότι υπάρχει $S' \subset S$, $|S'| \leq n - 1$, τ.ω. τα σύνολα $A_i \cap S'$ παραμένουν διακεκριμένα. Με άλλα λόγια, η «προβολή» του $\mathcal{A}$ στα στοιχεία του S' αρκεί για να διακρίνουμε τα σύνολα μεταξύ τους.

Αποδείξαμε το εξής πολύ ενδιαφέρον: αν έχουμε n 0-1 διανύσματα με n συντεταγμένες (δηλ. διανύσματα από το $\{0, 1\}^n$), υπάρχει ένα σύνολο $n - 1$ συντεταγμένων έτσι ώστε η προβολή των διανυσμάτων σε αυτές να αρκεί για να τα διακρίνουμε μεταξύ τους. Μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο με $n - 2$ συντεταγμένες;

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. *Υποδέντρο* ενός δέντρου ονομάζεται ένα συνεκτικό υπογράφημα του. Δείξτε ότι αν $G_1, \dots, G_k$ είναι μια συλλογή υποδέντρων του δέντρου G με την ιδιότητα ότι για κάθε $i, j \in \{1, \dots, k\}$ με $i \neq j$ $V(G_i) \cap V(G_j) \neq \varnothing$, τότε $\bigcap_{i=1}^{k} V(G_i) \neq \varnothing$.
Υπόδειξη: επαγωγή στο πλήθος n των κορυφών του G.

Πρόβλημα 4 [4 μονάδες]. Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Θεωρήστε δύο υπογραφήματα I, J του G με τις εξής τρεις ιδιότητες. (i) $V(I) = V(J) = V$. (ii) Τα I και J είναι άκυκλα. (iii) $|E(J)| = |E(I)| + 1$. Οι ιδιότητες (i) και (ii) δηλώνουν απλά ότι τα I, J είναι *επικαλύπτοντα δάση* του G.

Δείξτε ότι υπάρχει ακμή $e \in E(J) \setminus E(I)$ τ.ω. το γράφημα $I \cup \{e\}$, δηλ. το $(V, E(I) \cup \{e\})$, είναι άκυκλο.

Πρόβλημα 5 [4 μονάδες]. Δοθέντος $G = (V, E)$ το *γραμμικό γράφημα* $L(G)$ του G ορίζεται ως $L(G) = (E, J)$, όπου $J = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E,\ e \neq e',\ e \cap e' \neq \varnothing\}$.

Δείξτε ότι για οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα G, το $L(G)$ είναι ισόμορφο με το G αν και μόνο αν το G είναι κύκλος.