Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 10: 10.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ιωάννης Μπαρούμας & Σ. Κ.

10.1 Βασικές έννοιες τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$

Δοθέντων δύο σημείων $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$ στο $\mathbb{R}^2$, η (Ευκλείδεια) *απόσταση* τους ορίζεται ως

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Ο *ανοιχτός δίσκος* με κέντρο x και ακτίνα r συμβολίζεται με $D(x, r)$ και ορίζεται ως

$$D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| < r\}.$$

Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^2$ καλείται *γειτονιά* του $x \in \mathbb{R}^2$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ. ώ. $S = D(x, \varepsilon)$.

Ορισμός 10.1 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$.*

1. *Ένα σημείο $x \in A$ καλείται* εσωτερικό σημείο *του A αν υπάρχει γειτονιά N του x τ. ώ. $x \in N \subseteq A$.*
2. *Ένα σημείο $x \in A$ καλείται* εξωτερικό σημείο *του A αν υπάρχει γειτονιά N του x τ. ώ. $x \in N \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus A$.*
3. *Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^2$ καλείται* συνοριακό σημείο *του A αν κάθε γειτονιά του x τέμνει το A και το $\mathbb{R}^2 \setminus A$.*

Ορισμός 10.2 *Το* εσωτερικό *ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$, συμβολικά $\operatorname{int} A$, είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A.*

Ο παρακάτω ορισμός είναι θεμελιώδης.

Ορισμός 10.3 *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ καλείται* ανοιχτό *αν $A = \operatorname{int} A$.*

Ορισμός 10.4 *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ καλείται* κλειστό *αν κάθε $x \notin A$ είναι εξωτερικό σημείο.*

Υπάρχουν σύνολα που είναι και ανοιχτά και κλειστά. Παράδειγμα: το $\mathbb{R}^2$. Άλλα σύνολα δεν είναι ούτε ανοιχτά, ούτε κλειστά. Θεωρήστε τον κλειστό δίσκο

$$S(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| \leq 1\}$$

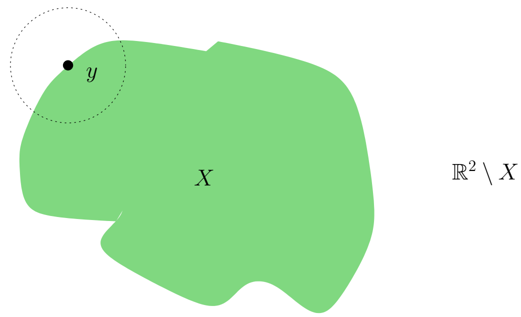
και αφαιρέστε το αριστερό ημικύκλιο. Το σύνολο A που προκύπτει δεν είναι ούτε ανοιχτό, ούτε κλειστό. Τα σημεία του δεξιού ημικύκλιου ανήκουν στο A χωρίς να είναι εσωτερικά. Τα σημεία του αριστερού ημικύκλιου δεν ανήκουν στο A αλλά δεν είναι εξωτερικά.

Ορισμός 10.5 Σύνορο *ενός συνόλου* $A \subseteq \mathbb{R}^2$, *συμβολικά* bnd A, *είναι το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του* A.

Ορισμός 10.6 Κλειστότητα *ενός συνόλου* $A \subseteq \mathbb{R}^2$, *συμβολικά* $\overline{A}$, *είναι το σύνολο* $A \cup \text{bnd}\, A$.

Αποδεικνύεται ότι ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$. Επίσης ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι κλειστό αν και μόνο αν το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοιχτό.

Στο Σχήμα 10.1 δίνεται ένα παράδειγμα ενός σημείου y που βρίσκεται στο σύνορο ενός συνόλου X.



Σχήμα 10.1: Το σημείο y ανήκει στο σύνορο του συνόλου X. Οσοδήποτε μικρό δίσκο και αν σχεδιάσουμε γύρω από το y, αυτός θα τέμνει και το X και το $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Καμπύλη είναι το πεδίο τιμών μια συνεχούς συνάρτησης $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Η καμπύλη $C = f([0,1])$ *συνδέει τα άκρα* της $f(0)$ και $f(1)$. Η καμπύλη είναι *απλή* αν η f είναι 1-1 και *κλειστή* αν $f(0) = f(1)$.

Ορισμός 10.7 Περιοχή (region) *καλείται ένα ανοιχτό σύνολο* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *όπου για κάθε* $u, v \in U$, *υπάρχει μια καμπύλη που τα ενώνει και η οποία ανήκει εξ ολοκλήρου στο* U.

Θεώρημα 10.1 (Jordan, 1887) *Μια απλή κλειστή καμπύλη* C *διαμερίζει το* $\mathbb{R}^2 \setminus C$ *σε ακριβώς δύο περιοχές, όπου η κάθε μια έχει ως σύνορο τη* C.

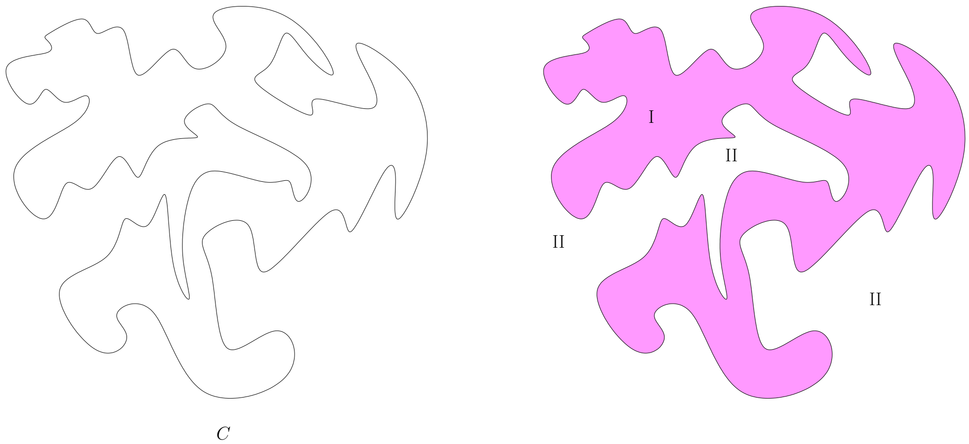
Παράδειγμα μιας τέτοιας καμπύλης δίνεται στο Σχήμα 10.2.

Παρατήρηση 10.1 *Το Θεώρημα του Jordan δεν ισχύει για κάθε επιφάνεια. Βλ. Σχήμα 10.3.*

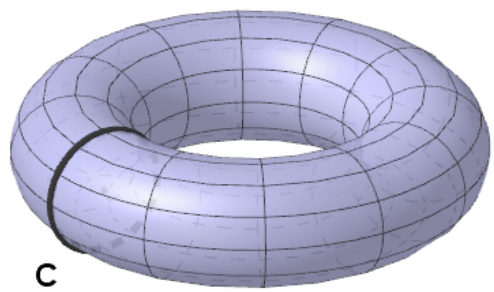
10.2 Επίπεδα γραφήματα

Ορισμός 10.8 Εμβάπτιση (ή σχεδιασμός) *ενός γραφήματος* $G = (V, E)$ *στο επίπεδο, είναι μια συνάρτηση* $f : V \cup E \to \mathbb{R}^2$ *με τις εξής ιδιότητες:*

1. *Κάθε* $u \in V$ *απεικονίζεται σε σημείο* $f(u)$.
2. *Κάθε ακμή* $\{u, v\} \in E$ *απεικονίζεται σε μια απλή καμπύλη* $f(\{u, v\})$ *με άκρα* $f(u)$ *και* $f(v)$.



Σχήμα 10.2: Οι περιοχές I και II, έχουν σαν σύνορό τους την καμπύλη C.



Σχήμα 10.3: Το θεώρημα του *Jordan* δεν ισχύει σε ένα τοροειδές.

3. *Για κάθε* $u, v \in V$ *ισχύει ότι* $f(u) \neq f(v)$ *και για κάθε* $\{u, v\} \in E$ *ισχύει ότι* $f(\{u, v\})\, cap f(V)) = \{f(u), f(v)\}$.

Ορισμός 10.9 *Για* $e, e' \in E, e \neq e'$, *ένα σημείο στην τομή* $f(e) \cap f(e')$ *που δεν είναι κοινό άκρο των* $f(e)$ *και* $f(e')$ *καλείται* διασταύρωση (crossing).

Ορισμός 10.10 *Ένα γράφημα* G *καλείται* επίπεδο (planar) *αν υπάρχει εμβάπτιση του* G *στο* $\mathbb{R}^2$ *χωρίς διασταυρώσεις.*

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε εμβάπτιση ενός επίπεδου γραφήματος θα εννοούμε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις ακμών.

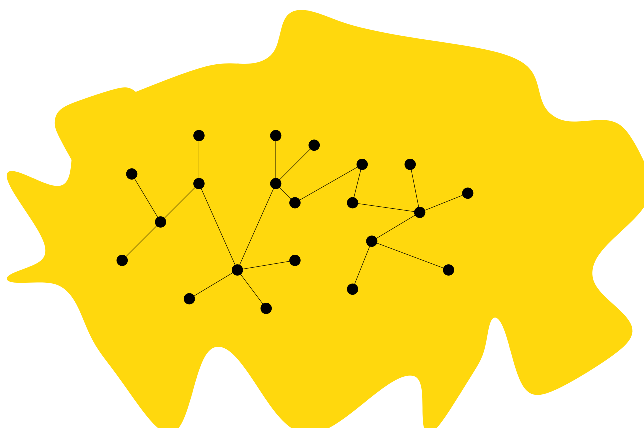
Ορισμός 10.11 Ενεπίπεδο (plane) *γράφημα* Γ *είναι το πεδίο τιμών μια συγκεκριμένης εμβάπτισης* $f(G) \subseteq \mathbb{R}^2$ *ενός επίπεδου γραφήματος* G.

Ένα ενεπίπεδο γράφημα Γ είναι τυπικά ένα σύνολο σημείων του επιπέδου που μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει με φυσικό τρόπο ένα αφηρημένο γράφημα $G = (V, E)$. Ανάλογα με τα συμφραζόμενα, θα χρησιμοποιούμε και το αφηρημένο γράφημα G για να αναφερόμαστε στο ενεπίπεδο, και θα μιλάμε, π.χ., για ακμές και κορυφές αντί για καμπύλες και σημεία.

Ορισμός 10.12 Όψεις (faces) *ενός ενεπίπεδου γραφήματος G είναι οι μεγιστικές περιοχές του $\mathbb{R}^2$ που δεν περιέχουν κανένα σημείο που χρησιμοποιείται στην εμβάπτιση, δηλαδή οι μεγιστικές περιοχές του $\mathbb{R}^2 \setminus G$.*

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε τις όψεις είναι ο ακόλουθος. Για δύο σημεία x, y του $\mathbb{R}^2 \setminus G$ ορίζουμε τη σχέση $x \sim y$ αν υπάρχει καμπύλη στο $\mathbb{R}^2 \setminus G$ που ενώνει τα x και y. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Όψεις του ενεπίπεδου γραφήματος G είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης.

Παρατήρηση 10.2 *Οι όψεις είναι ανοιχτά σύνολα.*



Σχήμα 10.4: Ένα ενεπίπεδο δέντρο έχει ακριβώς μια όψη.

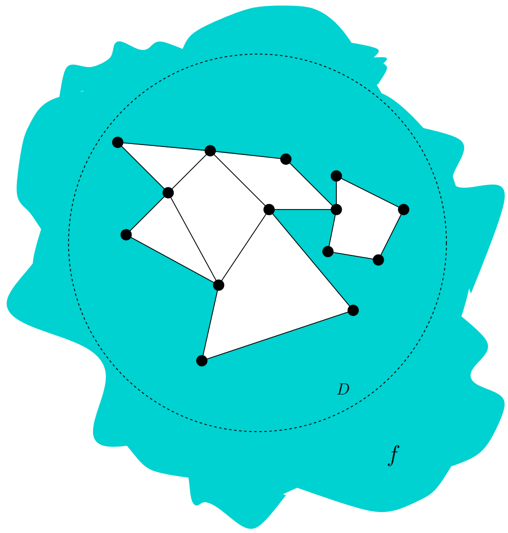
Το σύνορο bnd f μιας όψης f με βάση τον Ορισμό 10.5 είναι ένα υπογράφημα G_f του ενεπίπεδου G. Αν το G_f είναι συνεκτικό, υιοθετούμε τη σύμβαση να αναπαριστούμε το σύνορο της f ως έναν κλειστό περίπατο ελάχιστου μήκους που διέρχεται από όλες τις κορυφές που ανήκουν στο $V(G_f)$. Το *μήκος* του συνόρου, είναι το μήκος (πλήθος ακμών) του περίπατου. Π.χ., ένα ενεπίπεδο δέντρο με n κορυφές έχει μία μόνο όψη με μήκος συνόρου $2n-2$. Βλ. Σχήμα 10.4.

Για κάθε ενεπίπεδο γράφημα G, υπάρχει κλειστός δίσκος D που το περιέχει. Η όψη του G που περιέχει το $\mathbb{R}^2 \setminus D$ καλείται *εξωτερική*. Βλ. Σχήμα 10.5.

Συμβολίζουμε με S^n τη n-διάστατη σφαίρα, δηλ. τα σημεία του $\mathbb{R}^{n+1}$ που βρίσκονται σε απόσταση 1 από την αρχή των αξόνων.

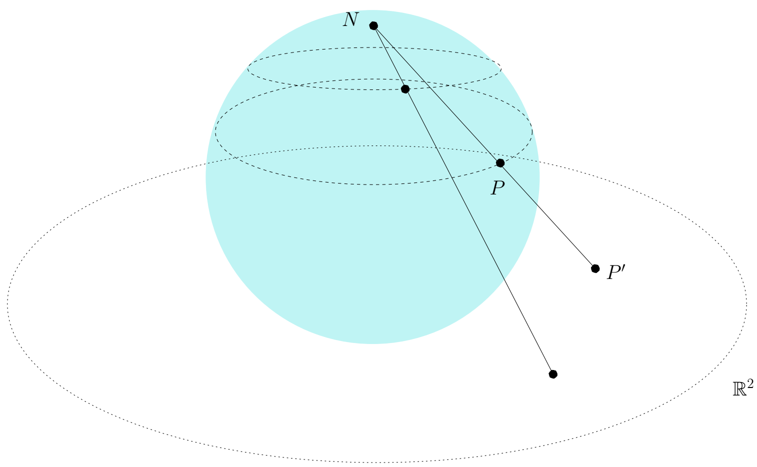
Θεώρημα 10.2 *Αν ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα G, έχει μια εμβάπτιση στο επίπεδο στην οποία κάποια όψη έχει ως σύνορο τον κύκλο $(v_1, v_2, ..., v_k)$, τότε υπάρχει εμβάπτιση του G στο επίπεδο στην οποία η εξωτερική όψη έχει σύνορο τον κύκλο $(v_1, v_2, ..., v_k)$.*

Σχέδιο Απόδειξης. Έστω f η όψη που εξετάζουμε. Μεταφέρουμε την εμβάπτιση από το επίπεδο στην σφαίρα S^2 (τυπικά αυτό που κάνουμε είναι το αντίστροφο της στερεογραφικής προβολής). Κάνουμε ολίσθηση της εμβάπτισης πάνω στη σφαίρα S, έτσι ώστε ο βόρειος πόλος N να βρεθεί μέσα στην f. Έστω Γ η προκύπτουσα εμβάπτιση. Για να προβάλλουμε τα σημεία της Γ στο $\mathbb{R}^2$ χρησιμοποιούμε τη στερεογραφική προβολή. Τοποθετούμε τη σφαίρα έτσι ώστε ο νότιος πόλος να εφάπτεται του $\mathbb{R}^2$. Για



Σχήμα 10.5: Η όψη f περιέχει το $\mathbb{R}^2 \setminus D$, άρα είναι η εξωτερική.

κάθε σημείο P της S^2 με $P \neq N$, η *στερεογραφική προβολή* P' του P στο $\mathbb{R}^2$ είναι η τομή της ευθείας που διέρχεται από τα N, P με το $\mathbb{R}^2$. Βλ. Σχήμα 10.6.



Σχήμα 10.6: Αναπαράσταση της στερεογραφικής προβολής.

Ο τύπος της στερεογραφικής προβολής είναι $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ (με τον βόρειο πόλο να βρίσκεται στο επίπεδο $z = 1$) και της αντίστροφης στερεογραφικής προβολής είναι $\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$ ∎