

1.1 Εισαγωγικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1 Γράφημα G καλείται ένα ζεύγος $G = (V, E)$ όπου V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων) και E πολυσύνολο που αποτελείται από μη διατεταγμένα ζεύγη κορυφών. Τα στοιχεία του E καλούνται ακμές.

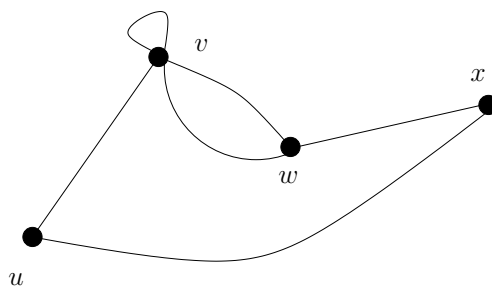
Για γράφημα G , $V(G)$ και $E(G)$ δηλώνουν τα σύνολα κορυφών και ακμών αντίστοιχα. Συνήθως χρησιμοποιούμε n και m για τις ποσότητες $|V(G)|$ και $|E(G)|$. Ο αριθμός των κορυφών καλείται επίσης τάξη του G και εναλλακτικά συμβολίζεται ως $|G|$.

Ο ορισμός που δώσαμε αντιστοιχεί στα μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Αν τα ζεύγη στο E είναι διατεταγμένα, το γράφημα καλείται κατευθυνόμενο. Στο εξής όταν αναφερόμαστε απλά σε «γράφημα» εννοούμε μη κατευθυνόμενο.

Βρόχος καλείται μια ακμή της μορφής $\{v, v\}$, $v \in V$. Πολλαπλή ακμή είναι μια ακμή που εμφανίζεται πολλές φορές στο πολυσύνολο E . Εάν το E είναι σύνολο και δεν περιέχει βρόχους, έχουμε ένα απλό γράφημα.

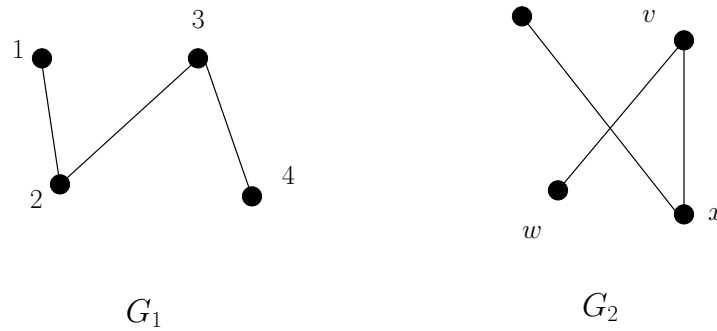
Ορισμός 1.2 Το $G = (V, E)$ καλείται απλό γράφημα αν το E δεν περιέχει βρόχους ή πολλαπλές ακμές.

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε γράφημα που δεν είναι απλό, θα το δηλώνουμε ρητά. Στο Σχήμα 1.1 δίνεται ένα παράδειγμα μη απλού γραφήματος.



Σχήμα 1.1: (Μη απλό) γράφημα $G = (V, E)$ με $|E(G)| = 6$.

Οι κορυφές u, v είναι τα άκρα της ακμής $\{u, v\}$. Δύο κορυφές u, v καλούνται γειτονικές στο γράφημα G αν $\{u, v\} \in E(G)$. τότε ο u είναι γείτονας του v . Η ακμή $e \in E(G)$ προσπίπτει στην $v \in V(G)$ αν $v \in e$. Η ακμή e προσπίπτει στην ακμή e' αν $e \cap e' \neq \emptyset$. Θα χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τον συμβολισμό uv για να δηλώσουμε την ακμή $\{u, v\}$.

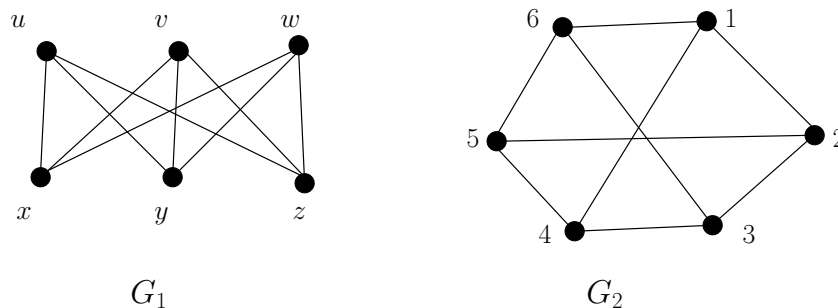


Σχήμα 1.2: Δύο ισόμορφα γραφήματα.

Εξετάστε τα γραφήματα G_1, G_2 στο Σχήμα 1.2. Είναι τα ίδια; Όχι! Είναι όμως ισόμορφα.

Ορισμός 1.3 Έστω γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$. Ισομορφισμός καλείται μια 1-1 και επί συνάρτηση $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ τ.ω. $\{u, v\} \in E_1$ αν και μόνο αν $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_2$. Αν υπάρχει ισομορφισμός, τα G_1, G_2 καλούνται ισόμορφα (ή ισομορφικά).

Ένα άλλο παράδειγμα ισόμορφων γραφημάτων δίνεται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Δύο ισόμορφα γραφήματα.

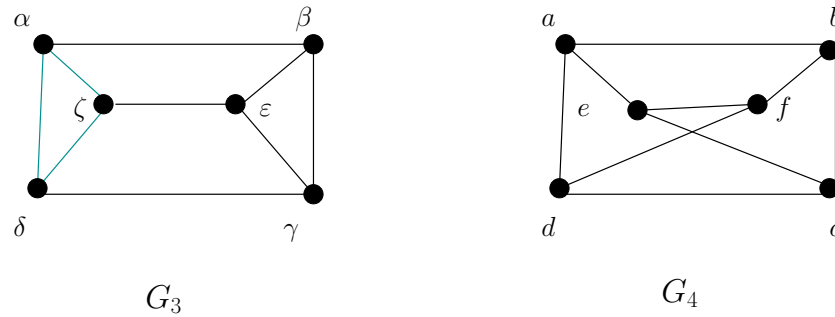
Ορισμός 1.4 Το συμπλήρωμα του γραφήματος G είναι το γράφημα $\overline{G} = (V(G), \overline{E(G)})$ όπου $e \in \overline{E(G)}$ αν και μόνο αν $e \notin E(G)$.

Άσκηση 1.1 Τα G και H είναι ισόμορφα αν και μόνο αν $\overline{G}$ και $\overline{H}$ ισόμορφα.

Ορισμός 1.5 Έστω $r \geq 2$, ακέραιος. $G = (V, E)$ καλείται r -μερής (r -partite) αν υπάρχει διαμέριση του V σε r κλάσεις και κάθε ακμή του E έχει τα άκρα της σε διαφορετικές κλάσεις.

Εξετάστε τα γραφήματα G_1, G_2 από το Σχήμα 1.3 και τα G_3, G_4 από το Σχήμα 1.4. Ποια από αυτά είναι ισόμορφα μεταξύ τους;

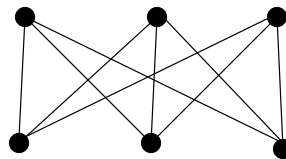
Παρατήρηση 1.1 Ο ισομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας.

Σχήμα 1.4: Είναι τα G_3, G_4 ισόμορφα;

1. Το G είναι ισόμορφο με τον εαυτό του.
2. Αν το G_1 είναι ισόμορφο με το G_2 , τότε το G_2 είναι ισόμορφο με το G_1 .
3. Αν το G_1 είναι ισόμορφο με το G_2 και το G_2 ισόμορφο με το G_3 , τότε το G_1 είναι ισόμορφο με το G_3 .

Ορισμός 1.6 Γράφημα χωρίς ετικέτες (unlabelled graph) καλείται μία κλάση ισοδυναμίας ισόμορφων γραφημάτων.

Στο Σχήμα 1.5 δίνεται ένα παράδειγμα απεικόνισης ενός γραφήματος χωρίς ετικέτες. Αναπαριστά την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκουν τα G_1, G_2 του Σχήματος 1.3.



Σχήμα 1.5: Γράφημα χωρίς ετικέτες.

1.2 Υπογραφήματα, Μονοπάτια, Συνεκτικότητα

Δοθέντων $G = (V, E)$ και $v \in V$, γειτονιά του v είναι το σύνολο των γειτόνων του v , το οποίο συμβολίζουμε με $N(v)$. Βαθμός του v είναι ο αριθμός $|N(v)|$ και τον συμβολίζουμε με $d(v)$ ή με $d_G(v)$ αν χρειάζεται να ξεκαθαρίσουμε σε ποιο γράφημα μετράμε το βαθμό.

Πρόταση 1.1 Σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Απόδειξη. Στο άθροισμα κάθε ακμή μετρείται δύο φορές. ■

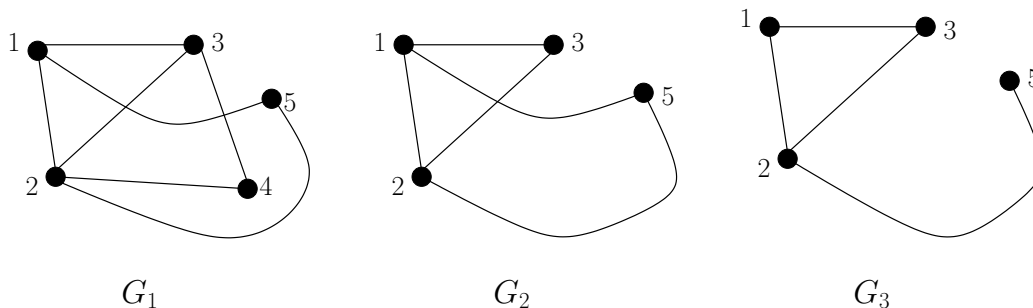
Ορισμός 1.7 Το γράφημα $H = (U, F)$ καλείται υπογράφημα του $G = (V, E)$ αν $U \subseteq V$ και $F \subseteq E$. Αν $U = V$, τότε το H λέγεται επικαλύπτον υπογράφημα (spanning subgraph) του $G = (V, E)$.

Διαισθητικά για να πάρουμε ένα υπογράφημα του $G = (V, E)$, σβήνουμε κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές. Τα εναγόμενα υπογραφήματα καθορίζονται μόνο από το σύνολο των κορυφών τους.

Ορισμός 1.8 Δοθέντων $G = (V, E)$ και $\emptyset \neq U \subseteq V$, με $G[U]$ συμβολίζουμε το γράφημα με σύνολο κορυφών U και σύνολο ακμών $E(G[U]) = \{e \in E \mid e \subseteq U\}$. Το $G[U]$ καλείται υπογράφημα του $G = (V, E)$ που ενάγεται από το U ή πιο απλά εναγόμενο υπογράφημα (induced subgraph) του $G = (V, E)$.

Στο Σχήμα 1.6 δίνονται παραδείγματα των Ορισμών, 1.7, 1.8.

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $S \subseteq V$. Το γράφημα που προκύπτει αν διαγράψουμε το S από το G συμβολίζεται με $G \setminus S$ ή $G - S$ και ορίζεται ως $G[V \setminus S]$. Για σύνολο $F \subseteq E$, το γράφημα που προκύπτει αν διαγράψουμε το F από το G συμβολίζεται με $G \setminus F$ ή $G - F$ και ορίζεται ως $G \setminus F = (V, E \setminus F)$. Αν τα S και F είναι μονοσύνολα, απλά γράφουμε $G - v$ και $G - e$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.6: Το G_2 είναι εναγόμενο υπογράφημα του G_1 . Το G_3 είναι υπογράφημα του G_1 και του G_2 αλλά δεν είναι εναγόμενο υπογράφημα.

Κάποιες σημαντικές ειδικές κατηγορίες γραφημάτων είναι οι παρακάτω. K_n : πλήρες γράφημα (κλίκα) με n κορυφές. $K_{n,m}$: πλήρες διμερές γράφημα με n κορυφές στο ένα σύνολο της διαμέρισης και m στο άλλο. Κενό γράφημα: το $(\emptyset, \emptyset)$.

Ορισμός 1.9 Μονοπάτι (path) καλείται το μη κενό γράφημα $P = (V, E)$ όπου $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ $E = \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_k, x_{k+1}\}\}$, $k \geq 0$, όπου $|E(P)| = k$ είναι το μήκος του μονοπατιού. Οι κορυφές $x_2, \dots, x_k$ καλούνται εσωτερικές κορυφές του P .

Αν $P = (V, E)$ είναι ένα μονοπάτι μήκους $k \geq 2$, το γράφημα $C = (V, E \cup \{x_{k+1}, x_1\})$ καλείται κύκλος (cycle) μήκους $k + 1$. Όταν αναφερόμαστε σε ένα μονοπάτι ή κύκλο στο G εννοούμε ένα υπογράφημα του G που είναι μονοπάτι ή κύκλος αντίστοιχα.

Ορισμός 1.10 Περίπατος (walk) μήκους $k \geq 1$ στο G καλείται μια μη κενή ακολουθία κορυφών του $G = (V, E)$

$$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$$

τ.ω. $v_i \in V$, $i = 1, \dots, k + 1$ και υπάρχει $e_i \in E$ με $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, k$.

Παρατηρήστε ότι σε έναν περίπατο μπορεί να υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών ή ακόμα και ακμών. Αν $v_1 = v_{k+1}$ ο περίπατος ονομάζεται κλειστός.

Άσκηση 1.2 Κάθε περίπατος από το u στο v στο G περιέχει ένα μονοπάτι από το u στο v .

Ορισμός 1.11 Ένα μη κενό γράφημα $G = (V, E)$ καλείται συνεκτικό αν για κάθε $x, y \in V$, τα x και y ενώνονται με μονοπάτι στο G .

Ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του G καλείται *συνεκτική συνιστώσα* του G , ή απλά *συνιστώσα* του G .

Πρόταση 1.2 Γράφημα G με n κορυφές και m ακμές έχει τουλάχιστον $n - m$ συνεκτικές συνιστώσες.

Απόδειξη. Ξεκίνησε με το γράφημα $\overline{K_n}$ (που έχει n συνιστώσες) και πρόσθεσε μία-μία τις m ακμές του $E(G)$. Κάθε ακμή που προσθέτεις μειώνει τον αριθμό των συνιστωσών το πολύ κατά ένα. ■

1.3 Δέντρα

Ορισμός 1.12 Ένα γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται *ακυκλικό* ή *δάσος*. Δέντρο είναι ένα συνεκτικό ακυκλικό γράφημα.

Φύλλο σε ένα δέντρο είναι μια κορυφή βαθμού 1.

Λήμμα 1.1 Ένα δέντρο T με $n \geq 2$ κορυφές περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

Απόδειξη. Κάθε συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές περιέχει τουλάχιστον μία ακμή, άρα και τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Πάρε ένα μεγιστικό μονοπάτι P , τα άκρα του x, y δεν έχουν άλλο γείτονα στο T εκτός από τους γείτονες τους στο P . Άρα τα x, y είναι φύλλα. ■

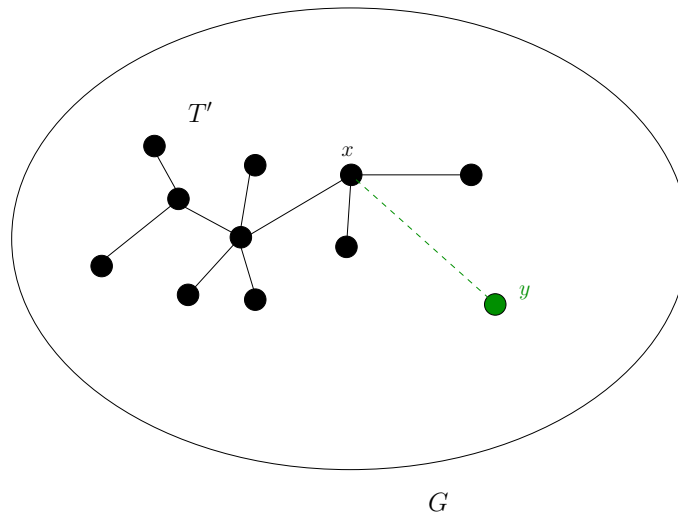
Θεώρημα 1.1 Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα γράφημα T με n κορυφές.

1. Το T είναι δέντρο.
2. Οποιοσδήποτε δύο κορυφές του T ενώνονται με μοναδικό μονοπάτι.
3. Το T είναι συνεκτικό και έχει $n - 1$ ακμές.
4. Το T είναι ακυκλικό και έχει $n - 1$ ακμές.

Απόδειξη. Άσκηση. ■

Συμβολίζουμε με $\delta(G)$ τον ελάχιστο βαθμό, δηλαδή την ποσότητα $\min_{v \in V(G)} d_G(v)$.

Θεώρημα 1.2 Αν T δέντρο με $k \geq 0$ ακμές και G γράφημα με $\delta(G) \geq k$, τότε το T είναι ισόμορφο με υπογράφημα του G .



Σχήμα 1.7: Απεικόνιση της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο k .

Βάση. Έστω $k = 0$. Κάθε γράφημα περιέχει ως υπογράφημα το K_1 που είναι το μόνο δέντρο με μηδέν ακμές.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για δέντρα με λιγότερες από k ακμές. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για T με $k > 0$ ακμές. Από το Λήμμα 1.1, το T περιέχει φύλλο v . Έστω u ο μοναδικός γείτονας του v στο T . Ορίζουμε $T' := T - v$. Από την Επαγωγική Υπόθεση το G περιέχει υπογράφημα ισόμορφο με το T' αφού $\delta(G) \geq k > k - 1 = |E(T')|$. Έστω f η συνάρτηση ισομορφισμού και x η κορυφή στο «αντίγραφο» του T' εντός του G η οποία αντιστοιχεί στο u , δηλ. $x = f(u)$. Δείτε το Σχήμα 1.7. Επειδή το T' έχει $k - 1$ κορυφές διάφορες του u και $d_G(x) \geq k$, το x έχει κάποιο γείτονα y στο G που δεν περιέχεται στο $f(V(T'))$. Προσθέτοντας την ακμή $\{x, y\}$ παίρνουμε ένα «αντίγραφο» του T στο G με το y να παίζει το ρόλο του v . Μπορούμε δηλαδή να επεκτείνουμε τον ισομορφισμό f σε έναν ισομορφισμό g με $y = g(v)$ και $g(w) = f(w)$, για κάθε $w \in V(T')$. ■

Η ανισότητα στο Θεώρημα 1.2 είναι η καλύτερη δυνατή αφού το K_k δεν περιέχει δέντρο με k ακμές.