Πανεπιστημιο Αθηνων, Θεωρια Γραφηματων
Δευτερο σετ ασκησεων, χειμερινο εξαμηνο 2016-17
Δημοσιευση: 03.11.2016, Παραδοση: μεχρι την εναρξη του μαθηματος στις 10.11.2016

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Μπορείτε να δουλέψετε ατομικά ή σε ομάδες των δύο. Οι ασκήσεις παραδίδονται σε έντυπη μορφή. **Το άριστα για τους προπτυχιακούς φοιτητές είναι το 16 και για τους μεταπτυχιακούς το 22.**

Πρόβλημα 1 [2 μονάδες]. Δείξτε ότι αν το G είναι κυβικό (δηλ. 3-κανονικό), τότε $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

Πρόβλημα 2 [2 μονάδες]. Δίνονται δύο διακεκριμένες τομές A, B ενός γραφήματος G. Αποδείξτε ότι η συμμετρική τους διαφορά $A \triangle B$ είναι επίσης τομή του G. *Συμμετρική διαφορά* δύο συνόλων είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα δύο σύνολα.

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. Έστω $k \geq 2$. Δείξτε ότι σε ένα k-συνεκτικό γράφημα οποιεσδήποτε k κορυφές βρίσκονται πάνω σε κύκλο.

Πρόβλημα 4 [4 μονάδες]. Δίνεται γράφημα G και έστω δύο ακμές του $E(G)$ οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικά μπλοκ του G. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει δεσμός που να περιέχει και τις δύο.

Πρόβλημα 5 [4 μονάδες]. Αποδείξτε ότι ένα ελαχιστικό κάλυμα ακμών (δηλ. ελαχιστικό σύνολο ακμών που καλύπτει όλες τις κορυφές) είναι ελάχιστο αν και μόνο αν περιέχει ένα μέγιστο ταίριασμα.

Πρόβλημα 6 [6 μονάδες]. Ένα γράφημα G λέγεται *ελαχιστικό ατελές* αν για κάθε $v \in V(G)$ το $G - v$ έχει τέλειο ταίριασμα.
(α) [2 μονάδες] Δείξτε ότι ενα διμερές γράφημα δεν μπορεί να είναι ελαχιστικό ατελές.
(β) [4 μονάδες] Δείξτε ότι ένα γράφημα G είναι ελαχιστικό ατελές αν και μόνο αν $|G|$ περιττό και $q(G-S) \leq |S|$, για κάθε $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$.

Πρόβλημα 7 [6 μονάδες]. Άσκηση 3.15 από την τέταρτη έκδοση του Diestel. Δείτε εδώ.