Γραφείς: Παναγιωτίδης Αλέξανδρος & Σ. Κ.

9.1 Πορίσματα του Θεωρήματος του Tutte

Θυμίζουμε το Θεώρημα του Tutte από τη Διάλεξη 8.

Θεώρημα 9.1 *Ένα γράφημα G έχει τέλειο ταίριασμα ανν*

$$q(G \setminus S) \leq |S|, \ \forall S \subseteq V(G) \tag{9.1}$$

όπου με $q(\cdot)$ συμβολίζεται ο αριθμός των περιττών συνιστωσών ενός γραφήματος.

Ορισμός 9.1 *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται k-κανονικό αν για κάθε $v \in V$ ο βαθμός του v είναι k, δηλαδή ισχύει $d(v) = k$ για κάθε $v \in V$.*

Πόρισμα 9.1 (Petersen, 1891) *Κάθε 3-κανονικό γράφημα G που δεν έχει γέφυρα έχει τέλειο ταίριασμα.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η (9.1) και τότε από το Θεώρημα του Tutte θα υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Έστω $S \subseteq V(G)$ και C περιττή συνιστώσα του $G \setminus S$, θα δείξουμε πρώτα ότι το πλήθος ακμών από το C στο S είναι περιττός μεγαλύτερος ή ίσος του 3.

Έχουμε ότι το $\sum_{v \in V(C)} d_G(v)$ είναι περιττός ως περιττό άθροισμα περιττών και ότι το $\sum_{v \in V(C)} d_C(v)$ είναι άρτιος ως το διπλάσιο του πλήθους των ακμών της C. Συνεπώς, η ποσότητα $p = \sum_{v \in V(C)} d_G(v) - \sum_{v \in V(C)} d_C(v)$ είναι περιττή ως διαφορά περιττού από άρτιο. Ταυτόχρονα το p ισούται με το πλήθος των ακμών του G με ακριβώς ένα άκρο στο C.

Εφόσον το C είναι συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus S$, αν υπάρχει μόνο μία ακμή από το C στο S αυτή θα είναι γέφυρα του G. Συνεπώς το πλήθος p των ακμών από το C στο S είναι περιττός μεγαλύτερος ή ίσος του 3.

Θεωρώντας όλες τις περιττές συνιστώσες του $G \setminus S$, καταλήγουμε ότι το πλήθος ακμών από το S στο $G \setminus S$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $3q(G \setminus S)$.

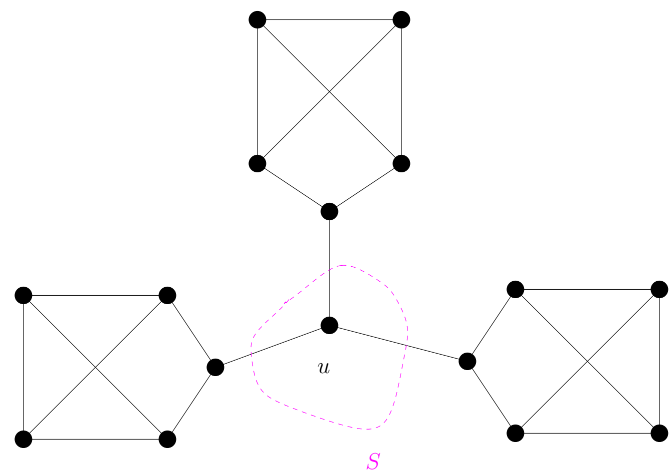
Επίσης έχουμε ότι το πλήθος ακμών από το S στο $G \setminus S$ είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του S, δηλαδή το $\sum_{v \in S} d_G(v) = 3|S|$.

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις καταλήγουμε ότι

$$q(G \setminus S) \leq |S|$$

άρα ισχύει η (9.1) δηλ. η συνθήκη του Tutte. ∎

Παράδειγμα γραφήματος όπου δεν εφαρμόζεται το Πόρισμα 9.1 είναι το λεγόμενο *γράφημα του Tutte* (βλ. Σχήμα 9.1) το οποίο είναι 3-κανονικό αλλά έχει ακμοσυνεκτικότητα ίση με 1.



Σχήμα 9.1: Το γράφημα του Tutte.

Έστω $S = \{u\}$ το μονοσύνολο που αποτελείται από την κεντρική κορυφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.1. Αν αφαιρέσουμε το S από το γράφημα, τότε θα υπάρχουν τρεις συνεκτικές συνιστώσες περιττής τάξης συνεπώς δεν ισχύει η συνθήκη του Tutte. Το μέγιστο ταίριασμα αφήνει ακριβώς δύο κορυφές ακάλυπτες, αφού σύμφωνα με την ορολογία του επόμενου θεωρήματος $d = 2$.

Θεώρημα 9.2 (Ελλειμματική εκδοχή του Θεωρήματος του Tutte, [Berge 1958]). *Το μέγιστο ταίριασμα σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| = n$ καλύπτει*

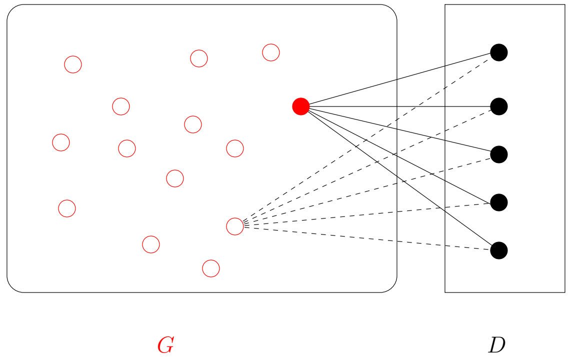
$$n - \max_{S \subseteq V} \{q(G \setminus S) - |S|\}$$

κορυφές.

Απόδειξη. Ορίζουμε $d(S) = q(G \setminus S) - |S|$ και $d = \max_{S \subseteq V} d(S)$. Για $S = \varnothing$ έχουμε $q(G) \geq 0$, άρα $d \geq 0$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε ταίριασμα μπορεί να καλύψει το πολύ $n - d$ κορυφές. Έστω S υποσύνολο του V και C_S οι συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus S$ με περιττή τάξη. Για κάθε συνιστώσα C στο C_S και για οποιοδήποτε ταίριασμα, τουλάχιστον μία κορυφή του $V(C)$ δεν μπορεί να ταιριαστεί εσωτερικά στο C αφού η τάξη του C είναι περιττή. Εάν η κορυφή έχει γείτονες εκτός του $V(C)$ αυτοί ανήκουν υποχρεωτικά στο S, αφού το C είναι συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus S$. Άρα σε οποιοδήποτε ταίριασμα θα έχουμε $|C_S|$ το πλήθος κορυφές, οι οποίες αναζητούν ταίρι μόνο ανάμεσα στις κορυφές του S, και τουλάχιστον $|C_S| - |S| = d(S)$ θα μείνουν αταίριαστες.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ταίριασμα που μπορεί να καλύψει $n - d$ κορυφές. Ορίζουμε γράφημα G' με $V(G') = G \cup D$, όπου D σύνολο d νέων κορυφών όπου η κάθε μία συνδέεται με ακμή (μόνο) με όλες τις κορυφές του V. Βλ. Σχήμα 9.2.



Σχήμα 9.2: Γράφημα G' από την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $S \subseteq V$, το $d(S)$ έχει το ίδιο parity με το $|G|$. Πράγματι, έστω ότι το $|G|$ και το $q(G \setminus S)$ είναι άρτιοι, τότε το $|G \setminus S|$ είναι άρτιο και άρα το $|S|$ είναι άρτιο. Συνεπώς το $d(S) = q(G \setminus S) - |S|$ είναι άρτιος. Ομοίως αποδεικνύεται ο ισχυρισμός και στις άλλες περιπτώσεις.

Συνεπώς το $|D|$ έχει το ίδιο parity με το $|G|$, άρα $|G'|$ άρτιος.

Θα δείξουμε ότι το G' ικανοποιεί τη συνθήκη του Tutte (9.1), συνεπώς από το Θεώρημα του Tutte θα υπάρχει τέλειο ταίριασμα M' στο G'. Αφαιρώντας τις ακμές που προσπίπτουν στο D από το M', το προκύπτον σύνολο M θα είναι ταίριασμα στο G που καλύπτει τουλάχιστον $n - d$ κορυφές.

Έστω S' υποσύνολο του $V \cup D$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Το S' είναι το κενό σύνολο. Τότε το $q(G' \setminus S') = q(G') = 0$, αφού το $|G'|$ είναι άρτιο όπως είδαμε. Συνεπώς ισχύει $q(G' \setminus S') = |S'| = 0$.

2. $S' \neq \emptyset$ και $D \setminus S' \neq \emptyset$ και $V(G) \setminus S' \neq \emptyset$. Τότε το $G' \setminus S'$ είναι συνεκτικό αφού κάθε κορυφή του $v \in D \setminus S' \subseteq V(G' \setminus S')$ συνδέεται με όλες τις κορυφές του $V(G) \setminus S'$. Άρα ισχύει
$$q(G' \setminus S') \leq 1 \leq |S'|.$$

3. $V(G) \subseteq S'$. Τότε
$$q(G' \setminus S') = |D \setminus S'| \leq d \leq n \leq |S'|.$$

4. $D \subseteq S'$. Ορίζουμε το $S = S' \setminus D \subseteq V(G)$ και εφόσον $V(G') = V(G) \cup D$ έχουμε ότι $G' \setminus S' = G \setminus S$. Άρα ισχύει
$$q(G' \setminus S') = q(G \setminus S) \leq |S| + d = |S'|.$$

Συνεπώς για κάθε $S' \subseteq V(G')$ ισχύει $q(G' \setminus S') \leq |S'|$ και άρα ισχύει η συνθήκη του Tutte στο G'. ∎